Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. К. Белый

Математические модели функции полезности денег

Учебное пособие

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2009

УДК 330.42
ББК 65.011.312
Б439

Математический факультет ПетрГУ рекомендует к изданию учебное пособие Е. К. Белого «Математические модели функции полезности денег»

Рецензенты:

С. С. Платонов, профессор каф. геометрии и топологии ПетрГУ, доктор физ.-мат. наук;

Т. В. Морозова, ведущий научный сотрудник Института экономики КНЦ РАН, доктор экономических наук

Б439 **Белый Е. К.**

Математические модели функции полезности денег: учебное пособие / Е. К. Белый. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2009. – 36 с.

ISBN 978-5-8021-1084-3

Учебное пособие предназначено для студентов математического факультета, изучающих спецкурс «Теория полезности денег», а также для всех интересующихся теоретическими вопросами финансовой математики.

УДК 330.42
ББК 65.011.312

ISBN 978-5-8021-1084-3

Содержание

Введение

В основу настоящей работы легли материалы спецкурса «Теория полезности денег», читаемого автором для студентов математического факультета Петрозаводского госуниверситета. Во введении мы выделим только основные этапы развития теории полезности, поскольку подробный обзор потребовал бы отдельного исследования. Однако в конце книги читатель может найти биографические справки, касающиеся представителей математической, экономической, социологической и других наук, внесших существенный вклад в развитие теории.

Термин «полезность» как цель потребления того или иного блага впервые применил в экономической теории английский философ и социолог Джереми Бентам. В дальнейшем в работах немецкого экономиста, предшественника математической школы в политической экономии Германа Госсена и английского экономиста Альфреда Маршалла теория полезности была математически обоснована и под полезностью стали фактически подразумевать некоторую меру полезности как функцию количества блага. При этом к функции полезности предъявлялись требования [6, с. 155–179]:

- Возрастание полезности: с увеличением количества блага его полезность растет.
- Убывание предельной полезности: с увеличением количества потребляемого блага полезность каждой следующей его порции снижается.

Пусть $z = f(x)$ – произвольная функция полезности, где x – количество некоторого блага, а z – его полезность. Тогда функция $f(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$f'(x) > 0 \text{ и } f''(x) < 0 . \qquad (1)$$

Таким образом, функция полезности любого блага должна быть возрастающей и выпуклой вверх. Функцию полезности такого вида мы будем называть классической. До сих пор, за редким исключением, при построении математических моделей в экономике требования (1) для функции полезности считают очевидными.

И все же около пятидесяти лет назад американский экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1976 года Милтон Фридмен [7] «испортил» классическую кривую полезности для такого блага, как деньги, отбросив второе из условий (1). Таким образом, график функции полезности Фридмена может иметь как участки, выпуклые вверх, так и участки, выпуклые вниз.

Данная работа посвящена вопросу построения математических моделей функции полезности. При этом мы постараемся ответить на вопросы: любая ли удовлетворяющая условиям (1) функция может быть классической функцией полезности, и любая ли возрастающая функция может быть функцией Фридмена? Отталкиваясь от класса степенных функций полезности, мы построим более широкий класс таких функций, имеющих участки выпуклости как вверх, так и вниз.

1. Функция полезности и моральное ожидание

§ 1.1. Классическая функция полезности

Прежде всего, отметим, что еще в 1738 году швейцарский математик Даниил Бернулли фактически построил логарифмическую функцию полезности (не используя термин «полезность») для решения задач, в которых жребий нельзя оценивать по математическому ожиданию [2]. Например, если Вам достался жребий, который с равной вероятностью должен принести выигрыш в сорок тысяч долларов или ничего. Хотя по математическому ожиданию жребий оценивается в двадцать тысяч, многие поступят разумно, согласившись продать его за восемнадцать тысяч долларов.

Бернулли предположил, что элементарное приращение состояния дает увеличение полезности состояния на величину, пропорциональную этому приращению и обратно пропорциональную величине состояния:

$$dZ = k \cdot \frac{dC}{C}, \qquad (2)$$

где C – текущее состояние, Z – его полезность, $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. С точки зрения здравого смысла такое предположение естественно. Дополнительная тысяча долларов для малообеспеченного человека покажется очень даже значительной суммой, но миллионер такое приращение своего состояния просто не почувствует. Пользуясь свободой в выборе шкалы, положим $k = 1$. Взяв одно из решений уравнения (2), примем за функцию полезности денег $Z = \ln(C)$. Пусть теперь в некоторой игре величина выигрыша принимает значения x_i с вероятностями p_i, где $i = 1,2,\cdots n$, С – состояние игрока до начала игры. Тогда математическое ожидание полезности примет вид $\ln\left(\overset{=}{x} + C\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \cdot \ln\left(x_i + C\right)$, где $\overset{=}{x}$ – оценка выигрыша. Впоследствии французский математик Пьер Симон Лаплас назвал эту оценку моральным ожиданием. Из последнего равенства следует

$$\overset{=}{x} = \prod_{i=1}^{n} \left(x_i + C\right)^{p_i} - C. \tag{3}$$

Естественно напрашивается обобщение на случай, когда элементарное приращение состояния дает увеличение полезности состояния на величину, пропорциональную этому приращению и обратно пропорциональную некоторой степени состояния q, где $q \in [0;1)$ – вещественная константа. Тогда мы придем к классу функций полезности денег вида $f(C) = C^s$. Такие примеры функций полезности приведены, например, у Малыхина [5, с. 194–205]. Моральное ожидание порядка $s \in (0;1]$ можно определить следующим образом:

