ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЕ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

Казахстанский филиал
Направление 01.03.01 «Математика»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

«Оптимизация односекторной экономики с учетом внешних инвестиций в модели Рамсея»

Студент(ка):

Сагдатов Альмухаммед Болатович

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент

Заплетин Максим Петрович

Допустить к защите:

____

(подпись научного руководителя)

«____» мая 2020 г.

Нур-Султан
2020

Содержание

1 Введение

Множесво работ рассказывают о управлении односекторной экономики, в которых описываются задачи оптимального управления. Для дальнейшего исследование таких задач предлагается учесть какие-либо случайные возмущение во время производства.

Будем рассматривать производственную функцию Кобба - Дугласа $F(K(t)) = AK^{\alpha}(t)$, где $K(t)$ - основной капитал, A - масштаб темпа производства, α - коэффициенты эластичности по основным фондам.

В представленной работе изучается задача об оптимальном управлении односекторной экономикой при случайном изменении фондовооруженности труда. Максимум среднего значения непроизводственного потребления отбираться как критерии оптимальности в назначенном промежутке времени. Метод динамического программирования используется для решения задачи.

1.1 Терминология

Односекторная экономическая модель. В этой экономической модели процессы описываются больше всего в объединенном виде. В ней не предоставляются отдельные подразделения,секторы, отрасли. Односекторная экономическая модель — это экономико-математическая модель, хозяйство которого производит один продукт. Часть идет на приумножение основных фондов, часть идет на потребление. Противопоставлением такой модели является многосекторная (или многоотраслевая) модель, в которой хозяйство делится на несколько подразделении, секторов.

Коэффициент эластичности - мера,которая описывает чувствительность одной переменной к росту или падению в цене другой, которая указывает на сколько процентов упадет или возрастет один показатель при изменении второго на один процент.

Технологический коэффициент - совокупность обстоятельств, причин, которые воздействуют на производство продукции(затраты на труд и капитал не учитываются.

Ставка дисконтирования — это процентная ставка, которая используется для пересчёта будущих потоков доходов в единую величину текущей стоимости.

Детерминированные задачи — задачи, при которых считается, что каждая выбираемая руководителем стратегия приводит к единственному, заранее известному результату. В таких задачах критерием для выбора стратегии является полезность (иначе говоря, выбирается та стратегия, которая гарантирует лучший результат).

Валовой внутренний продукт - это общая рыночная стоимость всех готовых товаров и услуг, произведённых на территории страны в течение года.

Производственная функция — экономико-математическая количественная зависимость между количеством продукции и факторами производства.

Капиталовооруженность, используемая в производственном процессе, компании - это отношение капитала к труду. Способ производства влияет на данную величину. Наиболее дешевый вид производства является более предпочтительным . Таким образом, при возрастании заработной платы рабочих сравнительно стоимости используемого основного капитала, капиталовооруженность имеет склонность к повышению. Поскольку в большинстве отраслей производства в краткосрочной перспективе проще изменять количество затрачиваемого труда, а не объем основного капитала, фактические показатели капиталовооруженности испытывают в ходе экономического цикла колебания, возрастая в периоды экономических спадов и снижаясь во время экономических подъемов.

Непроизводственное потребление - конечное потребление благ населением для удовлетворения жизненных потребностей.

Коэффициент амортизации - коэффициент равный отношению суммы начисленной амортизации к первоначальной стоимости основных средств. Показывает, насколько изношены основные средства, то есть в какой мере финансирована их возможная будущая замена по мере амортизации.

Норма дисконта выражает ту норму прибыли, которую фирма могла бы получить отказавшись от одних капиталовложений, в пользу других. Величина является затратами в основной капитал. С экономической точки зрения норма дисконта является нормой прибыли. Прибыль инвестор получает от инвестиций подобного содержания и степени риска. Таким образом, это ожидаемая инвестором норма прибыли.

Коэффициент амортизации - это коэффициент, который вычисляется как, отношение суммы начисленной амортизации к начальной стоимости основных средств.

1.2 О задаче

При рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов,в экономике естественным образом возникают проблемы оптимального управления. Чаще всего такие задачи соотносят с исследованием развитие экономического роста. Особую форму имеют задачи оптимального экономического роста максимальной функциональности. Представляется это в виде несобственного интеграла, который содержит коэффициент дисконтирования в экспоненте.

