

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ,  
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

«Разработка робастного алгоритма управления с  
антивиндап-коррекцией для мобильных киберфизических систем»

Автор Каханов М. А. \_\_\_\_\_  
(Фамилия, Имя, Отчество) (подпись)

Направление подготовки (специальность) 27.04.03  
\_\_\_\_\_  
(код, наименование)

Квалификация магистр  
\_\_\_\_\_  
(бакалавр, магистр)

Руководитель ВКР Пыркин А. А., профессор, д.т.н. \_\_\_\_\_  
(Фамилия, И., О., ученое звание, степень) (подпись)

**К защите допустить**

Руководитель ОП Пыркин А. А., профессор, д.т.н. \_\_\_\_\_  
(Фамилия, И., О., ученое звание, степень) (подпись)

“ ” 20 19 г.

Санкт-Петербург, 2019 г.

Студент                     Кажанов М. А.                     Группа           R4234           Факультет           СУиР            
(Фамилия, И. О.)

Направленность (профиль), специализация           Системный анализ и управление,            
          Управление мобильными киберфизическими системами          

Консультант(ы):

а)                     Борисов О. И., нет звания, к.т.н.                     \_\_\_\_\_  
(Фамилия, И., О., ученое звание, степень) (подпись)

б) \_\_\_\_\_  
(Фамилия, И., О., ученое звание, степень) (подпись)

ВКР принята “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_\_ 19 \_\_\_\_\_ г.

Оригинальность ВКР \_\_\_\_\_ %

ВКР выполнена с оценкой \_\_\_\_\_

Дата защиты “ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_\_ 19 \_\_\_\_\_ г.

Секретарь ГЭК \_\_\_\_\_  
(ФИО) (подпись)

Листов хранения \_\_\_\_\_

Демонстрационных материалов/Чертежей хранения \_\_\_\_\_

# Содержание

<b>Введение</b>	.....	4
<b>1 Обзор информационных источников</b>	.....	6
1.1 <b>Мобильные киберфизические системы</b>	.....	6
1.2 <b>Открытые проблемы</b>	.....	8
1.3 <b>Обобщенная постановка задачи</b>	.....	12
<b>2 Разработка робастного алгоритма управления</b>	.....	15
2.1 <b>Синтез номинального регулятора</b>	.....	15
2.2 <b>Анализ устойчивости в условиях наличия неучтённой динамики</b>	...	18
2.3 <b>Обеспечение гарантированного быстродействия не менее заданного</b>		22
2.4 <b>Идентификация номинальных параметров модели</b>	.....	28
2.5 <b>Компенсация детерминированного внешнего возмущения</b>	.....	30
2.6 <b>Антивиндап-коррекция при ограничениях на входные сигналы</b>	....	34
<b>3 Применение алгоритма к киберфизическим системам</b>	.....	35
3.1 <b>Морские киберфизические системы</b>	.....	35
3.2 <b>Промышленные киберфизические системы</b>	.....	51
3.3 <b>Транспортные киберфизические системы</b>	.....	55
<b>Заключение</b>	.....	59
<b>Список использованных источников</b>	.....	60

					<b>ФСЧИР.101.4234.001 ПЗ</b>				
Изм.	Лист	№ докum.	Подп.	Дата	Разработка робастного алгоритма управления с антивиндап-коррекцией для мобильных киберфизических систем пояснительная записка	Лит.	Лист	Листов	
Разраб.	Каканов М.А.			15.05.2019		д		3	6
Пров.	Пыркин А.А.								
Н.контр.	Быстров С.В.								
Утв.	Пыркин А.А.								
					Университет ИТМО ФСЧИР, гр. R4234				

## Введение

В прикладных исследованиях теории управления в последнее время большой интерес представляет класс киберфизических систем. Такие системы используют вычислительные и коммуникационные алгоритмы, глубоко внедренные в физические процессы и тесно взаимодействующие с ними, что позволяет эффективно расширять возможности физических систем [1]. Они состоят из множества «умных» устройств, связанных между собой в единую сеть и способных самостоятельно адаптироваться к внешним изменениям без вмешательства человека.

Существует множество областей применения мобильных киберфизических систем, включая, например, производство и транспорт. В рамках транспортных мобильных киберфизических систем можно рассматривать наводные суда и беспилотные летательные аппараты (например, квадрокоптеры). Эти объекты представляют собой многомерные механические системы, на которые оказывают влияние внешние возмущающие воздействия (например, ветровой снос, волновая качка, течение). Стоит отметить, что параметры таких объектов часто неизвестны или известны частично, в силу чего замкнутая система с разработанным регулятором должна характеризоваться свойством робастности по отношению к параметрической неопределенности.

При разработке алгоритмов управления киберфизическими системами, необходимо принимать во внимание ограничения аппаратных возможностей реальных технических систем. Исполнительные устройства, которые обрабатывают сигнал управления в физическом мире, всегда ограничены по уровню входного сигнала. Общие примеры таких пределов: пределы отклонения в

					ФСУИР.101.4.234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		4

приводах воздушных судов; пределы напряжения тока в электрических приводах; пределы пропускной способности и скорости в гидравлических приводах. Несмотря на то, что такие пределы ограничивают в основном производительность системы, частью которой они являются, их необходимо учитывать надлежащим образом, иначе возможно возникновение непредвиденного поведения системы. Например, насыщение управляющих сигналов при наличии интегральной компоненты в структуре регулятора приводит к появлению эффекта интегрального насыщения (integral windup), вследствие чего в системе могут увеличиться время переходного процесса, значение перерегулирования, а также могут появиться автоколебания и даже потеря устойчивости [2].

					ФСЧИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		5

## 1 Обзор информационных источников

В настоящем разделе представлена краткая информация о мобильных киберфизических системах и областях их применений. Рассмотрены открытые проблемы в вопросах управления такими системами. На основе полученной информации была сформулирована обобщенная постановка задачи, решению которой посвящены последующие главы диссертации.

### 1.1 Мобильные киберфизические системы

Стремительные цифровизация, автоматизация, проникновение электроники и программного обеспечения во все аспекты нашей жизни привело к зарождению новой концепции в разработке и исследовании сложных систем, которая носит название «киберфизические системы» (CPS). Этот термин был введен в Соединенных Штатах в 2006 году. Раннее определение CPS: «Такие системы используют вычисления и коммуникации, глубоко внедренные в физические процессы и взаимодействующие с ними, чтобы добавить новые возможности физическим системам» [3].

Становится все труднее идентифицировать системы, которые не являются киберфизическими. Эта концепция по своей сути является междисциплинарной и мультитехнологичной и применима в совершенно разных областях, что имеет множество социально-технических последствий.

#### 1.1.1 Транспортные киберфизические системы

Транспортные системы имеют прямое отношение к междоменной интеграции. Транспортные услуги требуют координации процессов в таких секторах, как логистика, автомобильный и железнодорожный транспорт. На коор-

					ФСУИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		6

динацию влияют как соответствующие транспортные средства с такими различиями, как скорость, пропускная способность, стоимость и управление, так и инфраструктурные компоненты (например, дороги и коммуникации).

Поскольку логистика является неотъемлемой частью производственных и общественных процессов, процесс перехода от мобильности в плане снабжения к мобильности в плане услуги ускоряется. Современные мобильные решения будут все больше фокусироваться на высокоавтоматизированных видах транспорта, удовлетворяя потребность в индивидуальном транспорте без необходимости в личном транспортном средстве. Концепция автоматизированных, управляемых и подключенных транспортных средств необходима не только для удовлетворения возросшего спроса на мобильность, но и для решения дополнительных социальных задач, связанных с повышением безопасности, эффективности, безопасности, удобства и экономии [4].

Важным фактором является требование по адаптации транспортных услуг к стареющему населению: качество, надежность, безопасность, доступность для людей с ограниченной мобильностью и безопасность необходимы для удовлетворения этого требования на общественном транспорте.

### 1.1.2 Промышленные киберфизические системы

Область промышленности и процессы производства, представляющие главную социально-экономическую силу, сильно характеризуются использованием технологий CPS. Производство включает в себя CPS с различными типами технических аспектов, от 3D-сканеров/принтеров до облачного производства. Повышенное внимание к интеграции и открытости информационных технологий означает, что безопасность, как сквозное свойство, становится все

					ФСЧИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		7

более важной. Промышленность была предшественником в автоматизации с решениями, перенесенными в другие области, например, от промышленной робототехники до автономных транспортных средств. Массовая кастомизация в настоящее время стимулирует разработку более гибких и эффективных производственных систем [5].

Передовые промышленные компании уже внедрили интеграцию жизненного цикла, отслеживая реальные рабочие данные до разработки и производства. Эта тенденция, вероятно, продолжится. Производство как домен также в некоторой степени интегрировано с другими доменами, в первую очередь с транспортом для логистики, предоставляя междоменные решения. Возможности возникают из аддитивного (и распределенного) производства, а также из новых бизнес-моделей, включающих открытые инновации, прокладывая путь к гибким, настраиваемым схемам распределенного производства.

На уровне общества важно серьезно относиться к устойчивости. Так, можно упомянуть, что около 14% от общего количества 2652 миллионов тонн отходов, которые были произведены в странах ЕС-27 в 2008 году, приходилось на производство [6].

Технологии CPS предоставляют решения, которые могут помочь в решении вопросов устойчивости, например, модульные архитектуры для облегчения повторного использования и переработки.

## 1.2 Открытые проблемы

Киберфизические системы представляют собой мультиагентные системы, где каждая система представляет собой многоканальный объект управления. Условия функционирования технических систем в реальном физическом

					ФСЧИР.101.4.234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		8



мире часто характеризуется:

- **наличием параметрических и сигнальных неопределенностей:** параметры объекта могут быть не известны или известны не точно; на практике в ряде случаев измерению в явном виде доступна лишь часть компонент вектора состояний, кроме того использование дополнительных датчиков может быть не целесообразно,
- **наличием влияния внешних возмущающих воздействий,**
- **наличием аппаратных ограничений на входные воздействия,**
- **наличием неучтенной асимптотически устойчивой динамики:** на практике при разработке систем управления инженера пренебрегают динамикой малоинерционных звеньев, т.к. их динамика достаточно быстрая и асимптотически устойчива.

Рассмотрим существующие подходы к управлению такими системами.

### 1.2.1 Управление в условиях параметрических и сигнальных неопределенностей

Параметры моделей реальных технических объектов, как правило, заданы в некотором приближении. Это связано в том числе и с тем, что условия функционирования системы могут меняться, в вследствие чего меняются физические параметры материалов из которых состоит система. Кроме того, параметрическая неопределенность может включать в себя изменение массы элементов системы или же центра масс, что происходит при изменении полезной нагрузки.

Алгоритмы сильной обратной связи является мощными, зарекомендовавшими себя в последние 10 лет подходами робастного управления, включая

					ФСЧИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		9

синтез наблюдателей [7—9]. Они позволяют обеспечить инвариантность по отношению к параметрической неопределенности. Такие методы менее требовательны в отношении априорных данных о системе, что может существенно упростить процесс разработки регулятора.

Кроме того, на практике часто возникают задачи управления, когда вектор состояний системы доступен измерению частично или недоступен вовсе. Также внедрение в систему дополнительных измерительных устройств не всегда является целесообразным, т.к. динамическая модель такого устройства может значительно усложнить процесс синтеза регулятора. Для решения таких задач необходимо обеспечить наблюдение за сигналом выходной переменной и оценки требуемых состояний.

В случае когда известны номинальные параметры объекта управления для настройки регулятора может применяться инструментарий линейных матричных неравенств [10; 11]. На основе кандидат функций Ляпунова, можно задавать условия разрешимости линейного матричного неравенства, которые также позволяют обеспечить требуемые показатели качества.

Метод робастного управления по выходу «последовательный компенсатор» предложенный впервые [12] хорошо себя зарекомендовал в решении поставленных задач [13—15].

### 1.2.2 Управление в условиях влияния внешних возмущающих воздействий

Компенсация внешних возмущающих воздействий является фундаментальной задачей современной теории управления. Очевидным является факт, что все реальные системы являются открытыми. На них влияет множество

					ФСУИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		10

внешних факторов, немногими из которых можно пренебречь.

В качестве наглядного примера можно привести надводное водоизмещающее судно. Качество управления судном существенно зависит от внешних сил, таких как: ветровой снос, волновая качка, течение. Если сила ветра и его направление могут быть измерены явно, то волновую качку и течение на текущий момент измерить нельзя.

Общепринятыми подходами к компенсации возмущений является использование интегральных регуляторов, повышение у системы порядка астатизма или же встраивание известной модели возмущающего воздействия. Но необходимо учитывать, что применение таких подходов ограничивается классом измеряемых, ограниченных возмущений или же известной модели возмущения.

### 1.2.3 Управление в условиях насыщения входных сигналов

Системы управления разрабатываются чаще всего линейно. Объект управления рассматривают линейным или проводят его локальную линеаризацию. Современная теория линейного управления предоставляет эффективные техники и методы вычисления законов управления, гарантирующих как устойчивость, так и надежную производительность замкнутой системы. Но как правило, эти техники и методы явно не учитывают ограничения на управляющие воздействия. В этом случае, насыщение управления может привести к появлению нежелательных точек равновесия и предельных циклов или привести к расходящимся траекториям в системе.

Для решения озвученной проблемы может быть применяться антивиндап модификация, предложенная в [16]. Также техники антивиндап-коррекции

					ФСЧИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		11

представлены рядом научных работ [2; 17—20].

Как правило, разработка регулятора для системы с ограничениями на входные сигналы выполняется в два этапа:

- а) Разрабатывается номинальный регулятор без учета ограничений на управляющие сигналы для достижения требуемых показателей качества в замкнутой системе.
- б) Интегрируется контур антивиндап-коррекции, который обрабатывает ограничения на входные сигналы и корректирует управляющий сигнал генерируемый номинальным регулятором.

Такой двухэтапный подход даёт ряд преимуществ. Разработка номинального регулятора выполняется хорошо известными методами линейного управления. Этот контроллер диктует поведение замкнутого контура, когда сигнал управления не входит в зону насыщения. Контур антивиндап-коррекции, в свою очередь, активируется исключительно в случае насыщения входных сигналов и меняет поведение замкнутой системы, чтобы она была устойчива к возникновению интегрального виндапа.

#### 1.2.4 Управление в условиях влияния неучтенной динамики

### 1.3 Обобщенная постановка задачи

Рассмотрим систему вида:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Rw, \\ y = Cx + Qw, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^m$  — управляющий сигнал,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  — вектор возмущающих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^p$  — вектор выходных переменных,

					ФСЦИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		12

$A, B, C, Q$  — матрицы и векторы соответствующих размерностей.