Определение 1: Моральным ожиданием порядка s случайной величины x при состоянии C будем называть величину

$$M_{\text{r}}^{(\text{s})}(x, C) = \overset{=}{x} = \left(\sum_{i} p_i \cdot \left(x_i + C\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} - C. \tag{4}$$

Математическое ожидание как обычно будем обозначать $\bar{x}$ или $M(x)$. Заметим, что моральное ожидание в смысле (3) является частным случаем морального ожидания в смысле (4), так как

$$\lim_{s \to 0} M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x, C) = \prod_{i} (x_i + C)^{p_i} - C .$$

То есть определение (4) можно распространить на случай $s = 0$. Все рассмотренные степенные функции полезности, как и логарифмическая, удовлетворяют условиям (1). Для таких функций математическое ожидание полезности жребия всегда меньше, чем полезность гарантированной суммы $M(x)$. Таким образом, жребий выгодно продать за сумму, меньшую его математического ожидания. Любая «честная» игра становится невыгодной, если под таковой понимать игру, в которой математическое ожидание выигрыша равно плате за участие в игре. Однако люди не только играют в «честные» азартные игры, но и покупают лотерейные билеты, когда стоимость билета выше математического ожидания выигрыша! Последнее явилось поводом усомниться в правомерности допущения о том, что кривая полезности денег всегда выпукла вверх. Утверждения о неправильной оценке игроком своих шансов на выигрыш звучат малоубедительно. Тем более лотерейные билеты часто приобретают вполне рассудительные и осторожные люди. Один и тот же человек может страховать себя, свой дом и машину от всех возможных неприятных случайностей, то есть платить деньги за избавление от рисков, но одновременно покупать лотерейные билеты.

§ 1.2. Функция Фридмена

Предположение Фридмена о наличии на кривой полезности выпуклых вниз участков позволяет адекватно описать поведение игрока, который платит за жребий сумму, большую его математического ожидания. Насколько разумно его поведение? Представим себе человека, не имеющего собственной квартиры и вынужденного снимать жилье. С ростом состояния этого человека будет расти и полезность состояния. Рост полезности, возможно, до некоторых пор будет выражаться в том, что человек начнет лучше питаться и одеваться, увеличит расходы на организацию досуга. Допустим, его текущие доходы, накопления растут со временем. Однако он пока остается человеком без собственного жилья и ему, естественно, хочется поскорей изменить этот статус. Наверно, рано или поздно он станет собственником квартиры, но человеческая жизнь не настолько длинна, чтобы долго ждать. И вот с некоторого момента, когда он вплотную приблизится к заветной цели, каждый следующий рубль будет для него все более значимым. Кривая полезности становится выпуклой вниз! Наконец, наибольшую полезность принесет тот рубль, после которого он сможет купить квартиру. Именно с этого момента его благосостояние изменится принципиально. Он сможет пользоваться благом, доселе для него недоступным. Таким образом, в процессе роста состояния индивида наблюдаются как периоды плавного роста полезности, соответствующие выпуклой вверх функции полезности денег, так и периоды быстрого роста, когда функция полезности выпукла вниз и происходит изменение статуса индивида. Изменение статуса происходит относительно быстро, поскольку нельзя, например, плавно из человека, не имеющего автомобиль, сделаться человеком, имеющим автомобиль. Нельзя постепенно стать собственником особняка или яхты. Следовательно, разумно заплатить небольшую сумму за участие в игре, если в результате индивид получит возможность повысить свой статус до уровня, до которого «своим ходом» он, может быть, не поднимется за всю жизнь.