В 1920-х годах, в рамках классического вариационного исчисления, английский математик Ф. Рамси исследовал экономическую модель которая была близка к задаче оптимального управления подобного вида. Модель Рамсея оказала большое воздействие на создание новой идеи стабильного развития в экономике. Она послужила прототипом для последующих многочисленных моделей оптимального экономического роста. В середине двадцатого века сильный толчок развитию такого направления в конце пятидесятых годов в экономике дал Л.С. Понтрягин. Его открытие по знаменитому принципу максимума Понтрягина оказалось изначально создана для решения задач оптимального управления техническими системами, которая имеет понятную экономическую интерпретацию. Эффективным аналитическим инструментом для изучения подобных систем многих экономических моделей оптимального динамического распределение ресурсов является принцип максимума Понтрягина.

2 Постановка задачи

2.1 Детерменированная задача

$$c(T) = \int_0^T e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt \to max$$

$$\dot{k} = uF - (\mu - g)k \tag{1}$$

$$\dot{c} = \delta c + (1-u)F \tag{2}$$

$$k(0) = k_0$$

$$c(0) = 0$$

- $c(t) = \frac{C}{L}$ - непроизводственное потребление
- $k(t) = \frac{K}{L}$ - фондовооруженность труда
- $F(k)$ - производственная функция (валовый продукт, произведенным за единицу времени).
- δ - норма дисконтирования $\delta \leq 0$
- uF - доля произведенного продукта, что используется для увеличение основных фондов
- μ – коэффициент амортизации $\mu \leq 0$
- $g(t)k(t) = \frac{G}{L}$ - внешние инвестиции
- $(1-u)F$ - доля произведенного продукта, что используется для увеличение непроизводственного потребления.

Управляющим параметр - это u. Коэффициент u удовлетворяет условию:

$$0 \leq u \leq 1 \tag{3}$$

$[0, T]$ отрезок времени известен и достаточно большой. Эта задача решается при помощи принципа максимума Понтрягина[4].

2.2 Стохастическая задача

$$M(c(T)) = M\left(\int_0^T e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt\right) \to max$$

Капитал-трудовое соотношение представим виде уравнения

$$\dot{k} = uF - (\mu - g)k + \sigma k\zeta(t), \quad k(0) = k_0 \tag{4}$$

Здесь мы учитываем случайные возмущения во время призводства.

- $\zeta(t) = \frac{\partial w(t)}{\partial t}$ - белый гауссовский шум, $w(t)$ - винеровский процесс.
- σ - коэффициент волатильности.

3 Решение стохастической задачи

Используем производственную функцию Кобба–Дугласа: $F(k) = Ak^{\alpha}$

- $K(t)$ - основной капитал
- A - масштаб темпа производства
- α, β - соответствующие коэффициенты эластичности

Запишем уравнение и функцию Беллмана:

$$-\frac{\partial s}{\partial t} = \max_{u}\left(\frac{ds}{dk}(uF(k) - (\mu - g)k) + \right.$$
$$\left. + e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 s_{kk}\right) \quad (5)$$

$$s(k; t, T) = \max_{0 \le u \le 1} M\left(\int_t^T e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)dt\right)$$
$$k(t) = k$$

u^* - управление, которое является оптимальным, на отрезке $[t, T]$. Воспользуемся методом динамического программирование.

При решении такого уравнения мы получим решение задачи которая была поставлена. k не является случайным процессом. k рассматриваем как аргумент функции $s(k; t, T)$.

Если решить детерминированную задачу при помощи динамического программирования, то получаем следующее уравнение:

$$-\frac{\partial s}{\partial t} = \max_{u}\left(\frac{ds}{dk}(uF(k) - (\mu - g)k) + e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k)\right)$$

Ввиду того что когда задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина и динамического программирования, решения равносильны. Решение полученное с помощью принципа максимума Понтрягина уравнение (6) при $\sigma = 0$ соответствует решению [4]. Это решение состоит из трех частей. Отрезок $[0, T]$ точками t_1 и t_2 $(0 < t_1 < t_2 < T)$ разбивается на три интервала: $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$. На отрезке$[t_1, t_2]$ $k = k_{oc} = const$:

$$k_{oc}^{\beta} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu} \tag{6}$$

$$u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})} \tag{7}$$

$\beta = 1 - \alpha$. Считаем, что $k(0) < k_{oc}$ и на интервале $[0, t_1]$, $u = 1$. На отрезке $[t_2, T]$ $u = 0$. В результате, для детерминированной задачи строение оптимального управления имеет вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < t_1 \\ u_{oc} & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t_2 < t < T \end{cases} \quad (8)$$