Вектор возмущающих воздействий рассматривается как линейное состояние системы

$$\dot{w} = S(\varrho)w, \quad (2)$$

где  $\varrho$  — вектор неизвестных параметров,  $S$  — матрица соответствующей размерности.

Управляющий сигнал  $u$  удовлетворяет условию насыщения

$$u = \text{sat}(v) = \begin{cases} u_{max} & \text{при } v \geq u_{max}, \\ u & \text{при } u_{min} < v < u_{max}, \\ u_{min} & \text{при } v \leq u_{min}, \end{cases} \quad (3)$$

$u_{min}$  и  $u_{max}$  — пределы насыщения по входу,  $v$  — управляющий сигнал, генерируемый номинальным линейным регулятором.

**Допущение 1** Объект (1) минимально-фазовый.

**Допущение 2** Векторная относительная степень объекта (1) известна.

**Допущение 3** Пределы насыщения по входу  $u_{min}$  и  $u_{max}$  равны по модулю, но имеют противоположные знаки

$$|u_{min}| = |u_{max}|,$$

$$u_{min} + u_{max} = 0.$$

**Допущение 4** Возмущающее воздействие ограничено  $w \in \mathcal{L}_\infty$ , причем номинальный управляющий сигнал  $u_0$ , необходимый для компенсации та-

кого возмущения в установившемся режиме удовлетворяет неравенству

$$u_{min} \leq |u_0| \leq u_{max}.$$

Целью является разработка такого закона управления  $u$  с использованием измерений только выходной переменной  $y$ , который обеспечивает выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad (4)$$

при ограничениях на входное воздействие (103).

**Задача 1** Рассмотрим одноканальный объект управления, который является частным случаем объекта управления (1) при  $m = p = 1$ . Вектор параметров генератора возмущений  $\rho$  рассматривается известным. Необходимо разработать закон управления  $u$ , обеспечивающий выполнение целевого условия (4), когда измерению доступна только переменная выхода  $y$ .

**Задача 2** Рассмотрим объект управления (1), номинальные параметры которого известны. Вектор параметров генератора возмущений  $\rho$  рассматривается известным. Необходимо обеспечить время переходного процесса  $\tau$  не более заданного

$$\tau \leq \tau^*. \quad (5)$$

## 2 Разработка робастного алгоритма управления

В настоящем разделе представлено решение задач описанных в пункте 1.3. Применение метода «последовательного компенсатора» обеспечивает управление робастное к параметрическим и сигнальным неопределённостям, что соответствует решению задачи 1. При известных номинальных параметрах путём применения инструментария линейных матричных неравенств обеспечивается быстроедействие замкнутой системы не менее заданного, что соответствует решению задачи 2. Рассмотрены алгоритмы идентификации номинальных параметров для применения предложенных законов управления в пункте 2.4. Влияние внешних детерминированных возмущающих воздействий компенсируется за счет интеграции внутренней модели, что рассматривается в пункте 2.5. Случай наличия ограничений на входные сигналы управления и компенсация нежелательного поведения системы путем интеграции контура антивиндап-коррекции рассматривается в пункте 2.6. Анализ устойчивости замкнутой системы в условиях влияния асимптотически устойчивой неучтённой динамики рассматривается в пункте 2.2.

### 2.1 Синтез номинального регулятора

Исходя из предположения о возможности декомпозировать многоканальный объект управления, рассмотрим одноканальный объект в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = c^T x, \end{cases} \quad (6)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^1$  — управляющий сигнал,  $y \in \mathbb{R}^1$  — вектор выходных переменных,  $A, b, c$  — неизвестные матрицы и векторы соответствующих размерностей.

Преобразуем модель объекта для выделения устойчивой нуль динамики:

$$\begin{aligned} \frac{a(s)}{b(s)}y(s) &= u(s), \\ \left( c(s) + \frac{d(s)}{b(s)} \right) y(s) &= u(s), \\ c(s)y(s) &= u(s) - \frac{d(s)}{b(s)}y(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Степени полиномов  $c(s), d(s), b(s)$  соответственно равны  $\rho, n - \rho - 1, n - \rho$ .

Перепишем модель объекта управления (7) как

$$z(s) = \frac{d(s)}{b(s)}y(s), \quad (8)$$

$$y(s) = \frac{1}{c(s)}(u(s) - z(s)). \quad (9)$$

Подсистемы (8) и (9) соответственно эквивалентны моделям в пространстве состояний

$$\dot{z}_1 = \bar{A}_1 z_1 + \bar{b}_1 y, \quad (10)$$

$$z = \bar{c}_1^T z_1, \quad (11)$$

$$\dot{z}_2 = \bar{A}_2 z_2 + \bar{b}_2 (u - z), \quad (12)$$

$$y = \bar{c}_2^T z_2. \quad (13)$$

Подставим выражения (11) в (12) и (13) в (10), после чего получим об-



щую модель

$$\dot{z}_1 = \bar{A}_1 z_1 + \bar{b}_1 \bar{c}_2^T z_2, \quad (14)$$

$$\dot{z}_2 = -b_2 \bar{c}_1^T z_1 + \bar{A}_2 z_2 + \bar{b}_2 u, \quad (15)$$

$$z = \bar{c}_1^T z_1, \quad (16)$$

$$y = \bar{c}_2^T z_2. \quad (17)$$

Перепишем (14)–(17) в виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad (18)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где  $A_{11} = \bar{A}_1$ ,  $A_{12} = \bar{b}_1 \bar{c}_2^T$ ,  $A_{21} = -b_2 \bar{c}_1^T$ ,  $A_{22} = \bar{A}_2$  и может быть выбрана во фробениусовой форме, что обеспечивает следующий вид векторов:  $b_2 = \bar{b}_2 = [0 \dots 0 \ b_0]$ ,  $c_2^T = \bar{c}_2^T = [1 \ 0 \dots 0]$ .

На основе векторно-матричной модификации метода «последовательного компенсатора» выберем закон управления:

$$u = -\kappa(c_k^T \xi + y), \quad (20)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \quad (21)$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

где  $\kappa > 0$  матрица  $A_q$  и векторы  $b_q, c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где  $\sigma > 0$  и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (21),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) — коэффициенты произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \dots + k_2 s + k_1.$$

Предложенный регулятор обеспечивает устойчивость замкнутой системы при наличии сигнальной и параметрической неопределенности. Настройка регулятора выполняется за счет произвольного варьирования параметров  $\sigma$  и  $\kappa$ . Что является достаточно комфортным для реализации расчетных алгоритмов. В следующем подразделе рассматривается вопрос настройки регулятора с целью обеспечения гарантированного быстродействия не менее заданного.

## 2.2 Анализ устойчивости в условиях наличия неучтённой динамики

Рассмотрим объект управления (14)–(17):

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \bar{u}, \quad (23)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

при наличии асимптотически устойчивой неучтенной динамики:

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \mu^{-1}(A_{33}z_3 + b_3u), \\ \bar{u} &= c_3^T z_3, \end{aligned} \tag{24}$$

где  $A_{33}$  — гурвицева матрица,  $\mu$  — это маленькое число, которое определяет скорость сходимости.

Выберем закон управления (20)–(21):

$$\begin{aligned} u &= -\kappa(c_q^T \xi + y), \\ \dot{\xi} &= A_q \xi + b_q y. \end{aligned} \tag{25}$$

Запишем замкнутую систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 c_3^T & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \kappa b_3 c_2^T & \mu^{-1} A_{33} & -\mu^{-1} \kappa b_3 c_q^T \\ 0 & b_q c_2^T & 0 & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \xi \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Проведем процедуру перехода к новому координатному базису:

$$\chi = z_2 - \xi$$

и вычислим производную:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \dot{z}_2 - \dot{\xi} \\ &= A_{21} z_1 + \underbrace{(A_{22} - A_q + b_q c_2^T)}_{I_0} z_2 + b_2 c_3^T z_3 + A_q \chi. \end{aligned}$$

Перепишем замкнутую систему (26) с учетом новой переменной  $\chi$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 c_3^T & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \kappa b_3 \bar{c}^T & \mu^{-1} A_{33} & \mu^{-1} \kappa b_3 c_q^T \\ A_{21} & A_{22} - I_0 & b_2 c_3^T & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \chi \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Выберем вторую замену:

$$\rho = z_3 + \kappa c_3 \underbrace{(c_q^T + c_2^T)}_{\bar{c}^T} z_2$$

и вычислим производную:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \dot{z}_3 + \kappa c_3 \bar{c}^T \dot{z}_2 \\ &= -\mu^{-1} \kappa b_3 \bar{c}^T z_2 + \mu^{-1} A_{33} (\rho - \kappa c_3 \bar{c}^T z_2) + \mu^{-1} \kappa b_3 c_q^T \chi \\ &\quad + \kappa c_3 \bar{c}^T (A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + b_2 c_3^T (\rho - \kappa c_3 \bar{c}^T z_2)) \\ &= \underbrace{(-\mu^{-1} \kappa b_3 \bar{c}^T - \mu^{-1} A_{33} \kappa c_3 \bar{c}^T)}_{-\mu^{-1} \underbrace{(b_3 + A_{33} c_3)}_0 \kappa \bar{c}^T} z_2 \\ &\quad + \kappa c_3 \bar{c}^T A_{21} z_1 + (\kappa c_3 \bar{c}^T (A_{22} - \underbrace{\kappa b_2 c_3^T c_3}_{1} \bar{c}^T)) z_2 \\ &\quad + (\mu^{-1} A_{33} + \kappa c_3 \bar{c}^T b_2 c_3^T) \rho + \mu^{-1} \kappa b_3 c_q^T \chi. \end{aligned}$$

Перепишем замкнутую систему (27) с учетом новой переменной  $\rho$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{\rho} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 \bar{c}^T & b_2 c_3^T & 0 \\ \kappa c_3 \bar{c}^T A_{21} & \kappa c_3 \bar{c}^T (A_{22} - \kappa b_2 \bar{c}^T) & \mu^{-1} A_{33} + \kappa c_3 \bar{c}^T b_2 c_3^T & \mu^{-1} \kappa b_3 c_q^T \\ A_{21} & A_{22} - I_0 - \kappa b_2 \bar{c}^T & b_2 c_3^T & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \rho \\ \chi \end{bmatrix}. \quad (28)$$

В результате двух замен координат мы получили замкнутую систему

такого вида, что Гурвицевость всей матрицы состояний представлена в явном виде. Все диагональные блоки, начиная от  $A_{11}$  до матрицы состояний целиком, устойчивы засчет коэффициентов  $\mu, \kappa, \sigma$ .

Первый блок

$$\mathbf{A}_1 := A_{11}$$

Гурвицев в силу Допущения 1. Второй блок

$$\mathbf{A}_2 := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 \bar{c}^T \end{bmatrix}$$

Гурвицев засчет выбора достаточно большого значения коэффициента усиления  $\kappa$ . Обратим внимание, что  $\kappa$  присутствует только в элементе (2, 2) матрицы состояний, тогда как другие элементы от него не зависят. Таким образом, его увеличение сдвигается все собственные значения блока влево от мнимой оси.

Третий блок:

$$\mathbf{A}_3 := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \kappa b_2 \bar{c}^T & b_2 c_3^T \\ \kappa c_3 \bar{c}^T A_{21} & \kappa c_3 \bar{c}^T (A_{22} - \kappa b_2 \bar{c}^T) & \mu^{-1} A_{33} + \kappa c_3 \bar{c}^T b_2 c_3^T \end{bmatrix}$$

Гурвицев из-за малого значения  $\mu$ , умноженного на устойчивую матрицу  $A_{33}$ . Аналогичные рассуждения применимы ко всей матрицы состояний  $\mathbf{A}_4$  в целом. Параметр  $\sigma$ , присутствующий только на позиции (3, 3), можно выбрать так, что все собственные значения будут размещены в левой части комплексной плоскости. В результате матрица состояний замкнутой системы является гурвицевой.

### 2.3 Обеспечение гарантированного быстродействия не менее заданного

Введём дополнительно допущение о номинальных параметрах объекта:

**Допущение 5** Номинальные параметры объекта (6) известны, в этом случае матрица  $A$  и вектора  $b$  и  $c$  рассматриваются в виде

$$A = A_0 + \Delta A, \quad b = b_0 + \Delta b, \quad c^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

где  $A_0$  и  $b_0$  — известные номинальные параметры,  $\Delta A$  и  $\Delta b$  — ограниченная параметрическая неопределенность.

Мы можем использовать степень устойчивости  $\alpha$ , для обеспечения быстродействия не менее заданного, т.к. она связана с временем переходного процесса  $\tau$  соотношением [21; 22]:

$$\tau^* \approx \frac{1}{\alpha^*} \ln \frac{1}{\Delta^*},$$

где  $\Delta^*$  — относительная погрешность. При  $\Delta^* = 0,05$  имеем

$$\tau^* \approx \frac{3}{\alpha^*},$$

откуда выразим

$$\alpha^* \approx \frac{3}{\tau^*}. \tag{29}$$

**Замечание 1 ()** Задача обеспечения времени переходного процесса не более заданного (5) эквивалентна задаче обеспечения степени устойчивости не менее рассчитанного с помощью (29)

$$\alpha \geq \alpha^*. \tag{30}$$

Объединяя объект (6) с законом управления (20), (21) получим модель замкнутой системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bc^T & -bc_k^T \\ b_q c^T & A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Введем новую переменную

$$\chi = \iota c^T x - \xi,$$

где  $\iota = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ , и вычислим ее производную:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \iota c^T \dot{x} - \dot{\xi} = \\ &= \iota c^T (A - b(1 + c_k^T \iota) c^T) x + (\iota c^T b c_k^T + A_q) \chi. \end{aligned}$$

Перепишем модель замкнутой системы (31) с использованием новой переменной  $\chi$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - b(1 + c_k^T \iota) c^T & b c_k^T \\ \iota c^T (A - b(1 + c_k^T \iota) c^T) & \iota c^T b c_k^T + A_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \chi \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Запишем систему (32) в компактном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (33)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (34)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A - b(1 + c_k^T \iota) c^T & b c_k^T \\ \iota c^T (A - b(1 + c_k^T \iota) c^T) & \iota c^T b c_k^T + A_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \chi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С учетом Допущения 5 (33) примет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}, \quad (35)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 - b_0(1 + c_k^T \iota)c^T & b_0 c_k^T \\ \iota c^T (A_0 - b_0(1 + c_k^T \iota)c^T) & \iota c^T b_0 c_k^T + A_q \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta A - \Delta b(1 + c_k^T \iota)c^T & \Delta b c_k^T \\ \iota c^T (\Delta A - \Delta b(1 + c_k^T \iota)c^T) & \iota c^T \Delta b c_k^T \end{bmatrix}.$$

Выполним параметризацию матрицы  $\mathbf{A}_0$  модели (35):

$$\mathbf{A}_0 = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T, \quad (36)$$

где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_0 - b_0 c^T & 0 \\ \iota c^T (A_0 - b_0 c^T) & A_q \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \iota c^T b_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}}^T = \begin{bmatrix} -\iota c^T & I \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Примем  $\Delta\mathbf{A} = 0$ , тогда для стабилизации объекта со степенью устойчивости не менее заданной  $\alpha^*$  (30) достаточно существование положительно определенной симметрической матрицы  $P = P^T > 0$ , удовлетворяющей матричному неравенству Ляпунова:

$$\mathbf{A}_0^T P + P\mathbf{A}_0 + 2\alpha^* P < 0, \quad (38)$$

Подставим (36) в (38), получим:

$$(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T)^T P + P(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T) + 2\alpha^* P < 0, \quad (39)$$

$$\bar{\mathbf{A}}^T P + \bar{\mathbf{c}}c_k \bar{\mathbf{b}}^T P + P\bar{\mathbf{A}} + P\bar{\mathbf{b}}c_k^T \bar{\mathbf{c}}^T + 2\alpha^* P < 0, \quad (40)$$

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата
------	------	----------	-------	------



Перепишем (40) в канонической форме:

$$M + N^T c_k L + L^T c_k^T N < 0, \quad (41)$$

где  $M = \bar{\mathbf{A}}^T P + P \bar{\mathbf{A}} + 2\alpha^* P$ ,  $N = \bar{\mathbf{c}}^T$ ,  $L = \bar{\mathbf{b}}^T P$ .