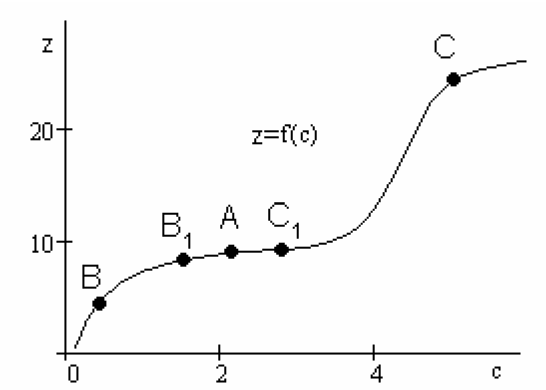

Рис. 1. График функции Фридмена

Пусть в данный момент состояние индивида соответствует точке A на рисунке. Тогда он согласится заплатить некоторую сумму за то, чтобы застраховать себя от маловероятной возможности оказаться в точке B, где его благосостояние окажется явно ниже. С другой стороны, он может также заплатить некоторую сумму за участие в игре, если в результате он получит возможность с небольшой вероятностью оказаться в точке C. Таким образом, человек может одновременно страховать себя от всевозможных рисков заметного снижения своего статуса и одновременно участвовать в лотереях. Он может продать один жребий за сумму, меньшую его математического ожидания, и одновременно купить другой жребий за сумму, большую его математического ожидания. При этом в обоих случаях он поступит разумно, если расходы на страхование от риска и на участие в игре не приведут к заметному снижению полезности, то есть, если индивид не окажется значительно ниже точки А на кривой полезности. Заметим, что неразумно было бы платить за страховку от риска оказаться в точке В1. Неразумно платить за игру, когда маловероятный выигрыш передвинет игрока по кривой полезности всего лишь в точку С1. Наконец, если бы вероятность оказаться в точке В была большой, никто не согласился бы страховать риск индивидуума за приемлемую для него денежную сумму. И, соответственно, если бы в игре вероятность попасть в точку С была большой, лотерейный билет должен был бы стоить огромные деньги.

Таким образом, разумное поведение индивида допускает умеренную плату за страхование риска маловероятных больших потерь и за игру с маловероятным большим выигрышем.

Выпуклые вниз участки кривой полезности можно также описать функциями $f(C) = C^S$, где $s \in (1;+\infty)$. Соответственно можно распространить определение морального ожидания (4) на случай $s \in [0;+\infty)$. В дальнейшем в таких случаях мы будем говорить, что моральное ожидание порождено соответствующей функцией полезности или, что функция является определяющей для морального ожидания. Исследуем наиболее важные свойства морального ожидания.

2. Свойства морального ожидания порядка $s \in [0;+\infty)$

I. Моральное ожидание строго монотонно возрастает с ростом его порядка: $M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x,C) < M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{r})}(x,C)$, если $0 \le s < r$.

Доказательство: Если $z > 0$ и функция q(z) выпукла вниз, то выполняется неравенство Иенсена [3, с. 93–94]: $q(M(z)) \le M(q(z))$. Возьмем в качестве q(z) выпуклую вниз функцию z^t, где $t > 1$. Тогда неравенство Иенсена примет вид $[M(z)]^t \le [M(z^t)]$. Равенство достигается в случае, когда случайная величина перестает быть таковой и принимает только одно значение. Такой случай мы исключим. Введем замену переменных $z = x^s$ и $t = \frac{r}{s}$. Как отмечено выше, $s < r$ и условие $t > 1$ выполняется. Значит, $\left[M\left(x^s\right)\right]^{\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}} < M\left(x^{s \cdot \frac{\mathrm{r}}{s}}\right)$ или $\left[M\left(x^s\right)\right]^{\frac{1}{\mathrm{s}}} < \left[M\left(\mathrm{x}^{\mathrm{r}}\right)\right]^{\frac{1}{\mathrm{r}}}$.

Заменив x на x+C и отняв C от левой и правой частей полученного неравенства, получим $M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x,C) < M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{r})}(x,C)$, что и требовалось доказать.

II. Моральное ожидание строго монотонно возрастает с ростом величины состояния C при $s \in [0;1)$ и строго монотонно убывает при $s \in (1;+\infty)$. При $s = 1$ $M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x,C)$ не зависит от C и равно математическому ожиданию. Таким образом, если $C_1 < C_2$, то

$$M_r^{(s)}(x, C_1) < M_r^{(s)}(x, C_2), \text{ при } s \in (0;1),$$

$$M_r^{(s)}(x, C_1) = M_r^{(s)}(x, C_2) = M(x), \text{ при } s = 1,$$

$$M_r^{(s)}(x, C_1) > M_r^{(s)}(x, C_2), \text{ при } s \in (1;+\infty).$$

Доказательство: Пусть $s \in (0;1)$.

$$\frac{d}{dC}\mathrm{M}_r^{(s)}(x, C) = \frac{d}{dC}\left(\left(M\left[(x+C)^s\right]\right)^{\frac{1}{s}} - C\right) =$$

$$= \left(M\left[(x+C)^s\right]\right)^{\frac{1-s}{s}} \cdot M\left[(x+C)^{s-1}\right] - 1.$$

Таким образом, $\frac{d}{dC}\mathrm{M}_r^{(s)}(x, C) > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\left(M\left[(x+C)^s\right]\right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(M\left[\left(\frac{1}{x+C}\right)^{1-s}\right]\right)^{\frac{1}{1-s}} > 1.$$

Среднее взвешенное арифметическое любой положительной величины всегда больше (или равно) среднего взвешенного гармонического. Причем равенство достигается только тогда, когда все значения величины совпадают. Последний случай мы можем сразу исключить, как не представляющий интереса.

Тогда $M(z) > \left(M\left(\frac{1}{z}\right)\right)^{-1}$ или $M(z)\cdot M\left(\frac{1}{z}\right) > 1$.