Решение задачи сводится к тому что, нужно найти моменты t_1 и t_2. Допустим, что при решении стохастической задачи строение оптимального управления ,с учетом того что коэффициенты достаточно малы, имеет похожий вид. Так что решение стохастической задачи практически приводится к поиску оптимальных моментов t_1 и t_2. Моменты t_1 и t_2 находятся при решении уравнения (6).

$$\left(\frac{ds}{dk}(uF(k) - (\mu - g)k) + e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 s_{kk} \right)'_u = 0$$

$$\frac{ds}{dk} = e^{\delta(T-t)}$$

Максимум правой части уравнения (6) по u с учетом того что $0 \leq u \leq 1$ достигается при

$$u(t) = \begin{cases} 1 & s_k > e^{\delta(T-t)} \\ u_{oc} & s_k = e^{\delta(T-t)} \\ 0 & s_k < e^{\delta(T-t)} \end{cases} \qquad (9)$$

4 Решение уравнение Беллмана

Решаем уравнения (5) на отрезке $[t_2, T]$. Введем функции Беллмана $s_1(k; t, T)$, $s_2(k; t,$ соответствующие моментам t, интервалам $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, T]$. На отрезке $[t_2, T]$ $u = 0$. Запишем уравнение (6):

$$-\frac{ds_3(k;t,T)}{dt} = \frac{ds_3(k;t,T)}{dk}(uF(k) - (\mu - g)k) + \\ + e^{\delta(T-t)}(1-u)F(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 s_{3kk}(k;,t,T) \quad (10)$$

Решение ищем в виде:

$$s_3(k; t, T) = F(k)w_3(t, T) \quad (11)$$

где $w_3(t, T)$ - искомая функция. Подставляя (11) в (10), получаем

$$-F(k)\dot{w}_3 = (-\mu + gk)kF'(k)w_3 + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 F''(k)w_3 + F(k)e^{\delta(T-t)}$$

Сократим на $F(k)$:

$$w_3(t, T) = -\vartheta w_3(t, T) + e^{\delta}(T - t) \quad (12)$$

$$w_3(T, T) = 0$$

где $\vartheta = \alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha\beta\sigma^2 - \alpha g$.

Решение уравнения (12) состоит из общего однородного и частного неоднородного:

$$w_3 = C_1 e^{\vartheta t} + C_2 e^{-\delta t} \quad (13)$$

Находим C_2 подставновкой частного решение в (12), и C_1 из начального условия $w_3(T,T)=0$: $C_1=-\frac{e^{-\vartheta T}}{\delta+\mu}$

$$w_3=\frac{e^{\delta(T-t)}-e^{-\vartheta(T-t)}}{\delta+\vartheta} \tag{14}$$

Согаласно (9) на интервале $[t_1,t_2]$ должно выполняться условие

$$\frac{\partial s_2(k;t,T)}{\partial k}=e^{\delta(T-t)} \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 s_2(k;t,T)}{\partial k^2}=0 \tag{16}$$

Из принципа оптимальности Белммана следует , что

$$s_2(k;t,T)=s_2(k;t,t_2)+s_3(k(t_2);t_2,T)$$

Поэтому из (6) получаем

$$\frac{\partial s_2(k;t,t_2)}{\partial t}=(-\mu k+gk)\frac{\partial s_2(k;t,t_2)}{\partial k}+e^{\delta(T-t)}F(k)$$
$$s_2(k;t_2,t_2)=0 \tag{17}$$

Решение уравнения (17) ищем в виде:

$$s_2=D(k)e^{\delta(T-t)+C} \tag{18}$$

где $D(k)$ - функция, которую мы ищем, C - константа. Подставляем (16) в (15):

$$\delta D(k)e^{\delta(T-t)}=D'(k)(-\mu k+gk)e^{\delta(T-t)}+F(k)e^{\delta(T-t)}$$

Сокращая на $e^{\delta(T-t)}$

$$(\mu - g)kD'(k) + \delta D(k) = F(k) \tag{19}$$

(19) - диффур первого порядка с независимым аргументом k Его решение состоит из общего решение однородного и частного решение неоднородного уравнения

$$D(k) = C_3 k^{-\frac{\delta}{\mu-g}} + \frac{Ak^{\alpha}}{\alpha\mu + \delta} \tag{20}$$