Неравенство (41) разрешимо при выполнении следующих условий

$$W_N^T M W_N < 0, \quad (42)$$

$$W_L^T M W_L < 0, \quad (43)$$

где столбцы матриц  $W_N$  и  $W_L$  образуют базисы ядер матриц  $N$  и  $L$ , соответственно.

Заметим, что

$$W_L = P^{-1} W_{\bar{\mathbf{b}}^T} = R W_{\bar{\mathbf{b}}^T}, \quad (44)$$

где  $R > 0$ , столбцы матрицы  $W_{\bar{\mathbf{b}}^T}$  образуют базис ядра  $\bar{\mathbf{b}}^T$ .

С учетом (44) условие разрешимости (43) линейного матричного неравенства (41) можно переписать следующим образом:

$$W_{\bar{\mathbf{b}}^T}^T (R \bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{A}} R + 2\alpha^* R) W_{\bar{\mathbf{b}}^T} < 0. \quad (45)$$

Задача расчета вектора параметров управления  $c_k$  для обеспечения степени устойчивости не менее  $\alpha^*$  сводится к поиску взаимнообратных матриц  $P$

и  $R$ , удовлетворяющих условиям:

$$W_{\bar{c}^T}^T(\bar{\mathbf{A}}^T P + P\bar{\mathbf{A}} + 2\alpha^* P)W_{\bar{c}^T} < 0, \quad (46)$$

$$W_{\bar{b}^T}^T(R\bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{A}}R + 2\alpha^* R)W_{\bar{b}^T} < 0, \quad (47)$$

$$P > 0, \quad R > 0, \quad (48)$$

$$PR = I, \quad (49)$$

где  $W_{\bar{c}^T} = W_N, I$  — единичная матрица.

Проанализируем робастность алгоритма при  $\Delta\mathbf{A} \neq 0$ . Исследуем устойчивость системы (35) с помощью кандидат-функции Ляпунова

$$V = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}, \quad (50)$$

где  $P$  удовлетворяет (46)–(49). Продифференцировав (50), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{x}^T(\mathbf{A}_0^T P + P\mathbf{A}_0)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T(\Delta\mathbf{A}^T P + P\Delta\mathbf{A})\mathbf{x} = \\ &= -2\alpha^* \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T(\Delta\mathbf{A}^T P + P\Delta\mathbf{A})\mathbf{x} \leq \\ &\leq -2\alpha^* \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + 2\|\Delta\mathbf{A}\| \|P\| \mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \\ &\leq -2\alpha^* \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + 2\|\Delta\mathbf{A}\| \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq \\ &\leq -2 \underbrace{\left( \alpha^* - \|\Delta\mathbf{A}\| \frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}} \right)}_{\beta} V, \end{aligned} \quad (51)$$

что при  $\beta > 0$  эквивалентно выполнению неравенства

$$(\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A})^T P + P(\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A}) + 2\beta P < 0. \quad (52)$$

Используя алгоритм поиска взаимнообратных матриц, описанный в работах [23; 24], а также в обзорной статье [25], и определив оптимальное зна-

чение матрицы  $P$ , удовлетворяющее условиям (46)–(49), как функцию от  $A_0$ ,  $b_0$  и  $\alpha^*$ , можем записать, что при

$$\|\Delta A\| < \alpha^* \frac{\lambda_{\min}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}} \quad (53)$$

справедливо

$$\dot{V} \leq -2\beta V,$$

откуда следует экспоненциальная устойчивость системы (35).

Далее запишем

$$V(t) \leq e^{-2\beta t} V(0),$$

откуда с учетом (50) следует

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \sqrt{x^T x} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P\}}} \sqrt{x^T P x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P\}}} \sqrt{V} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}\{P\}}} e^{-\beta t} \sqrt{x^T(0) P x(0)} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}}} e^{-\beta t} \|x(0)\|, \end{aligned}$$

откуда при  $x \in \Delta_r = 0,05 \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\{P\}}{\lambda_{\min}\{P\}}} \|x(0)\|$  обеспечивается время переходного процесса, удовлетворяющее

$$\tau \approx \frac{3}{\beta}. \quad (54)$$

## 2.4 Идентификация номинальных параметров модели

В случае, когда номинальные параметры объекта неизвестны, для применения Допущения 5 параметры могут быть идентифицированы. Для идентификации параметров используя только сигналы входа и выхода без выполнения операций дифференцирования можно воспользоваться градиентным подходом, расширенным фильтром Калмана, а также методом динамически расширения регрессора.

### 2.4.1 Градиентный подход

Рассмотрим квадратичный критерий качества:

$$J(t, \hat{\theta}) = \frac{1}{2}(\psi(t) - \omega^T(t)\hat{\theta}(t))^2. \quad (55)$$

Основная идея градиентного подхода состоит в движении вдоль направления анти-градиента  $\nabla_{\hat{\theta}} J$  минимизируя критерий (55). Тогда алгоритм оценивания будет:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma\omega(t)(\psi(t) - \omega^T(t)\hat{\theta}(t)), \quad (56)$$

где  $\gamma$  — скалярный коэффициент адаптации.

При ограниченном регрессоре алгоритм оценивания (56) обеспечивает асимптотическую сходимость сигнала ошибки к нулю. Тем не менее, этот подход не гарантирует сходимость параметров к истинным значениям параметров. Для обеспечения сходимости к истинным значениям необходимо, чтобы регрессор  $\omega$  удовлетворял условию неисчезающего возбуждения:

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau)\omega(\tau)^T d\tau \geq \gamma I. \quad (57)$$

### 2.4.2 Расширенный фильтр Калмана

Фильтр Калмана широко применяется в задачах управления. Свою популярность он обрёл благодаря своей способности фильтровать шум, прогнозировать и восстанавливать неизмеренные состояния. Метод градиентного спуска (56) модифицируется для улучшения переходных процессов оценщика [26—28].

Алгоритм оценивания рассмотрим в виде:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\hat{\Gamma}\omega(\ddot{\xi} - \omega^T\hat{\theta}), \quad (58)$$

$$\dot{\hat{\Gamma}} = -\hat{\Gamma}\omega\omega^T\hat{\Gamma} + \beta\hat{\Gamma}, \quad (59)$$

$$k_0I \geq \hat{\Gamma}(0) = \hat{\Gamma}(0)^T > 0, \quad (60)$$

где  $\hat{\Gamma}$  — матрица коэффициентов адаптации,  $\beta > 0$  — коэффициент регуляризации,  $k_0 > 0$  — начальное значение матрицы коэффициентов адаптации.

### 2.4.3 Метод динамически расширяемого регрессора

Рассматриваемые выше алгоритмы зависят от выполнения условия неисчезающего возбуждения (57). Это ограничение можно ослабить с помощью метода динамически расширяемого регрессора (DREM), который был предложен в [29; 30].

Введем дополнительные  $m - 1$  линейные  $L_\infty$ -устойчивые операторы задержки  $d_m$ , где  $m$  — размерность регрессора  $\omega$ . Таким образом мы обеспечиваем расширение исходного регрессора (81). В результате получим отфильтрованные сигналы:

$$\omega_{dm}(t) = \omega_m(t - d_m), \quad \ddot{\xi}_{dm}(t) = \ddot{\xi}_m(t - d_m),$$

которые можно скомбинировать:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \omega^T(t) \\ \omega_{d1}^T(t) \\ \omega_{d2}^T(t) \\ \vdots \\ \omega_{d(m-1)}^T(t) \end{bmatrix}, \quad \Xi(t) = \begin{bmatrix} \ddot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}_{d1}(t) \\ \ddot{\xi}_{d2}(t) \\ \vdots \\ \ddot{\xi}_{d(m-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Алгоритм оценки на базе метода динамически расширяемого регрессора рассмотрим в виде:

$$\dot{\hat{\theta}} = K \det\{\Omega\} (\text{adj}\{\Omega\}\Xi - \det\{\Omega\}\hat{\theta}), \quad (61)$$

где  $\Omega$  — расширенный регрессор,  $\Xi$  — расширенный вектор переменных  $\ddot{\xi}$ ,  $K > 0$  — диагональная матрица коэффициентов адаптации.

На основе предложенных подходов к идентификации параметров модели объекта, можно реализовать оценку номинальных параметров. Номинальные параметры позволяют проводить настройку регулятора при помощи инструментария линейных матричных неравенств.

## 2.5 Компенсация детерминированного внешнего возмущения

Для компенсации внешних детерминированных возмущений в закон управления [20](#) и [21](#) необходимо интегрировать внутреннюю модель.

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = Ax + bu + Rv, \quad (62)$$

$$y = c^T x, \quad (63)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^1$  — управляющий сигнал,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  — вектор возмущающих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^1$  — измеряемая выходная переменная,  $A, R, b, c$  — матрицы и векторы соответствующих размерностей.

Вектор возмущающих воздействий  $w$  рассматривается как состояние линейной системы вида

$$\dot{w} = S(\varrho)w, \tag{64}$$

где  $\varrho$  — вектор параметров,  $S$  — матрица соответствующей размерности.

Примем во внимания Допущения **1** и **2** относительно объекта **(62)**, **(63)**, а также дополним их следующими.

**Допущение 6** Вектор  $\varrho$  генератора возмущений **(64)** известен.

Целью является разработка такого закона управления  $u$  с использованием измерений только выходной переменной  $y$ , который обеспечивает выполнение соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

в условиях наличия в канале управления внешних возмущений.

Выполним замену переменных для выделения нуль-динамики системы. Модель объекта **(62)**, **(63)** в форме «вход-выход» имеет вид:

$$y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}u(s) + \frac{r(s)}{a(s)}w(s), \tag{65}$$

где  $b(s)$  — гурвицев полином в силу Допущения **1**.

Выполним следующие преобразования модели (65):

$$\begin{aligned} \frac{a(s)}{b(s)}y(s) &= u(s) + \frac{r(s)}{b(s)}w(s), \\ \left(c(s) + \frac{d(s)}{b(s)}\right)y(s) &= u(s) + \left(r_2(s) + \frac{r_1(s)}{b(s)}\right)w(s), \\ c(s)y(s) &= \left(u(s) - \frac{d(s)}{b(s)}y(s) + \frac{r_1(s)}{b(s)}w(s)\right) + r_2(s)w(s). \end{aligned} \quad (66)$$

Степени полиномов  $d(s)$ ,  $r_2(s)$ ,  $c(s)$ ,  $b(s)$ ,  $r_1(s)$  соответственно равны  $n - \rho - 1$ ,  $n - \rho - 1$ ,  $\rho$ ,  $n - \rho$ ,  $\rho - 1$ .

Перепишем модель объекта управления (66) как

$$\begin{aligned} z(s) &= \frac{d(s)}{b(s)}y(s) - \frac{r_1(s)}{b(s)} \\ y(s) &= \frac{1}{c(s)}(u(s) - z(s)) + \frac{r_2(s)}{c(s)}w(s), \end{aligned}$$

что эквивалентно модели в пространстве состояний

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} w, \quad (67)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & c_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Выделим ключевые свойства системы (67)–(68).

- Матрица  $A_{11}$  гурвицева в силу Допущения 1.
- Матрица  $A_{22}$  может быть выбрана во фробениусовой форме, что обес-



печивает следующий вид векторов  $b_2$  и  $c_2$ :

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Выберем закон управления вида

$$u = -\kappa(c_k^T \xi + y) - \gamma^T \eta, \quad (69)$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \quad (70)$$

$$\dot{\eta} = \Phi \eta + g(\kappa(c_k^T \xi + y) + \gamma^T \eta), \quad (71)$$

где  $\kappa > 0$  матрица  $A_q$  и векторы  $b_q, c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix},$$

где  $\sigma > 0$ , и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (70),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) — коэффициенты произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \dots + k_2 s + k_1,$$

матрица  $\Phi$  — произвольная гурвицева матрица во фробениусовой форме раз-

мерности  $n_w \times n_w$ , векторы  $g^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$  и  $\gamma$  удовлетворяют

$$\lambda\{\Phi + g\gamma^T\} = \lambda\{S\}.$$

## 2.6 Антивиндап-коррекция при ограничениях на входные сигналы

Выберем закон управления вида

$$v = -\kappa(c_k^T \xi + y) - \gamma\eta, \tag{72}$$

$$\dot{\xi} = A_q \xi + b_q y, \tag{73}$$

$$\dot{\eta} = \kappa(c_k^T \xi + y) + \nu \varkappa(v), \tag{74}$$

$$\varkappa(v) = v - \text{sat}(v), \tag{75}$$

где  $\varkappa(v)$  — нелинейный сигнал антивиндап-коррекции,  $\kappa > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\nu > 0$ , матрица  $A_q$  и векторы  $b_q$ ,  $c_k$  имеют вид:

$$A_q = \begin{bmatrix} -q_\rho \sigma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -q_{\rho-1} \sigma^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -q_2 \sigma^{\rho-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_1 \sigma^\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} q_\rho \sigma \\ q_{\rho-1} \sigma^2 \\ \vdots \\ q_2 \sigma^{\rho-1} \\ q_1 \sigma^\rho \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{\rho-1} \\ k_\rho \end{bmatrix},$$

где  $\sigma > 0$  и  $q_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) выбраны из условия гурвицевости системы (73),  $k_i$  ( $i = \overline{1, \rho}$ ) — коэффициенты произвольного гурвицева полинома вида

$$k(s) = k_\rho s^{\rho-1} + \dots + k_2 s + k_1.$$

Интеграция контура антивиндап-коррекции обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость предложенного алгоритма [31].