Воспользуемся доказанным в предыдущем пункте неравенством $\left[M\left(z^{s}\right)\right]^{\frac{1}{s}} \le \left[M\left(z^{r}\right)\right]^{\frac{1}{r}}$, если $s < r$.
При $s < 1-s$

$$\left(M\left[(x+C)^{s}\right]\right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(M\left[\left(\frac{1}{x+C}\right)^{1-s}\right]\right)^{\frac{1}{1-s}} >$$

$$> \left(M\left[(x+C)^{s}\right]\right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(M\left[\left(\frac{1}{x+C}\right)^{s}\right]\right)^{\frac{1}{s}} > 1.$$

В случае, когда $s > 1-s$,

$$\left(M\left[(x+C)^{s}\right]\right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(M\left[\left(\frac{1}{x+C}\right)^{1-s}\right]\right)^{\frac{1}{1-s}} >$$

$$> \left(M\left[(x+C)^{1-s}\right]\right)^{\frac{1}{1-s}} \cdot \left(M\left[\left(\frac{1}{x+C}\right)^{1-s}\right]\right)^{\frac{1}{1-s}} > 1.$$

Таким образом, для случая $s \in [0;1)$ свойство доказано. Для случая $s \in (1;+\infty)$ доказательство аналогично.

III. Предел морального ожидания при состоянии C, стремящемся к бесконечности, равен математическому ожиданию: $\lim\limits_{C\to\infty} M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x,C) = M(x)$.

Доказательство:

$$\lim_{C\to\infty} M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x,C) = \lim_{C\to\infty}\left(\left(\sum_i p_i\cdot(x_i+C)^s\right)^{\frac{1}{s}} - C\right) =$$

$$= \lim_{C\to\infty}\left(C\cdot\left(\sum_i p_i\cdot\left(1+\frac{x_i}{C}\right)^s\right)^{\frac{1}{s}} - C\right) =$$

$$\lim_{C\to\infty}\left(C\cdot\left(\sum_i p_i\cdot\left(1+\frac{s\cdot x_i}{C}+\circ\left(\frac{1}{C}\right)\right)\right)^{\frac{1}{s}} - C\right),$$

где, как обычно $\circ(\alpha)$ – произвольная бесконечно малая величина более высокого порядка, чем α: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\circ(\alpha)}{\alpha} = 0$.

$$\lim_{C\to\infty} M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x,C) = \lim_{C\to\infty}\left(C\cdot\left(1+\frac{s}{C}\cdot\sum_i p_i\cdot x_i+\circ\left(\frac{1}{C}\right)\right)^{\frac{1}{s}} - C\right) =$$

$$= \lim_{C\to\infty}\left(C\cdot\left(1+\frac{1}{C}\cdot\sum_i p_i\cdot x_i+\circ\left(\frac{1}{C}\right)\right)-C\right)=\sum_i p_i\cdot x_i = M(x),$$

что и требовалось доказать.

IV. При значении порядка $s\in[0;1)$ моральное ожидание строго меньше математического: $M_r^{(s)}(x,C)<M(x)$, при $s=1$ – равно математическому: $M_r^{(s)}(x,C)=M(x)$, а при $s\in(1;+\infty)$ моральное ожидание строго больше математического: $M_r^{(s)}(x,C)<M(x)$.

Доказательство: Согласно доказанному выше при $s\in[0;1)$ моральное ожидание строго монотонно возрастает с ростом состояния С и его предел при стремлении С к бесконечности равен математическому ожиданию. Значит, при любом конечном значении состояния С должно выполняться неравенство $M_r^{(s)}(x,C)<M(x)$. Для случая $s\in(1;+\infty)$ доказательство аналогично.

V. Моральное ожидание суммы случайной величины и константы $M_r^{(s)}(x+a,C)=M_r^{(s)}(x,C+a)+a$, где а – произвольная вещественная константа. Доказательство:

$$M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{s})}(x+a,C)=\left(\sum_i p_i\cdot(x_i+a+C)^s\right)^{1/s}-C=$$

$$=\left(\sum_i p_i\cdot(x_i+(C+a))^s\right)^{1/s}-(C+a)+a=,$$

$= M_{r}^{(s)}(x, C+a) + a$, что и требовалось доказать.

VI. Моральное ожидание произведения случайной величины на константу $M_{r}^{(s)}(a \cdot x, C) = a \cdot M_{r}^{(s)}\left(x, \frac{C}{a}\right)$, где а – произвольная положительная вещественная константа.

Доказательство:

$$M_{r}^{(s)}(a \cdot x, C) = \left(\sum_i p_i \cdot (a \cdot x_i + C)^s\right)^{1/s} - C =$$

$$= a \cdot \left(\sum_i p_i \cdot \left(x_i + \frac{C}{a}\right)^s\right)^{1/s} - C =$$

$$= a \cdot \left(\left(\sum_i p_i \cdot \left(x_i + \frac{C}{a}\right)^s\right)^{1/s} - \frac{C}{a}\right) = a \cdot M_{r}^{(s)}\left(x, \frac{C}{a}\right),$$

что и требовалось доказать.

VII. Замена одной «большой» игры на множество «маленьких»:

$\lim\limits_{k \to \infty} k \cdot M_{r}^{(s)}\left(\frac{x}{k}, C\right) = M(x)$, где k – натуральное число.

Это свойство является следствием свойств III и VI и означает, что при замене одной игры на k игр, в которых все выигрыши в k раз меньше, и при устремлении k к бесконечности оценка выигрышей в k играх будет стремиться к математическому ожиданию. Поскольку из непрерывности и монотонного возрастания функций полезности рассмотренного класса по теореме Лебега [7, с. 15–16] следует их дифференцируемость (почти всюду), мы можем свойство VII вывести и непосредственно из дифференцируемости функции полезности. Однако свойство следует зафиксировать, поскольку в дальнейшем оно может оказаться полезным при обобщении теории.