Константа находится из условия из (16) из условия $D'(k) = 1$. В результате имеем

$$D'(k) = -\frac{\delta}{(\mu-g)k} C_3 k^{-\frac{\delta}{\mu-g}} + \frac{\alpha A k^{\alpha-1}}{\alpha(\mu-g)+\delta} = 1$$

$$C_3 = \left(1 - \frac{\alpha A k^{\alpha-1}}{\alpha(\mu-g)+\delta}\right) k^{\frac{\delta}{\mu-g}} \left(-\frac{\mu-g}{\delta}\right) k$$

Подставляя константу в (20):

$$D(k) = \frac{F(k) - k(\mu-g)}{\delta} \tag{21}$$

Продифференцируем (21) по k:

$$\frac{g - \mu + \alpha A k^{\alpha-1}}{\delta}$$

Учитывая то что $D(k)_k^{'} = 1$. Выразим k, получим $k_{oc}^{\beta} = \frac{aA}{\delta+\mu}$. u_{oc} выражается из условия $\dot{k} = uF - (\mu - g)k$, так как $k_{oc} = const$. Из этого следует, в детерминированном и стохастическом случаях свойства магистрали совпадают. Константа C находится из условия $s_2(k; t2, t2) = 0$.

Из (18):

$$C = -D(k(t_2)e^{\delta(T-t_2)}$$

В результате получается:

$$s_2(k;t,t_2) = \frac{F - k(\mu - g)}{\delta}\left(e^{\delta(T-t)} - e^{\delta(T-t_2)}\right)$$

5 Выбор оптимального параметра t_2

Из полученных выше результатов следует что, при $t < t_2$

$$s_2 = D(k)(e^{\delta(T-t)} - e^{\delta(T-t_2)})$$

где

$$Q = \frac{F(k_2)}{\delta + \vartheta}$$

брать его так, чтобы функция достигла максимума. Вычислим производную

$$\frac{\partial s_2}{\partial t_2} = D(k)\delta e^{\delta(T-t_2)} - Q(\delta e^{\delta(T-t_2))} + \vartheta e^{\delta(T-t_2)} = 0$$

отсюда

$$e^{-(\delta+\vartheta)(T-t_2)} = \frac{\delta(H-Q)}{\vartheta Q} \tag{22}$$

$$T - t_2 = \frac{1}{\delta+\vartheta} ln\left(\frac{\vartheta Q}{\delta(H-Q)}\right) \tag{23}$$

6 Выход на магистраль

В отрезке $[0, t_1]$; $u = 1$. Отсюда следует что непроизводственное потребление $c(t_1) = 0$. $t < t_1$ $s_1(k; t, t_1) \equiv 0$ и $s_1(k; t,) = s_2(k(t_1); t_1,)$. Так как $s_1(k; t, t_1) \equiv 0$, то продифференцировав функцию дважды по k, эта функция равна нулю. Следовательно уравнение (5) принимает вид:

$$\frac{ds_1(k;t;t_1)}{dt} = \frac{ds_1(k;t;t_1)}{dk}(F(k) - (\mu - g)k)$$

$$s_1(k; t_1, t_1) = 0$$

Используем метод характеристик. Отсюда следует, что k отвечает требованию ($\dot{k} = uF - (\mu - g)k$), на $[t_0, t)$, удовлетворяющей начальному условию $k(t_0) = k_0$ решение имеет имеет вид:

$$k^\beta(t) = \frac{A}{\mu}(1 - e^{\beta\mu(t-t_0)}) + k_0^\beta e^{-\beta\mu(t-t_0)} \tag{24}$$

используем условие $k(t_1) = k$, определим t_1:

$$t_1 = \frac{1}{\mu\beta}\left(\ln \frac{A - \mu k_0^\beta}{A - \mu k_{oc}^\beta}\right) \tag{25}$$

7 Максимальное среднее значение непроизводственного потребления

На отрезке $[0, T]$ равно

$$\begin{aligned} s(k_0; 0, T) &= s_2(k(t_1); t_1, t_2) + s_3(k(t_2); t_2, T) = \\ &= \frac{F(k(t_1)) - k(t_1)(\mu - g)}{\delta}(e^{\delta(T-t_1)} - e^{\delta(T-t_2)}) + \\ &+ \frac{F(k_{oc}(t_2))}{\delta + \nu}(e^{\delta(T-t_2)} - e^{-\nu(T-t_1)}) \qquad (26) \end{aligned}$$

$$k_{oc}^{\beta} = \frac{aA}{\delta + \mu}, \quad u_{oc} = \frac{\mu k_{oc}}{F(k_{oc})}$$