### 3 Применение алгоритма к киберфизическим системам

В настоящем разделе рассматривается приложение алгоритмов управления рассмотренных в разделе 2 к классу киберфизических систем. В пункте 3.1 решаются задачи управления морскими киберфизическими системами, а именно наводным судном. Решена задача идентификации неизвестных параметров модели наводного судна, с последующим применением этих параметров для синтеза регулятора с целью стабилизации угла крена судна. Также решена задача удержания заданного положения наводным судном. В пункте 3.2 рассматривается применение алгоритмов управления к промышленным киберфизическим системам, где решена задача независимого управления звеньями манипуляционного робота. В качестве примера транспортной киберфизической системы в пункте 3.3 рассматривается задача стабилизации углов крена и тангажа беспилотным летательным аппаратом типа квадрокоптер.

#### 3.1 Морские киберфизические системы

##### 3.1.1 Гиросtabilизация крена наводного судна

Важной проблемой управления в морских условиях является стабилизация волновой качки. Внешних помехи, вызванные волнами и течением, воздействующие на судно, могут вызвать дискомфорт у пассажиров, снизить эффективность работы экипажа, а также повредить груз при перевозке. Устранение этих помех и стабилизация движения крена позволяют не только улучшить бортовые условия, но также упростить задачу слежения за курсом и повысить эффективность использования топлива. Один из подходов к управлению движением в крене надводного судна является в использовании гиросtabilизато-

					ФСУИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		35

ров [32; 33]. Их реализация не вызывает каких-либо дополнительных гидродинамических эффектов, чем и обусловлена привлекательность такого решения.

Рассмотрим модель движения надводного судна в крене с гиросtabilизатором, предложенную [34], в виде:

$$I_v \ddot{\phi} + B_v \dot{\phi} + C_v \phi = \tau_w - nK_g \dot{\alpha} \cos \alpha, \quad (76)$$

$$I_g \ddot{\alpha} + B_g \dot{\alpha} + C_g \sin \alpha = K_g \dot{\phi} \cos \alpha + \tau_p \quad (77)$$

где  $\phi$  — угол крена судна,  $\tau_w$  — момент крена вызванный волновой качкой,  $\alpha$  — угол прецессии,  $\tau_p$  — управляющий прецессионный момент,  $I_v$  — момент инерции судна,  $B_v$  — коэффициент депфирования крена, включающий потенциальные и вязкие эффекты,  $C_v$  — коэффициент восстановления крена,  $I_g$  — инерция вдоль оси прецессии.

Модель является нелинейной, для её линеаризации введем допущение о величине угла  $\alpha$ .

**Допущение 7** Угол прецессии  $\alpha$  достаточно мал, так что выполняется соотношение

$$|\alpha| < 1 \text{ [рад]},$$

тогда

$$\dot{\alpha} \cos \alpha \approx \dot{\alpha},$$

$$\dot{\phi} \cos \alpha \approx \dot{\phi}.$$

С учетом Допущения 7 модель (76)–(77) примет вид:

$$I_v \ddot{\phi} + B_v \dot{\phi} + C_v \phi = \tau_w - nK_g \dot{\alpha}, \quad (78)$$

$$I_g \ddot{\alpha} + B_g \dot{\alpha} + C_g \alpha = K_g \dot{\phi} + \tau_p. \quad (79)$$

Измерению, кроме управляющего момента  $\tau_p$ , доступны сигналы  $\phi$  и  $\alpha$ . Для процедуры идентификации необходимы их первые и вторые производные, но они не доступны. Поэтому, мы вводим произвольный линейный фильтр вида:

$$\xi(s) = \frac{\lambda^k}{(s + \lambda)^k}, \quad (80)$$

где  $\lambda$  — произвольный положительный скаляр,  $k = 2$ . Домножив (78) и (79) на фильтр с обеих сторон получим:

$$\frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} [I_\phi s^2 \phi(s) + B_\phi s \phi(s) + C_\phi \phi(s)] = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} [\tau_w(s) - nK_g s \alpha(s)],$$

$$\frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} [I_\alpha s^2 \alpha(s) + B_\alpha s \alpha(s) + C_\alpha \alpha(s)] = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} [\tau_p(s) + K_g s \phi(s)],$$

что можно представить компактнее:

$$I_\phi s^2 \xi_\phi(s) + B_\phi s \xi_\phi(s) + C_\phi \xi_\phi(s) = \xi_{\tau_w}(s) - nK_g s \xi_\alpha(s),$$

$$I_\alpha s^2 \xi_\alpha(s) + B_\alpha s \xi_\alpha(s) + C_\alpha \xi_\alpha(s) = \xi_{\tau_p}(s) + K_g s \xi_\phi(s),$$

введя новые обозначения:

$$\xi_\phi(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} \phi(s), \quad \xi_\alpha(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} \alpha(s),$$

$$\xi_{\tau_p}(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} \tau_p(s), \quad \xi_{\tau_w}(s) = \frac{\lambda^2}{(s + \lambda)^2} \tau_w(s).$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа и записав в векторно-матричной форме, получим линейную регрессионную модель:

$$\ddot{\psi} = \omega^T \theta, \quad (81)$$

где

$$\psi = \begin{bmatrix} \xi_\phi \\ \xi_\alpha \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_\phi \\ \omega_\alpha \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_\phi \\ \theta_\alpha \end{bmatrix},$$

$$\omega_\phi = \begin{bmatrix} \xi_\phi & \dot{\xi}_\phi & \dot{\xi}_\alpha & \xi_{\tau_w} \end{bmatrix}, \quad \theta_\phi^T = \begin{bmatrix} -\frac{C_\phi}{I_\phi} & -\frac{B_\phi}{I_\phi} & -\frac{nK_g}{I_\phi} & \frac{1}{I_\phi} \end{bmatrix},$$

$$\omega_\alpha = \begin{bmatrix} \xi_\alpha & \dot{\xi}_\alpha & \dot{\xi}_\phi & \xi_{\tau_p} \end{bmatrix}, \quad \theta_\alpha^T = \begin{bmatrix} -\frac{C_\alpha}{I_\alpha} & -\frac{B_\alpha}{I_\alpha} & \frac{K_g}{I_\alpha} & \frac{1}{I_\alpha} \end{bmatrix}.$$

Все сигналы регрессора  $\omega$  модели (81) доступны, кроме момента крена вызванного волновой качкой  $\tau_w$ . Предположим, что процедура идентификации параметров проводится в условиях, где на объект не действует волновая качка  $\tau_w = 0$ .

Для полученной регрессионной модели (81) проведена процедура идентификации при помощи градиентного алгоритма, расширенного фильтра Калмана и метода динамически расширяемого регрессора (DREM). Для проведения моделирования параметры модели были выбраны следующими:

$$I_\phi = 3426300, \quad C_\phi = 2.9634e + 06, \quad B_\phi = 6.3729e + 05,$$

$$I_\alpha = 548000, \quad C_\alpha = 472000, \quad B_\alpha = 337000, \quad K_g = 520600, \quad n = 2.$$

Результаты идентификации представлены для входного сигнала удовлетворяющего условию неисчезающего возбуждения (57)  $\tau_{au_p} = \sin t + \cos t$  на рисунках 2 и 1, а также для ступенчатого сигнала (рис. 4 и 3) с началом в  $t_s = 0,3$  и максимальным значением  $\tau_p(t_f) = 1$ , где  $t_f$  — конечный момент времени.

Сравнение предложенных методов представлено в таблицах 1 и 2. Метод DREM обеспечивает более быструю и гладкую оценку параметров в сравнении с другими рассматриваемыми методами. Градиентный метод и его модификация на основе фильтра Калмана продемонстрировали зависимость от

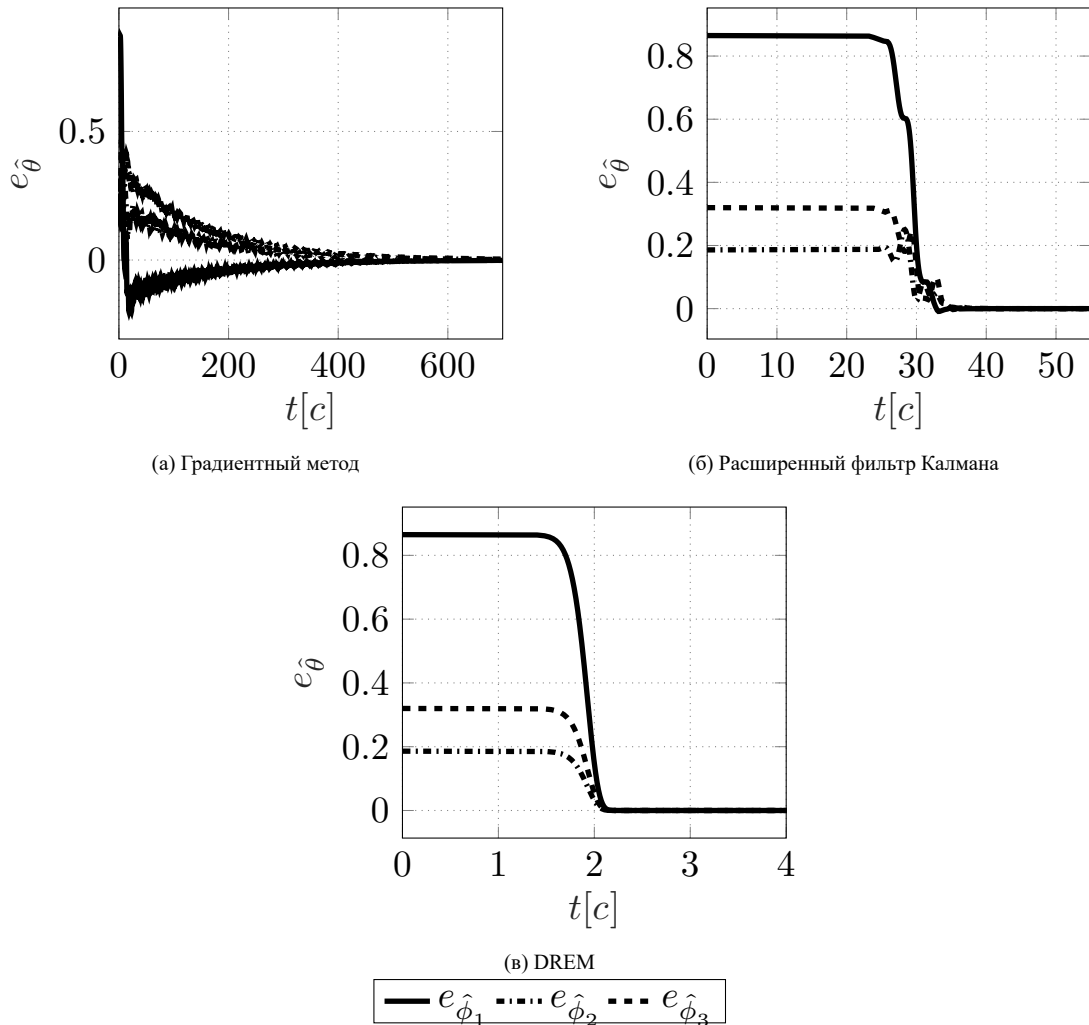
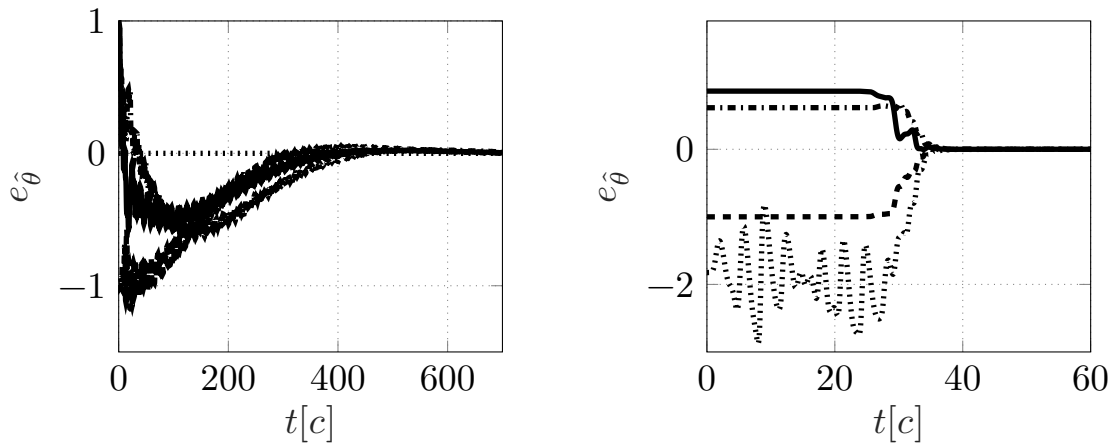


Рисунок 1 — Сигналы ошибки оценки параметров судна при выполнении условия неисчезающего возбуждения

Таблица 1 — Стандартное квадратичное отклонение

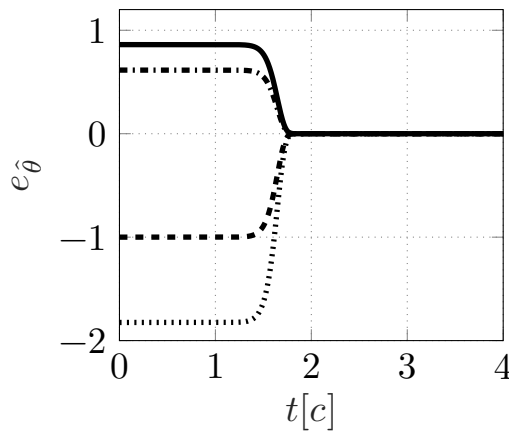
Сигнал	Стандартное квадратичное отклонение		
	Градиентный	Расширенный фильтр Калмана	DREM
$\hat{\theta}_{\phi_1}$	0,3650	0,1113	0,0950
$\hat{\theta}_{\phi_2}$	0,0865	0,0552	0,0204
$\hat{\theta}_{\phi_3}$	0,7043	0,3653	0,1756
$\hat{\theta}_{\alpha_1}$	0,2193	0,4049	0,0499
$\hat{\theta}_{\alpha_2}$	0,2571	0,2991	0,0356
$\hat{\theta}_{\alpha_3}$	0,3646	0,4734	0,0579
$\hat{\theta}_{\alpha_4}$	4,8020e-07	9,6958e-07	1,0563e-07

условия неисчезающего возбуждения.