Доказательство: В равенстве пункта VI заменим величину а на $\frac{1}{k}$.

Тогда $M_r^{(s)}\left(\frac{x}{k}, C\right) = \frac{1}{k} M_r^{(s)}(x, k \cdot C)$ и

$$k \cdot M_r^{(s)}\left(\frac{x}{k}, C\right) = M_r^{(s)}(x, k \cdot C).$$

При $k \to \infty$ получим:

$$\lim_{k \to \infty} k \cdot M_r^{(s)}\left(\frac{x}{k}, C\right) = \lim_{k \to \infty} M_r^{(s)}(x, k \cdot C) = M(x).$$

Последнее следует из свойства III, так как $k \cdot C \to \infty$.

VIII. Моральное ожидание функции двух случайных величин

$$M_r^{(s)}(f(x,y), C) = M_r^{(s)}\left[M_r^{(s)}\left(f(x,y)\Big|_x, C \right), C \right],$$

где $M_r^{(s)}\left(f(x,y)\Big|_x, C \right)$ – условное моральное ожидание f(x,y) при фиксированном значении x.

Доказательство: Пусть выигрыш является функцией f(x,y) двух случайных величин x и y и известны вероятности $p_{i,j}$ появления всех пар $\left(x_i, y_j\right)$, где $i = 1,2,\cdots,n$, а $j = 1,2,\cdots,m$, а n и m – натуральные числа. Обозначим p_i – вероятность появления значения x_i и $p_{j/i}$ – вероятность появления y_j, при условии, что в паре присутствует x_i. Тогда $p_{i,j} = p_i \cdot p_{j/i}$.

$$M_r^{(s)}(f(x,y),C) = \left[\sum_i \sum_j p_{i,j} \cdot (f(x_i, y_j) + C)^s\right]^{\frac{1}{s}} - C =$$

$$= \left[\sum_i p_i \cdot \sum_j p_{j/i} \cdot (f(x_i, y_j) + C)^s\right]^{\frac{1}{s}} - C =$$

$$= \left[\sum_i p_i \cdot \left(\left[\sum_j p_{j/i} \cdot (f(x_i, y_j) + C)^s\right]^{\frac{1}{s}} - C + C\right)^s\right]^{\frac{1}{s}} - C =$$

$$= \left[\sum_i p_i \cdot \left(M_r^{(s)} \left(f(x,y)\Big|_x , C \right) + C \right)^s \right]^{\frac{1}{s}} - C =$$

$$M_r^{(s)} \left[M_r^{(s)} \left(f(x,y)\Big|_x , C \right), C \right].$$

Следовательно, моральное ожидание функции двух случайных величин равно моральному ожиданию условного морального ожидания при фиксации одной из величин.

Моральное ожидание легко обобщить на случай случайной величины x, распределенной на некотором интервале $[a; b]$. Пусть $\varphi(x)$ – плотность распределения. Тогда

$$M_r^{(s)}(x, C) = \overline{\overline{x}} = \left(\int_a^b \varphi(x) \cdot (x + C)^s dx \right)^{\frac{1}{s}} - C .$$

Изложенные в этом разделе свойства морального ожидания, очевидно, выполняются и в случае непрерывно распределенной случайной величины.

3. Макет морального ожидания и функция полезности

Естественно возникает вопрос: любая ли непрерывная монотонно возрастающая функция f(C) может быть определяющей для морального ожидания?

§ 3.1. Допустимые функции полезности денег

Пусть, например, $f(C) = k \cdot Exp(s \cdot C) + a$, где k, s и a – произвольные вещественные константы. В частности, при соответствующем подборе параметров, эта функция может удовлетворять условиям классической функции полезности.

Тогда для математического ожидания полезности жребия справедливо следующее равенство

$$k \cdot Exp\left[s \cdot \left(\bar{\bar{x}} + C\right)\right] + a = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(k \cdot Exp\left[s \cdot \left(x_i + C\right)\right] + a\right) \text{ или}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{s} \cdot \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot Exp\left(s \cdot x_i\right)\right).$$

Определенная таким образом оценка жребия $\bar{\bar{x}}$ не зависит от состояния, что противоречит нашему представлению об оценке жребия реальными экономическими субъектами. Теперь допустим, что моральное ожидание, порожденное некоторой определяющей функцией f(C), не зависит от C. Допустим также, что существует преобразование Лапласа функции f(C).

Тогда $f\left(t-\left(x_{\max}-\bar{\bar{x}}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot f\left(t-\left(x_{\max}-x_i\right)\right),$

где $t=C+x_{\max}$, $x_{\max}=\max\{x_i\}$.