В частности, получается

$$k = k(t_1) = k(t_2) = k_{oc}$$

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \nu} \ln \frac{\nu(\delta + \mu)}{(\delta + \beta\mu)\nu - \alpha\mu\delta} \qquad (27)$$

Посмотрим на поведение функционала (26) с ростом σ или параметра $\vartheta = \alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha\beta\sigma^2 - \alpha g$. Из (27) следует, что при увеличении ν расстояние промежутка $[t_2, T]$ стремится к нулю. Такая величина $\frac{F(k_{oc})}{\delta+\nu}$ тоже стремится к нулю. В конечном итоге получаем, что с ростом параметра ν функционал (26) стремится к величине:

$$s(k_0; 0, T) = \frac{F(k_{oc}) - k_{oc}(\mu - g)}{\delta}(e^{\delta(T-t_1)} - 1)$$

Рис. 1: капиталовооруженность труда,которая меняется во времени, при различных значениях коэффициента σ.

Рис. 2: непроизводственное потребление,которое менятеся во времени, при различных значениях коэффициента волатильности. Эта величина убывает с ростом σ.

Таким образом, у решения детерминированной и стохастической задач строение управления совпадают и определяются значениями моментов t_1 и t_2. При этом стохастическая часть воздействует только на момент времени t_2. Увеличение коэффициента σприводит к уменьшению среднего значения непроизводственного потребления.

На рисунках приведены результаты численного моделирование при следующих значениях параметров:

$$k_{oc} = 7,\ T = 6,\ \mu = 0.2, \alpha = 0.6,\ k_0 = 10,\ A = 2,\ t_1 = 0.8$$

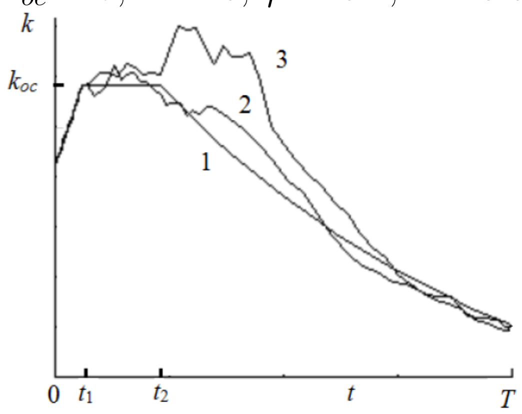

Рис.1. Изменение фондовооруженности труда (кривая *1* соответствует σ = 0; кривая *2* – σ = 0,1; кривая *3* – σ = 0,2)

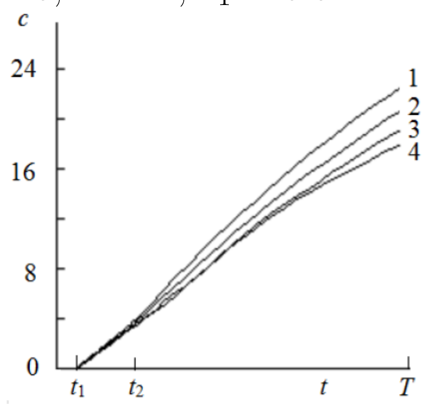

Рис. 2. Изменение непроизводственного потребления (кривая *1* соответствует σ = 0; кривая *2* – σ = 0,1; кривая *3* – σ = 0,2, кривая *4* – σ = 0,3)

8 Заключение

На основе изученной литературы был проведен анализ односекторной экономики в модели Рамсея. Была использована производственная функция Кобба-Дугласа. Она позволяет отражать технологическое соотношение объема труда и капитала, необходимое для производства того или иного товара в необходимом количестве. В работе составлена задача оптимального управление. Для решения задачи был предложен метод динамического программирование.

Результатом стала общая структура оптимального управления, максимальное среднее непроизводственное потребление и найдены численные решение для конкретных примеров. При увеличении коэфицента волатильности $\sigma = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3$ среднее значение непроизводственного потребление убывает.

9 Литература

1. Эрроу К. Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. М. : Мир, 1974. 745 с.

2. Соловьев В.И. Стохастические методы в экономике и финансах. М. : Гос. ун-т управления, 2000. 154 с.

3. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М. : Сов. радио, 1976. 184 с.

4. Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю. Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислитель-ная техника и информатика. 2011. № 4 (17). С. 5–15.