(а) Градиентный метод

(б) Расширенный фильтр Калмана



(в) DREM

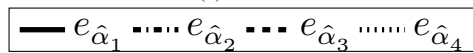
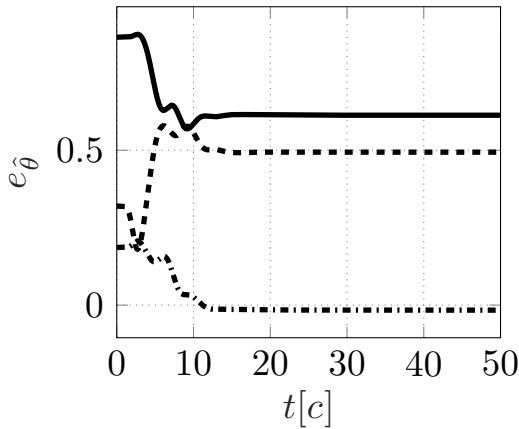


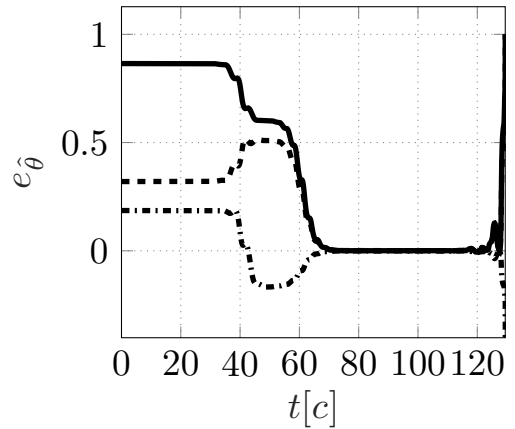
Рисунок 2 — Сигналы ошибки оценки параметров гиросtabilизатора при выполнении условия исчезающего возбуждения

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

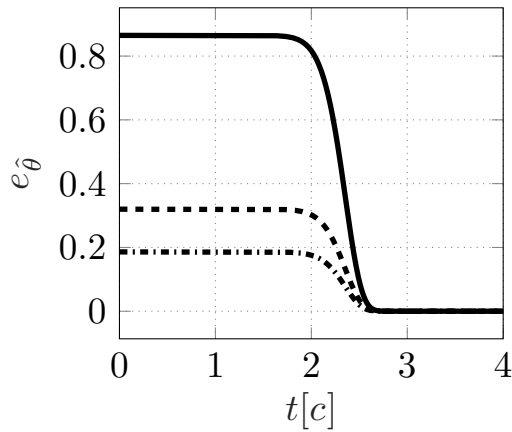




(а) Градиентный метод



(б) Расширенный фильтр Калмана



(в) DREM

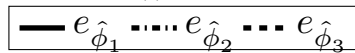
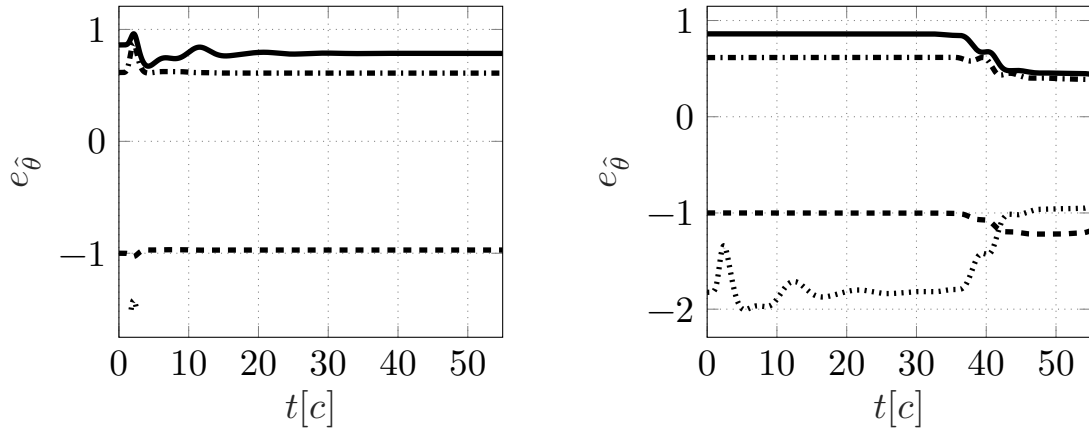
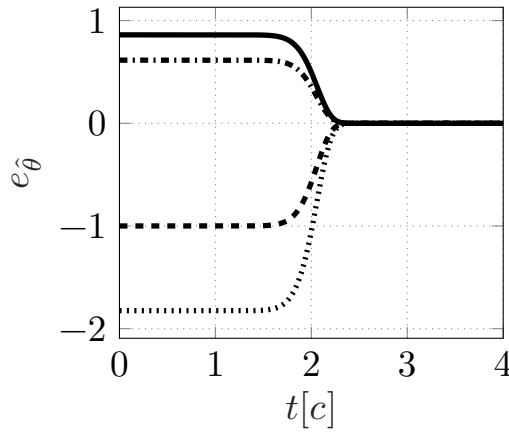


Рисунок 3 — Сигналы ошибки оценки параметров судна, когда условия неисчезающего возбуждения не выполняется



(а) Градиентный метод

(б) Расширенный фильтр Калмана



(в) DREM

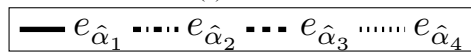


Рисунок 4 — Сигналы ошибки оценки параметров гиросtabilизатора, когда условия исчезающего возбуждения не выполняется

Таблица 2 — Время переходного процесса

Сигнал	Время переходного процесса		
	Градиентный	Расширенный фильтр Калмана	DREM
$\hat{\theta}_{\phi 1}$	242,44	33,79	1,49
$\hat{\theta}_{\phi 2}$	314,03	34,29	1,49
$\hat{\theta}_{\phi 3}$	344,12	35,97	1,49
$\hat{\theta}_{\alpha 1}$	337,44	32,82	1,73
$\hat{\theta}_{\alpha 2}$	415,46	36,01	1,73
$\hat{\theta}_{\alpha 3}$	307,22	34,14	1,73
$\hat{\theta}_{\alpha 4}$	365,34	34,37	1,73

Вернемся к случаю влияния внешних возмущений  $\tau_w \neq 0$ . В [35] предложен вариант моделирования волновой качки в виде:

$$\dot{x}_w = A_w x_w + b_w w, \tag{82}$$

$$\tau_w = c_w^T x_w, \tag{83}$$

где  $w$  — белый шум,  $x_w \in \mathcal{R}$  — состояние генератора возмущений,  $A_w, b_w, c_w$  — матрицы и вектора соответствующих размерностей.

Параметры генератора возмущений выберем:

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,8649 & -0,1918 \end{bmatrix}, \quad b_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1918 \end{bmatrix}, \quad c_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{84}$$

На основе оцененных параметров были выбраны параметры компенсатора:

$$A_q = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_q = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad c_k = \begin{bmatrix} 0 & 18,5242 \end{bmatrix},$$

$$\kappa = 240128,22298601, \quad \nu = 6,4751e - 04.$$

Результаты моделирования представлены на рисунках 5–7.

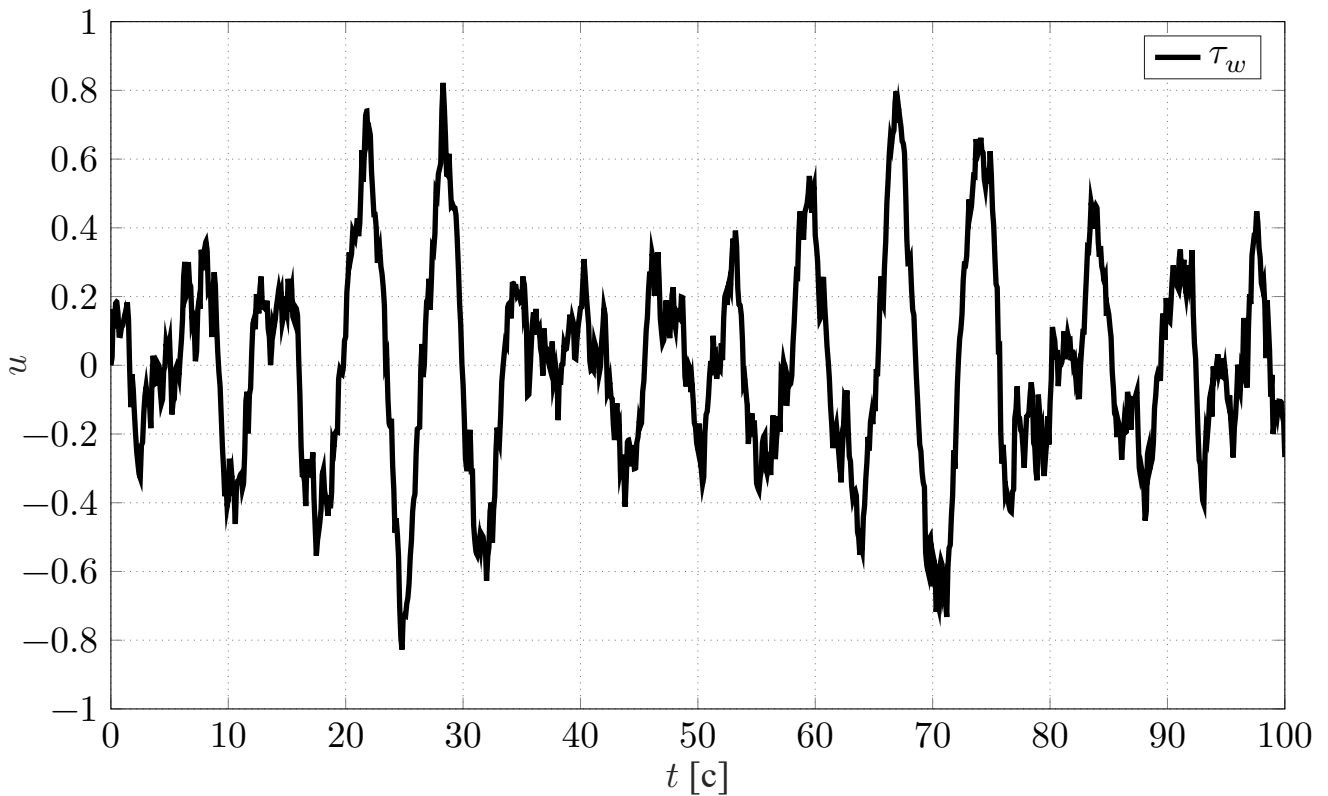


Рисунок 5 — Выходной сигнал генератора возмущений  $\tau_w$

### 3.1.2 Задача удержания заданного положения надводным

По характеру выполняемых работ судна часто должны большую часть времени удерживать заданную позицию (например, суда снабжения, буровые суда и мобильные буровые платформы, суда обеспечения водолазных работ и прочие) или выполнять передвижения из позиции в позицию с высокой точностью (суда-кабелеукладчики, суда-трубоукладчики, суда сейсмической разведки, земснаряды и прочие). Надводное судно является достаточно сложным техническим объектом в смысле управления, в силу больших габаритов, ограничений энергетической установки, а так же неопределенности параметров возмущающих воздействий оказываемых на систему. Система динамического позиционирования должна осуществлять управление движением судна неза-

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

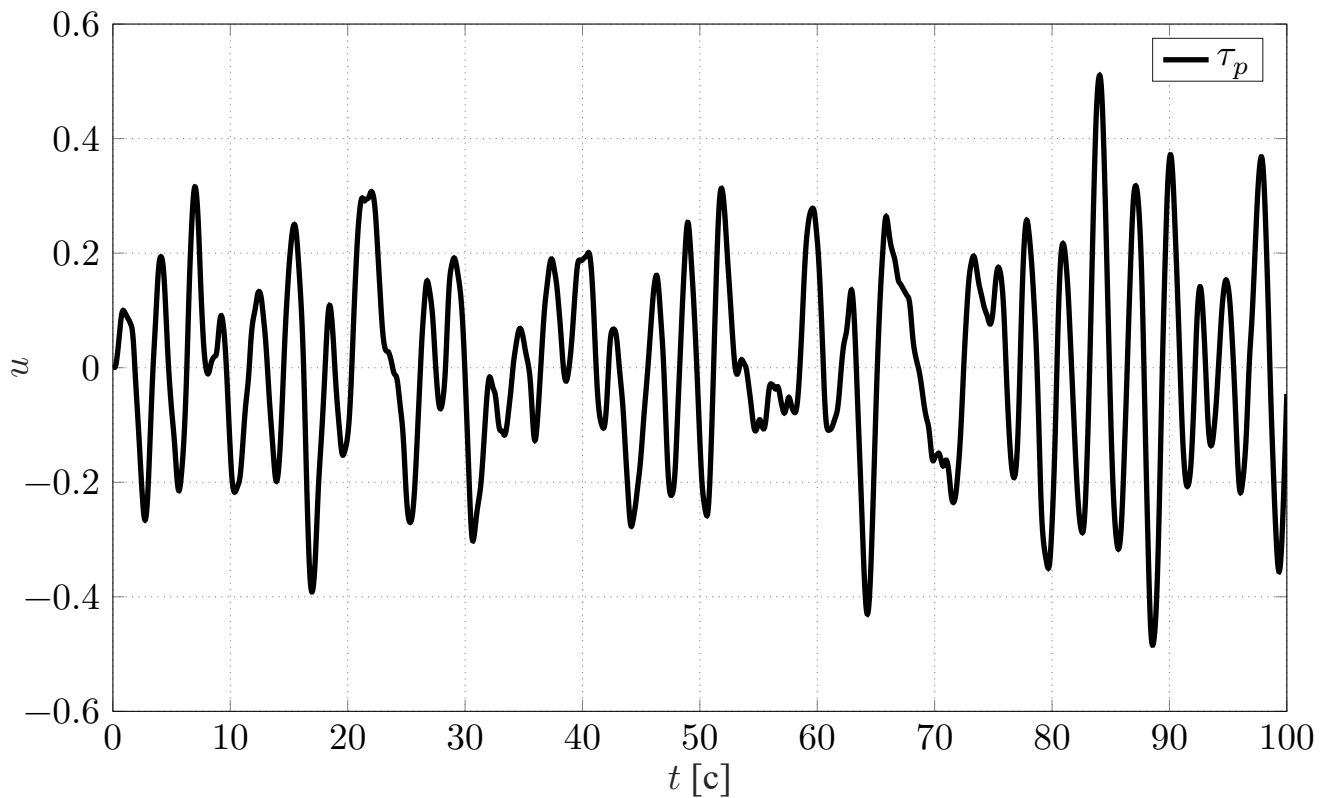


Рисунок 6 — Сигнал управления  $\tau_p$

висимо по продольному и поперечным направлениям [35].