Пусть $F(s)=L[f(t)]$ – преобразование Лапласа [4, с. 230–238] функции f(t). Рассмотрим преобразование Лапласа левой и правой частей последнего равенства, считая их функциями t. Поскольку в силу сделанного выше предположения $\bar{\bar{x}}$ не зависит от t,

$$Exp\left(-\left(x_{\max}-\bar{\bar{x}}\right)\cdot s\right)\cdot F(s)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot Exp\left(-\left(x_{\max}-x_i\right)\cdot s\right)\cdot F(s).$$

Сокращая левую и правую часть уравнения на общие множители F(s) и $Exp(-x_{\max})$, получим $Exp\left(\bar{\bar{x}}\cdot s\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot Exp\left(x_i\cdot s\right)$, и порожденная функцией f(C) оценка жребия примет вид:

$$\bar{\bar{x}}=\frac{1}{s}\cdot\ln\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot Exp\left(s\cdot x_i\right)\right).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение: оценка жребия не зависит от состояния тогда и только тогда, когда определяющая функция имеет вид $f(C)=k\cdot Exp(s\cdot C)+a$.

Следовательно, для всех иных функций $\bar{\bar{x}}$ зависит от состояния. Приведенный пример подчеркивает необходимость корректного общего определения морального ожидания.

Прежде всего, зададимся вопросом: какой минимальный набор свойств морального ожидания должен выполняться для любой оценки жребия такого рода? Свойства I, II и IV имеют смысл только для степенных определяющих функций. Свойства V и VIII сохраняются при любой определяющей функции. Таким образом, остаются свойства III и VI. Седьмое свойство является их следствием. Теперь дадим новое определение морального ожидания.

<u>Определение 2:</u> Будем считать $f(C)$ функцией полезности денег, если она непрерывна, строго монотонно возрастает и величина

$$M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{f})}(x,C)=f^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot f(x_i+C)\right]-C \tag{5}$$

удовлетворяет условиям:

- $\lim\limits_{C\to\infty} M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{f})}(x,C)=M(x)$;
- $M_r^{(f)}(a\cdot x,C)=a\cdot M_r^{(f)}\left(x,\dfrac{C}{a}\right)$, где a – произвольная положительная вещественная константа.

Если приведенные выше условия выполнены, будем называть величину $M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{f})}(x,C)$ моральным ожиданием, порожденным функцией $f(C)$, а функцию $f(C)$ – определяющей функцией для морального ожидания $M_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{f})}(x,C)$.

Вспомним, что из последнего свойства следует $\lim\limits_{k\to\infty} k\cdot M_r^{(s)}\left(\dfrac{x}{k},C\right)=M(x)$. Следовательно, такое определение отражает ситуации, которые мы наблюдаем в повседневной жизни: когда жребий при большом состоянии или выигрыш в множестве незначительных по отдельности играх оценивают по математическому ожиданию. Фиксация в определении 2 таких свойств морального ожидания имеет принципиальное значение. В соответствии с определением 2 не любая удовлетворяющая условиям (1) функция может быть классической функцией полезности и не любая возрастающая функция может оказаться функцией Фридмена.

Ниже мы применим два подхода к моделированию функций полезности денег.

§ 3.2. Кусочно-степенная функция полезности

Поскольку основные свойства морального ожидания мы сформулировали, отталкиваясь от степенных функций полезности, естественно было бы попытаться в качестве модели функции Фридмена взять кусочно-степенную зависимость. В силу сказанного выше нам достаточно выполнения двух условий из последнего определения морального ожидания. Если считать, что количество степенных функций, использованных нами при построении кусочно-степенной модели конечно, то первое условие выполняется, поскольку при $C \to +\infty$ мы фактически, начиная с некоторого значения С, будем рассматривать моральное ожидание, порожденное конкретной степенной определяющей функцией. Зато второе условие может не выполняться.

<u>Пример:</u>

Пусть $f(C) = \begin{cases} \sqrt{C}, & \text{åñëè} \quad \tilde{N} \le 100 \\ 7{,}5 + 0{,}00025 * C^2, & \text{åñëè} \quad \tilde{N} > 100 \end{cases}$

Легко убедиться, что f(C) – непрерывная и гладкая функция, задающая взаимнооднозначное отображение множества $[0;+\infty)$ на множество $[0;+\infty)$. Ее график изображен на рисунке 2. Таким образом, f(C) и ее первая производная непрерывны в точке C=100. Условие гладкости здесь, конечно, не обязательно.

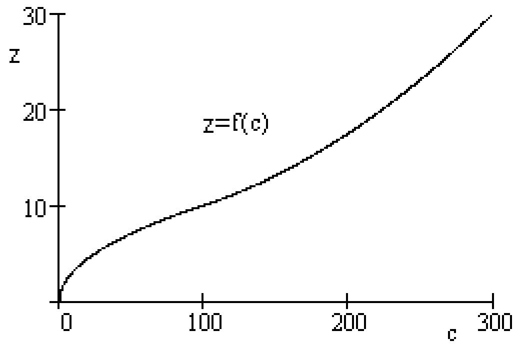

Рис. 2. Кусочно-степенная функция полезности

Возьмем C=100 и случайную величину x, принимающую, как отрицательные, так и положительные значения: $x_i < 0$ при $i = 1,2,\ldots,k$ и $x_i > 0$ при $i = k+1, k+2,\ldots,n$.

Тогда второе из условий (5) не выполняется. Однако для других значений C условие может выполняться. Таким образом, кусочно-степенная функция как определяющая функция для морального ожидания не всегда адекватна экономическому смыслу исследуемых явлений и применять ее следует осторожно.

§ 3.3. Класс функций полезности денег

Заметим, что если $f(C)$ – функция полезности, то функция $k * f(C) + a$, где $k \neq 0$ и а – произвольные вещественные константы, будет функцией полезности, порождающей то же моральное ожидание, что и функция $f(C)$. Иначе говоря, достаточно задать функцию полезности с точностью до параллельного переноса и гомотетии (то есть растяжения) вдоль оси OZ.

Положим, $f(x_1) = z_1$ и $f(x_2) = z_2$, где $x_2 > x_1 > 0$ и $z_2 > z_1 > 0$. Тогда моральному ожиданию любого порядка $s \in [0;+\infty)$ соответствует единственная определяющая функция, график которой проходит через точки с координатами (x_1, z_1) и (x_2, z_2). При C=0, $\rho \in [0;1]$ и двух заданных выше значениях случайной величины x равенство (5) примет вид

$$M_r^{(f)}(x,0) = f^{-1}[(1-\rho) \cdot f(x_1) + \rho \cdot f(x_2)].$$

<u>Определение 3:</u> Макетом морального ожидания, порожденного функцией полезности $f(C)$, будем называть функцию

$$\varphi(\rho) = f^{-1}[(1-\rho) \cdot z_1 + \rho \cdot z_2]. \qquad (6)$$

Поскольку функция полезности строго монотонно возрастает, функция $\varphi(\rho)$ также должна строго монотонно возрастать с ростом ρ. При этом $\varphi(0) = x_1$, а $\varphi(1) = x_2$. По макету морального ожидания легко восстановить исходную функцию полезности. Действительно,

$f(\varphi(\rho)) = (1-\rho)\cdot f(x_1) + \rho\cdot f(x_2) = (1-\rho)\cdot z_1 + \rho\cdot z_2$ и функцию $z = f(C)$ можно задать в параметрической форме:

$$\begin{cases} C = \varphi(\rho) \\ z = (1-\rho)\cdot z_1 + \rho\cdot z_2 \end{cases}, \text{ где можно считать } \rho \in [0;+\infty) \qquad (7)$$

Обозначим макет морального ожидания порядка s как $\varphi^{(s)}(\rho) = \left[(1-\rho)\cdot x_1^s + \rho\cdot x_2^s\right]^{1/s}$. Теперь дополним множество макетов порядка s всеми возможными их средними.

Например, величина $\varphi(\rho) = \left[0{,}2\cdot\left[\varphi^{(s)}(\rho)\right]^{-2} + 0{,}8\cdot\left[\varphi^{(r)}(\rho)\right]^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$, где $s, r \in [0;+\infty)$ и $s < r$, при любом ρ будет принадлежать интервалу $\left(\varphi^{(s)}(\rho), \varphi^{(r)}(\rho)\right)$. На плоскости через каждую точку открытого прямоугольника, ограниченного линиями ρ=0, ρ=1, $x=x_1$ и $x=x_2$, проходит график единственной функции семейства $C=\varphi^{(s)}(\rho)$. Графики полученных из макетов порядка s и r средних расположены в полосе между графиками $C=\varphi^{(s)}(\rho)$ и $C=\varphi^{(r)}(\rho)$, но могут пересекать графики функций исходного семейства. Функции $\varphi(\rho)$ можно создавать и как средние более сложного вида. Например,

$$\varphi(\rho)=\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(s)\cdot\left[\varphi^{(s)}(\rho)\right]^{r}\cdot ds\right]^{1/r}, \quad \text{где} \quad \psi(s)\geq 0,$$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(s)\cdot ds=1$ и $r\in(-\infty;+\infty)$. Наконец, средние макеты, полученные из средних, а также путем всевозможных предельных переходов по последовательностям средних, также будут макетами. Таким образом, отталкиваясь от макетов порядка s, мы можем получить довольно широкий класс макетов.

Любой средней моральных ожиданий случайной величины однозначно соответствует такая же средняя величина макета. Средняя величина любого порядка $r\in(-\infty;+\infty)$ моральных ожиданий сохраняет свойства морального ожидания и, таким образом, также является моральным ожиданием. Определяющую функцию полезности для такого морального ожидания можно восстановить по макету. Эта функция может иметь как участки выпуклости вверх, так и участки выпуклости вниз. Однако исследование участков выпуклости построенных таким образом функций выходит за рамки задач данной работы.

Возникает вопрос о возможности обобщения рассмотренной теории на функции полезности других, помимо денег, благ. И все же такое обобщение преждевременно без серьезного теоретического обоснования.

Заключение

Таким образом,

- Условий (1) не достаточно для корректного определения классической функции полезности, а также не любая функция, удовлетворяющая первому из условий (1), может быть функцией Фридмена.
- Функция полезности должна порождать моральное ожидание, удовлетворяющее свойствам, зафиксированным в определении 2.
- Мы можем, отталкиваясь от исходного класса показательных функций, строить модели функций полезности с различными участками выпуклости.