Задача удержания заданного положения надводным судном выполнялась на макете роботизированного судна, которое представлено на рисунке 8. Оно предназначено для тестирования систем динамического позиционирования для морских киберфизических систем.

Судно оснащено главным рулевым движителем, носовым и кормовым тунельным подруливающим устройством. Размеры судна ( $0,432 \times 0,096 \times 0,052$ ) м. Рабочее пространство для экспериментов представлено бассейном, выполненным из фанерных листов, с размерами ( $0,432 \times 0,096 \times 0,052$ ) м.

Для обеспечения обратной связи по положению судна применялась система компьютерного зрения, эмулирующая спутниковую навигационную систему основанную на RGB видеосигнале, который поступает с камеры распо-

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

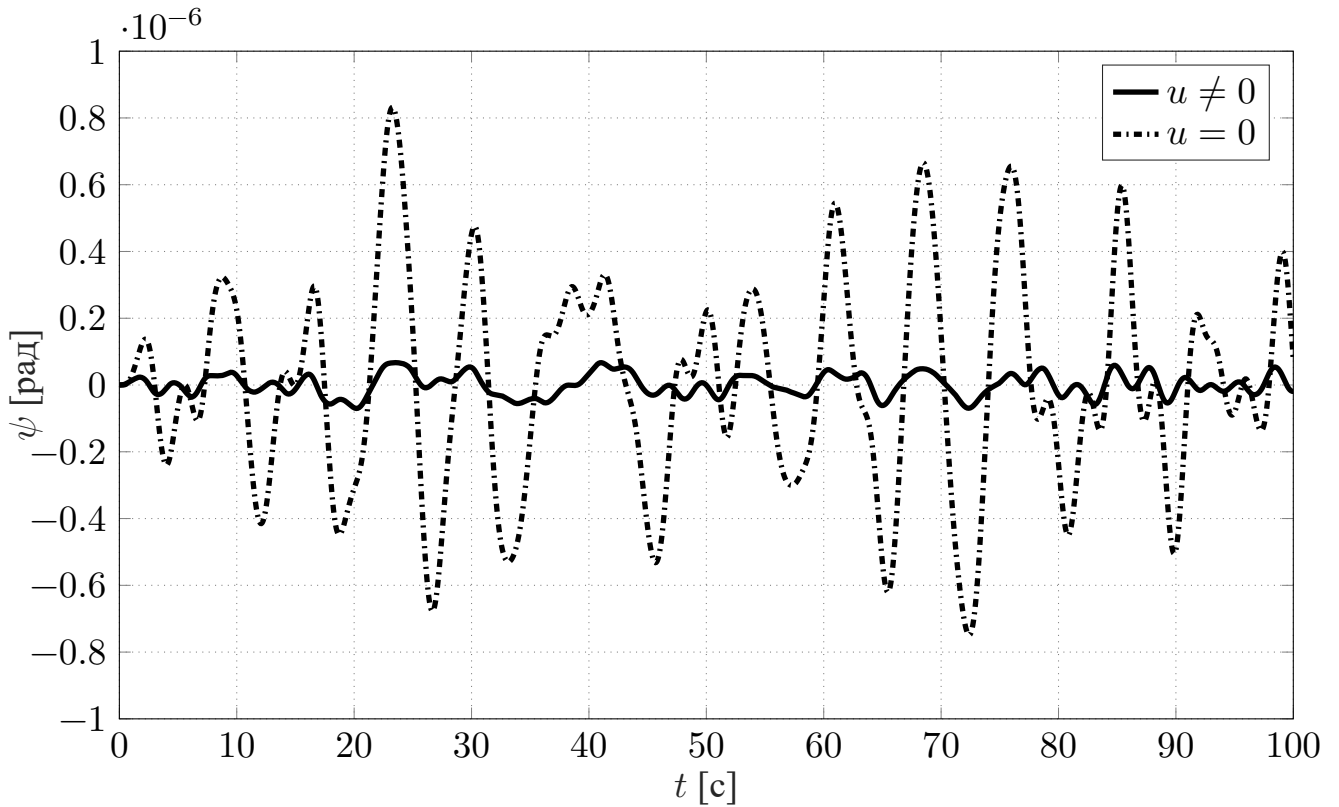


Рисунок 7 — Угол крена надводного судна  $\psi$

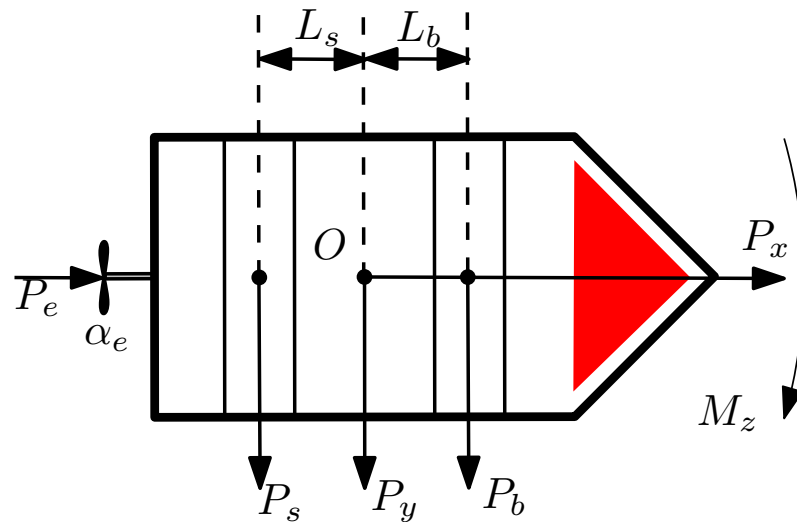


Рисунок 8 — Конфигурация роботизированной модели судна, где:  $P_x$  — упор вдоль оси  $x$ ,  $P_y$  — упор вдоль оси  $y$ ,  $M_z$  — момент по оси  $z$ ,  $P_s$  и  $P_b$  — упоры развиваемые туннельными трастерами,  $P_e$  — упор развиваемый главным подруливающим устройством,  $\alpha_e$  — угол поворота руля,  $L_s$  и  $L_b$  — расстояния от центра масс до трастера,  $O$  — центр масс