Биографические справки

1) Бентам Джереми (1748–1832) – английский философ, социолог, юрист. Изучал юриспруденцию в Оксфорде. Частные, индивидуальные интересы рассматривал, как единственно реальные, а общественные, как их совокупность. В основе этики Бентама лежит «принцип пользы». Польза состоит в удовлетворении частных интересов людей.

2) Бернулли Даниил (1700–1782) – швейцарский математик. Учился в Гейдельберге и Страсбурге. После защиты диссертации «О дыхании» в 1720 г. стал лиценциатом медицины. С 1725 по 1733 годы работал в Петербургской Академии наук сначала на кафедре физиологии, затем математики. В 1733 г. уехал в Базель, где возглавлял кафедры анатомии и ботаники, психологии (1743 г.) и физики (1750–1777 гг.). Был членом всех главных европейских научных обществ, существовавших в те дни. Внес важный вклад в развитие механики, гидродинамики, статистики и теории вероятностей.

3) Вебер Эрнст (1795–1876) – немецкий анатом и психофизиолог. Основные работы посвящены изучению чувствительности. Обосновал подчиненность психических явлений числу и мере, положил начало психофизике и экспериментальной психологии.

4) Визер Фридрих (1851–1926) – представитель австрийской школы в политической экономии. С 1903 года профессор политэкономии в Венском университете. Впервые ввел термин «предельная полезность». Пытался

опровергнуть марксистскую теорию трудовой стоимости и прибавочной стоимости. Создал теорию вмещения, согласно которой каждому из трех факторов производства – труду, земле и капиталу – вменяется определенная часть ценности созданного ими продукта. Выдвинул теорию денег, определяя их ценность в зависимости от соотношения денежных и реальных доходов.

5) Госсен Герман Генрих (1810–1858) – немецкий экономист, предшественник математической и австрийской школ в политической экономии. Математически обосновал основные принципы теории предельной полезности. Важнейшие экономические процессы пытался объяснить с позиции идей максимума полезности.

6) Джевонс Уильям (1835–1882) – английский экономист, статистик. Профессор логики и политической экономии в Манчестере (1866–1876) и Лондоне (1876–1880). Основатель математической школы в политической экономии. Один из основоположников теории предельной полезности. Работал над развитием идей Дж. Буля в математической логике.

7) Лаплас Пьер Симон (1749–1827) – выдающийся французский математик, астроном и физик. Автор фундаментальных работ по дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и небесной механике. Активно участвовал в реорганизации системы высшего образования во Франции. Пытался объяснить физиологические, психические и социальные явления, исходя из принципов механистического детерминизма.

8) Маршалл Альфред (1842–1924) – английский экономист. В 1865 г. окончил Кембриджский университет, преподавал математику в Кембридже, с 1885 по 1908 годы – профессор политической экономии. Основатель Кембриджской школы политической экономии. Развил теорию, согласно которой рыночная ценность товара определяется равновесием предельной полезности товара и предельных издержек на его производство. Графический вариант данного положения – «крест Маршалла». Ввел в экономическую теорию категории «эластичность спроса» и «излишек потребителя». Пытался распространить учение Ч. Дарвина на область общественных отношений. В своих работах широко использовал математические и графические методы анализа.

9) Сэвидж Леонард Джимми (1917–1971) – американский математик и статистик. Окончил университет Мичигана. Доктор философии (1941). В 1954 году опубликовал монографию «Основания статистики», в которой развил статистический метод принятия решений. Математически обосновал понятия «полезность», принцип максимизации ожидаемой полезности.

10) Фехнер Густав Теодор (1801–1887) – немецкий физик и философ. С 1834 по 1840 годы профессор физики Лейпцигского университета. Один из основоположников экспериментальной психологии.

11) Фон Нейман Джон (1903–1957) – венгро-американский математик. Внес значительный вклад в ряд разделов математики, физики, информатики и экономики.

Применил аппарат теории вероятностей к исследованию функции полезности набора благ.

12) Фридмен Милтон (1912–2006) – американский экономист. Приверженец монетаризма в политэкономии. Доктор философии (1946) и права (1968). Лауреат Нобелевской премии по экономике 1976 года. Работы Фридмена посвящены вопросам методологии экономической науки, теории и истории денег, денежной политики.

Список литературы

1. *Белый Е. К.* О классе допустимых функций полезности денег // Учен. зап. Петрозаводского гос. ун-та. Сер. Общественные и гуманитарные науки. № 5 (98). 2009. С. 83–89.
2. *Бернулли Д.* Опыт новой теории измерения жребия // Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 11–27.
3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976. 352 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.
5. *Малыхин В. И.* Финансовая математика. М.: Юнити, 2002. 248 с.
6. *Маршалл А.* Принципы экономической науки. М.: Прогресс, 1993. Т. I. 416 с.
7. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 592 с.
8. *Фридмен М., Сэвидж Л. Дж.* Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск // Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 208–249.

Учебное издание

Белый Евгений Константинович

Математические модели функции полезности денег

Учебное пособие

Редактор *Л. М. Колясева*
Компьютерная верстка *Е. К. Белого*

Подписано к печати 07.12.09. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Изд. № 231.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33