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

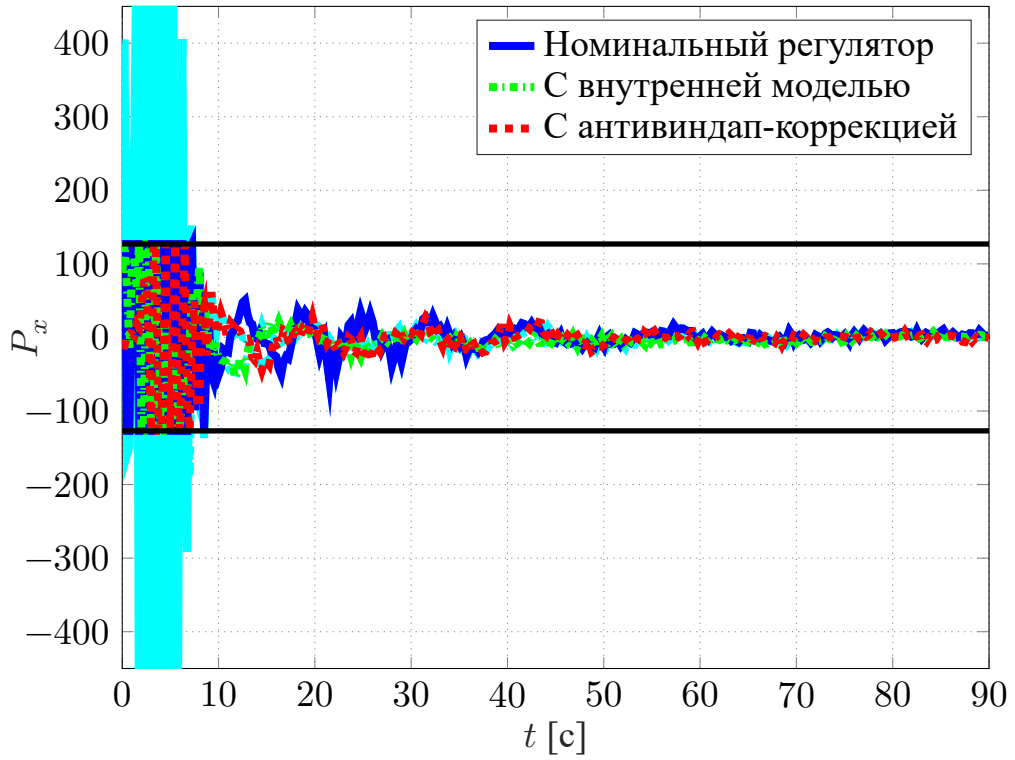


Рисунок 9 — Управляющие сигналы по координате  $x$

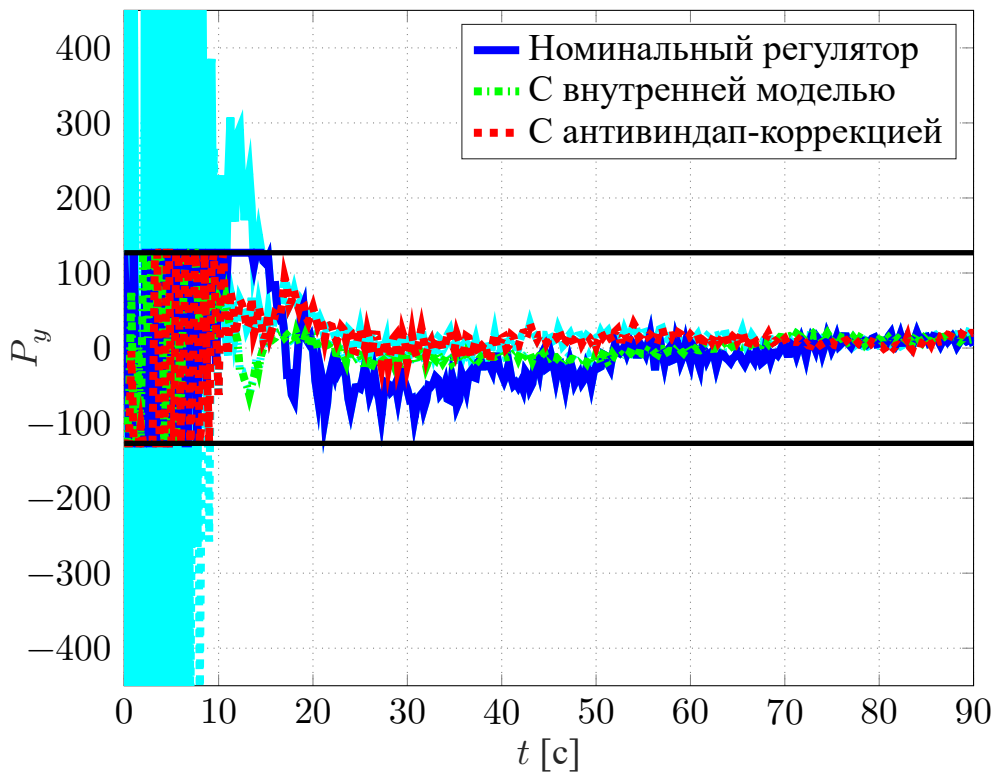


Рисунок 10 — Управляющие сигналы по координате  $y$

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

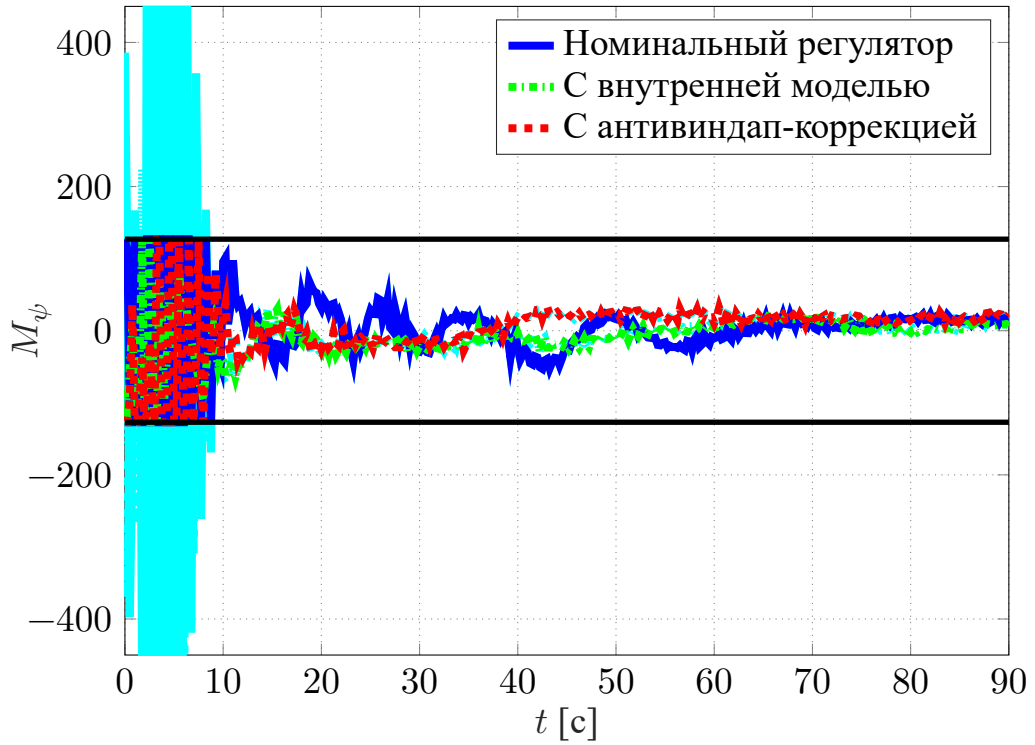


Рисунок 11 — Управляющие сигналы по координате  $\psi$

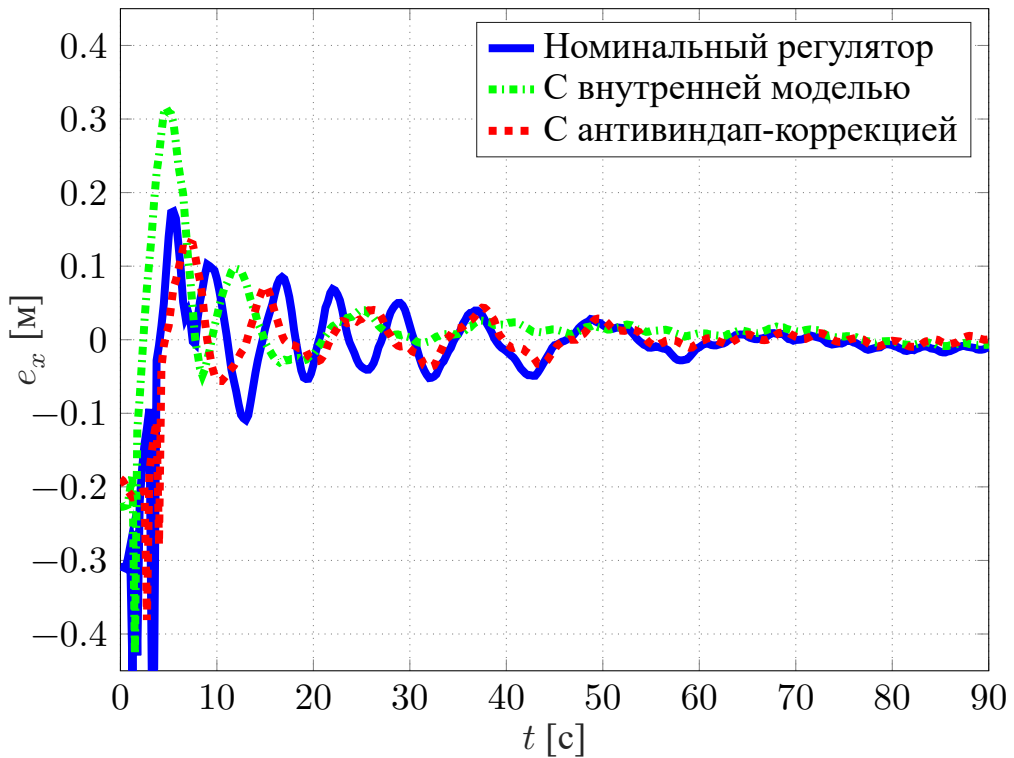


Рисунок 12 — Сигналы ошибки по координате  $x$

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата



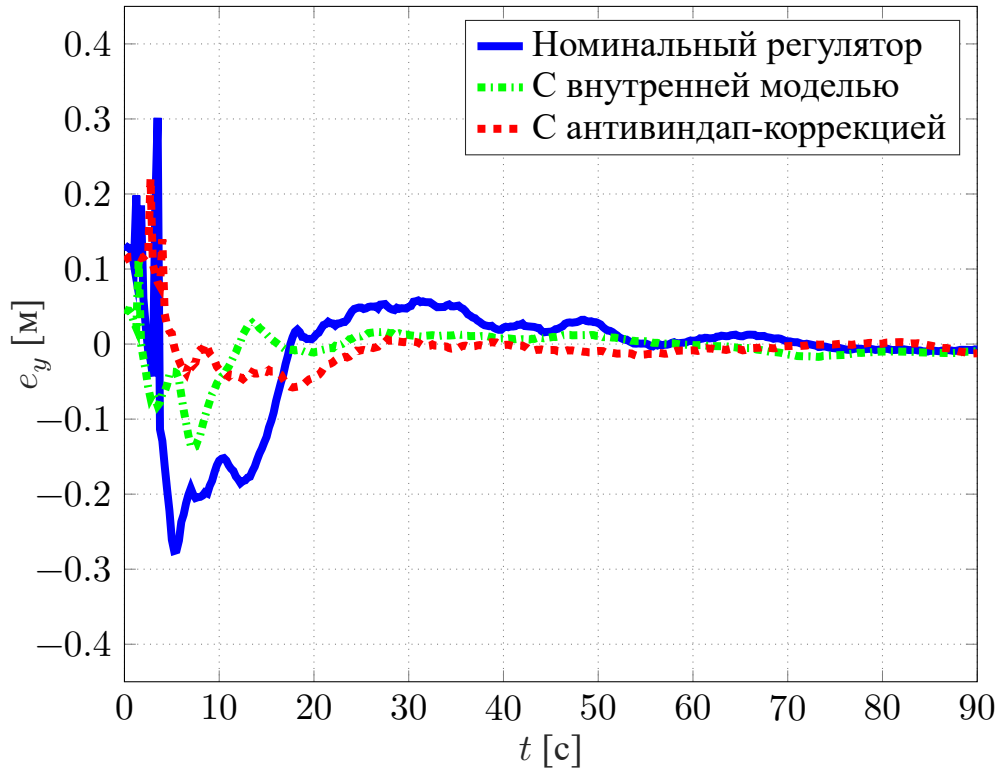


Рисунок 13 — Сигналы ошибки по координате  $y$

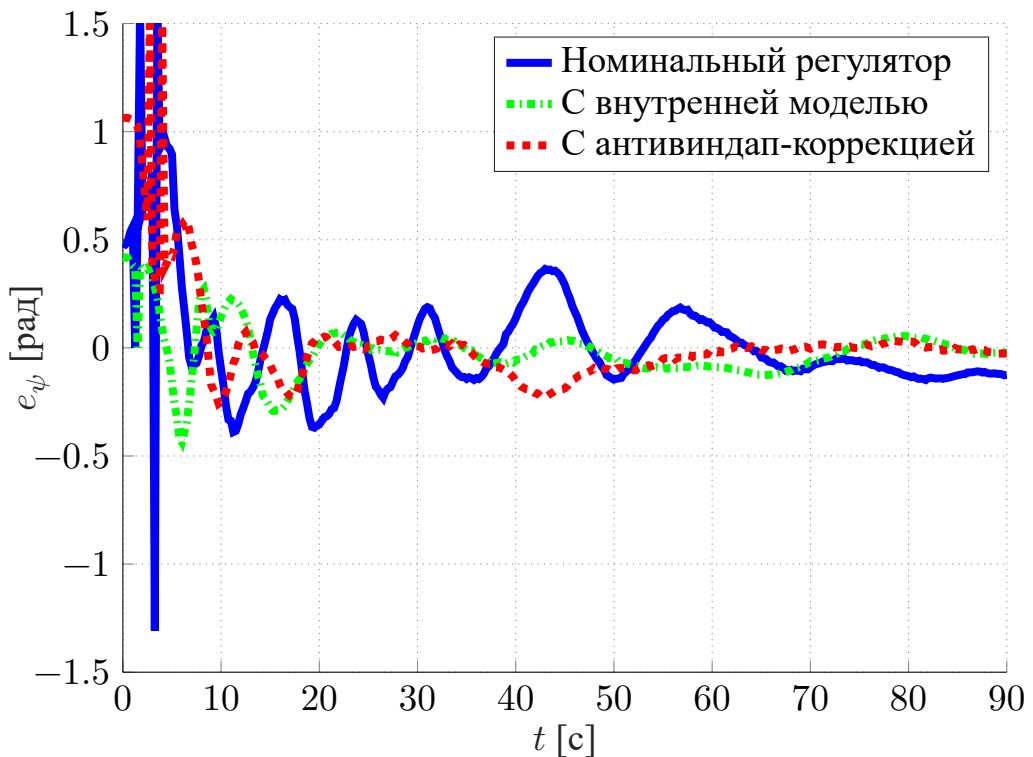


Рисунок 14 — Сигналы ошибки по координате  $\psi$

Изм.	Лист	№ док-м.	Подп.	Дата

ложенной над бассейном.

Управляющие сигналы, поступающие на исполнительные устройства по радиоканалу, имеют ограничения  $[-127; 127]$  из-за техники широтно-импульсной модуляции.

Было проведено три эксперимента. Первый сфокусирован на робастном алгоритме управления с деактивированными контурами внутренней модели и антивиндап-коррекции  $\gamma = 0, \nu = 0$ . Во втором эксперименте активируется внутренняя модель  $\gamma \neq 0, \nu = 0$ . Третий эксперимент представляет собой полный закон управления с антивиндап-коррекцией и внутренней моделью  $\gamma \neq 0, \nu \neq 0$ .

Экспериментальные результаты представлены на рисунках 9–14. Синяя кривая иллюстрирует управляющие сигналы, генерируемые номинальным регулятором без насыщения. Зеленая кривая демонстрирует регулятор с интегральной компонентой. Красная кривая представляет полный закон управления с компенсацией виндап эффектов.

Экспериментальные данные показывают, что первый регулятор приводит к небольшой стационарной ошибке. Это компенсируется интегральным членом, который накапливает ошибку и наращивает сигнал управления. В этом случае появляется эффект интегрального виндапа, в следствии чего увеличивается перерегулирование. Этот эффект компенсирует контур антивиндап-коррекции.

### 3.2 Промышленные киберфизические системы

#### 3.2.1 Стабилизация конфигурации многозвенным манипуляционным роботом

Задача стабилизации конфигурации манипуляционного робота исходит из необходимости управлять рабочим инструментом для выполнения каких либо задач [36]. Управление вращательными сочленениями манипуляционного робота сводится к управлению электроприводом с зубчатой передачей, динамическая модель которого рассматривается в виде:

$$L\dot{i} + Ri = u - K_\epsilon \dot{q}, \quad (85)$$

$$J\ddot{q} + K_f \dot{q} = K_\mu i - \mu_l, \quad (86)$$

где  $L, R, i, u$  — индуктивность, сопротивление, сила тока и напряжение якоря, соответственно,  $K_\epsilon$  — коэффициент противо-ЭДС,  $q$  — поворот ротора,  $J$  — суммарный момент инерции двигателя и зубчатой передачи,  $K_f$  — коэффициент,  $K_\mu$  — коэффициент момента силы,  $\mu_l = \frac{1}{j}\bar{\mu}_l$ ,  $\bar{\mu}_l$  — момент нагрузки,  $j$  — передаточное число зубчатой передачи.

Выполним преобразование Лапласа функций (85) и (86):

$$(Ls + R)I(s) = U(s) - K_\epsilon s\Theta(s), \quad (87)$$

$$(Js + K_f)s\Theta(s) = K_\mu I(s) + M_l(s). \quad (88)$$

Тогда из (87) и (88) запишем передаточную функцию входа  $U(s)$  к выходу  $\Theta(s)$  при  $M_l(s) = 0$ :

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_\mu}{s((Ls + R)(Js + K_f) + K_\epsilon K_\mu)}. \quad (89)$$

Передаточная функция от  $M_l(s)$  к  $\Theta(s)$  при  $U(s) = 0$ :

$$\frac{\Theta(s)}{M_l(s)} = \frac{Ls + R}{s((Ls + R)(Js + K_f) + K_\epsilon K_\mu)}. \quad (90)$$

Разделим числитель и знаменатель передаточных функций (89) и (90) на  $R$ :

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_\mu}{R}}{s\left(\left(\frac{L}{R}s + 1\right)(Js + K_f) + \frac{K_\epsilon K_\mu}{R}\right)}, \quad (91)$$

$$\frac{\Theta(s)}{M_l(s)} = \frac{\frac{L}{R}s + 1}{s\left(\left(\frac{L}{R}s + 1\right)(Js + K_f) + \frac{K_\epsilon K_\mu}{R}\right)}. \quad (92)$$

Введем допущение, что постоянная времени электрической части существенно меньше, чем постоянная времени механической части:

$$\frac{L}{R} \ll \frac{J}{K_f},$$

что является типичным допущением для электромеханических систем. С учетом этого перепишем передаточные функции (91) и (92):

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} \approx \frac{\frac{K_\mu}{R}}{s\left(Js + K_f + \frac{K_\epsilon K_\mu}{R}\right)}, \quad (93)$$

$$\frac{\Theta(s)}{M_l(s)} \approx \frac{\frac{L}{R}s + 1}{s\left(Js + K_f + \frac{K_\epsilon K_\mu}{R}\right)}. \quad (94)$$

Введем новые обозначения и упростим передаточные функции (93) и (94):

$$\frac{\Theta(s)}{M_u(s)} \approx \frac{1}{s(Js + K)}, \quad (95)$$

$$\frac{\Theta(s)}{M_l(s)} \approx \frac{1}{s(Js + K)}, \quad (96)$$

где  $M_u(s) = \frac{K_u}{R}U(s)$ ,  $K = K_f + \frac{K_\epsilon K_\mu}{R}$ .

Комбинируя передаточные функции (95) и (96), получим:

$$\Theta(s) = \frac{1}{s(Js + K)}(M_u(s) - M_l(s)) = P(s)(M_u(s) - M_l(s)). \quad (97)$$

Таким образом необходимо синтезировать закон управления передаточной функции вращательного сочленения:

$$P(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{1}{s(Js + K)}. \quad (98)$$

Доступным измерению принимаем исключительно сигнал выхода, без измерений его производных. Параметры объекта рассматриваются неизвестными.

Рассмотрим модель управления пятизвенным манипулятором с вращательными сочленениями KUKA Youbot. Параметры моделей приводов 98 прием неизвестными.

Построим трехконтурный регулятор по координате  $q$ , скорости  $\dot{q}$  и току  $i$ :

$$\sigma_{(\cdot)} = 30, \quad \kappa_{(\cdot)} = 10, \quad \nu_{(\cdot)} = 1, \quad \gamma_{(\cdot)} = 1,$$

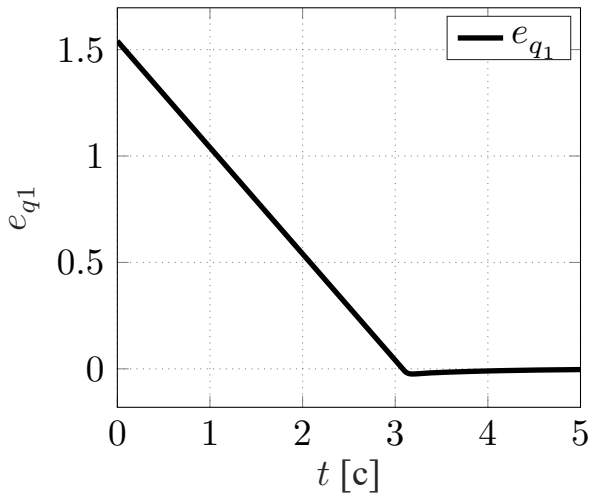
с учетом ограничений на управляющие сигналы:

$$u_{\min, q_{(\cdot)}} = -u_{\max, q_{(\cdot)}} = -0.5,$$

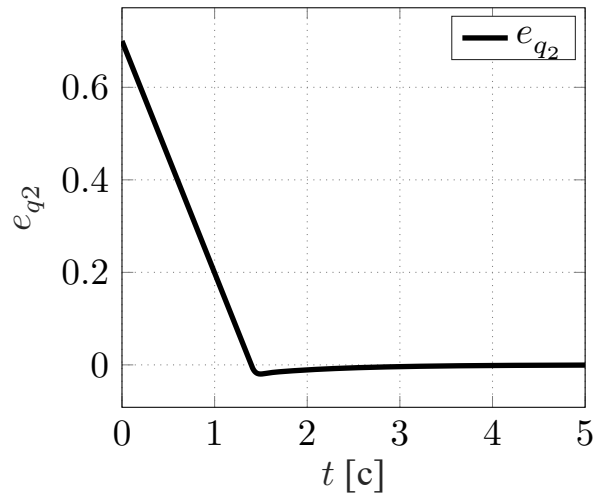
$$u_{\min, \dot{q}_{(\cdot)}} = -u_{\max, \dot{q}_{(\cdot)}} = -2,$$

$$u_{\min, i_{(\cdot)}} = -u_{\max, i_{(\cdot)}} = -0.5.$$

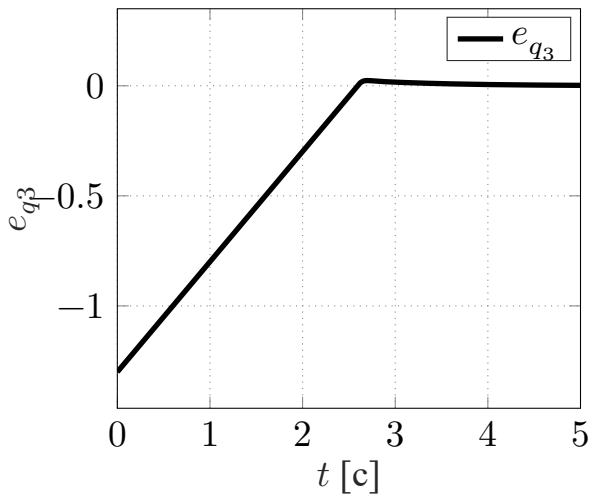
Результаты моделирования представлены на рисунке 15.



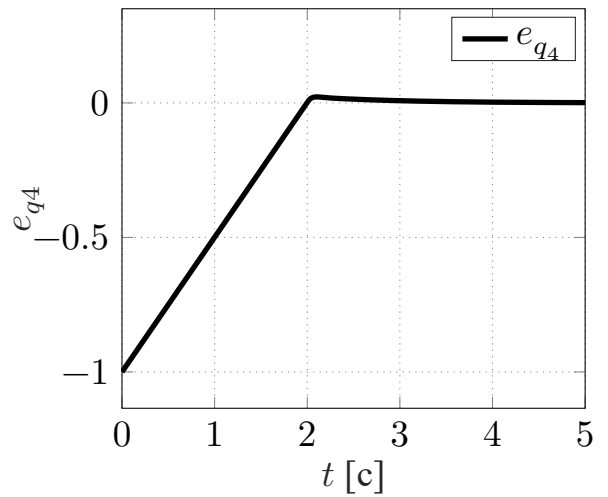
(а) Первое звено



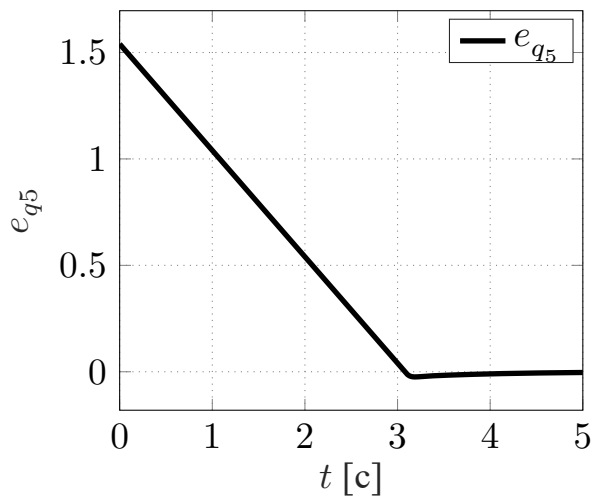
(б) Второе звено



(в) Третье звено



(г) Четвертое звено



(д) Пятое звено

Рисунок 15 — Ошибка регулирования по звеньям

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

### 3.3 Транспортные киберфизические системы

Математическую модель квадрокоптера рассмотрим в виде:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^4 u_i(c_\phi c_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi), \quad J_\theta \ddot{\theta} = l(-u_1 - u_2 + u_3 + u_4), \quad (99)$$

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^4 u_i(s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi), \quad J_\psi \ddot{\psi} = l(-u_1 + u_2 + u_3 - u_4), \quad (100)$$

$$m\ddot{z} = \sum_{i=1}^4 u_i(c_\phi c_\psi) - mg, \quad J_\theta \ddot{\phi} = C(u_1 - u_2 + u_3 - u_4), \quad (101)$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты положения в пространстве,  $\theta, \psi, \phi$  — углы Эйлера, которые представляют собой углы тангажа, крена и рысканья соответственно,  $u_i, i = \{1, 2, 3, 4\}$  — управляющие сигналы, которые задают подъёмную силу каждого привода,  $m$  — масса квадрокоптера,  $g$  — ускорение свободного падения,  $l$  — расстояние между геометрическим центром квадрокоптера и осью вращения приводов,  $J_\theta, J_\phi, J_\psi$  — моменты инерции,  $C$  — коэффициент преобразования от силы к крутящему моменту,  $s_{(\cdot)} = \sin(\cdot)$ ,  $c_{(\cdot)} = \cos(\cdot)$ .

Декомпозируем модель квадрокоптера, выбрав сигналы квази-управления

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

где сигналы квази-управления  $U_i, i = \{1, 2, 3, 4\}$  удовлетворяют условию на-

сыщения

$$U_i = \text{sat}(v_i) = \begin{cases} U_{i,max} & \text{при } v_i \geq u_{i,max}, \\ U_i & \text{при } u_{i,min} < v_i < u_{i,max}, \\ U_{i,min} & \text{при } v_i \leq u_{i,min}, \end{cases} \quad (103)$$

где  $U_{i,min}$  и  $U_{i,max}$  — пределы насыщения входных сигналов,  $v_i$  — номинальный сигнал управления.

Выполним преобразования для линеаризации модели квадрокоптера

$$m\ddot{x} = -U_5, \quad J_\theta\ddot{\theta} = lU_2, \quad (104)$$

$$m\ddot{y} = -U_6, \quad J_\psi\ddot{\psi} = lU_3, \quad (105)$$

$$m\ddot{z} = U_1 - mg, \quad J_\phi\ddot{\phi} = cU_4, \quad (106)$$

где углы тангажа, крена и рысканья вычисляются как

$$\theta^* = \frac{U_5}{U_1}, \quad \psi^* = -\frac{U_6}{U_1}, \quad U_5 = U_1\theta, \quad U_6 = -U_1\psi. \quad (107)$$

Для стабилизации положения квадрокоптера был выбран закон управления с параметрами  $\kappa_{(\cdot)} = 5$ ,  $\gamma_{(\cdot)} = 1$ ,  $\nu_{(\cdot)} = 1$ ,

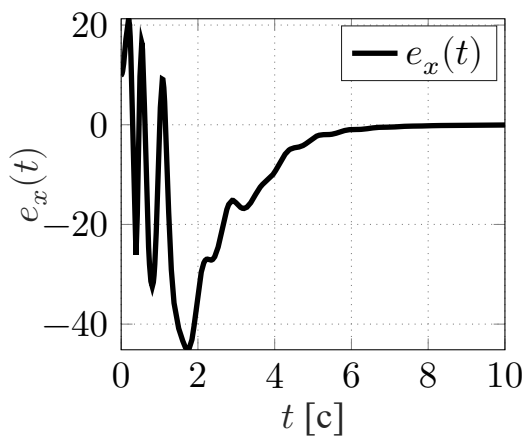
$$A_{q,(\cdot)} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_{q,(\cdot)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix},$$

$$c_{k,(\cdot)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

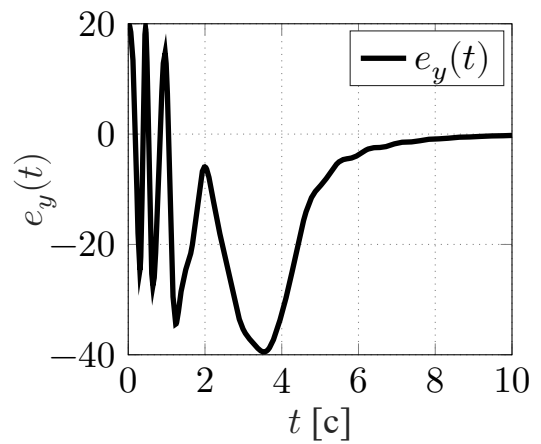
где  $\sigma_{(\cdot)} = 10$ .

Результаты моделирования представлены на рисунках [16](#) и [17](#).

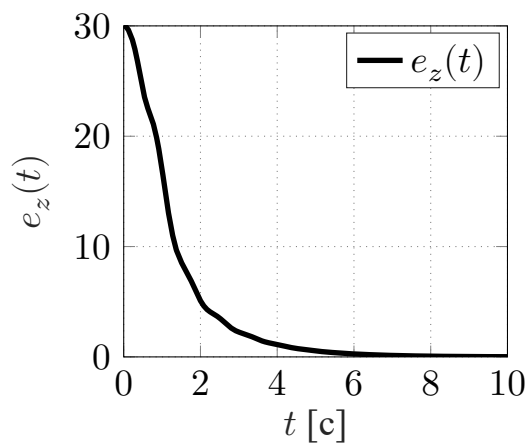




(a) x



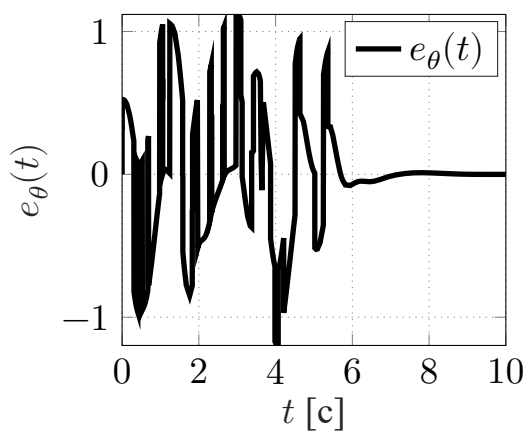
(б) y



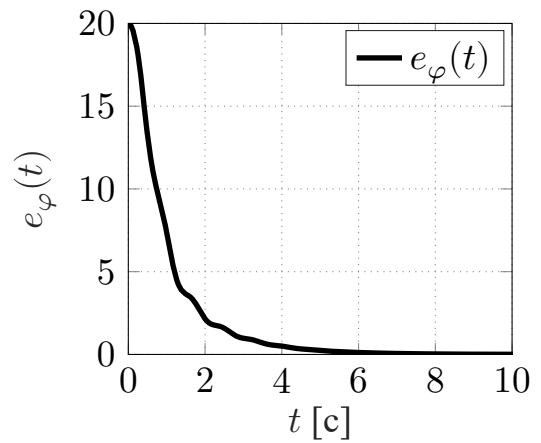
(в) z

Рисунок 16 — Сигналы ошибки управления по линейным координатам

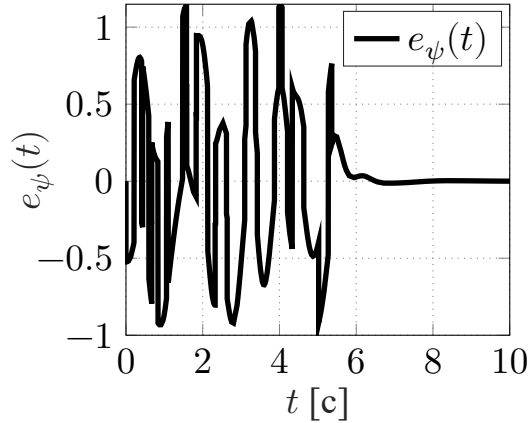
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата



(а)  $\theta$



(б)  $\phi$



(в)  $\psi$

Рисунок 17 — Сигналы ошибки управления по угловым координатам

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

## Заключение

В рамках диссертационной работы был предложен робастный алгоритм управления с антивиндап-коррекцией, который обеспечивает устойчивое функционирование замкнутых систем в условиях влияния внешних возмущений, ограничений на управляющие сигналы, и наличия неучтенной асимптотически устойчивой динамики. Кроме того, был предложен алгоритм настройки предложенного алгоритма при помощи инструментария линейных матричных неравенств, с целью обеспечения гарантированного быстродействия не менее заданного.

Верификация алгоритма управления была проведена посредством моделирования приложений к классу мобильных киберфизических систем. Были решены задачи стабилизации волновой качки надводного судна при помощи гиростабилизатора, удержания заданного положения надводным судном и квадрокоптером, а также задача независимого управления звеньями манипуляционного робота с вращательными сочленениями.

В качестве направления дальнейших исследований может быть реализована интеграция всех описанных приложений (мобильный робот, квадрокоптер, манипулятор) в единую киберфизическую сеть, для согласованного выполнения некой общей задачи. Интерес вызывают задачи: децентрализация управления, организация различных топологий сети, обеспечение двустороннего обмена информацией между такими узлами сети, усложнение сценарией функционирования на базе автоматической коммуникации роботов друг с другом.

					ФСЧИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		59

**Список использованных источников**

1. Characterization, analysis, and recommendations for exploiting the opportunities of cyber-physical systems / M. Törngren [и др.] // Cyber-Physical Systems. — Elsevier, 2017. — С. 3—14.
2. Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators / S. Tarbouriech [и др.]. — Springer Science & Business Media, 2011.
3. *CPS-Summit*. Holistic approaches to cyber-physical integration. CPSWeek report. — 2008. — URL: [http://iccps2012.cse.wustl.edu/\\_doc/CPS\\_Summit\\_Report.pdf](http://iccps2012.cse.wustl.edu/_doc/CPS_Summit_Report.pdf) (дата обр. 08.05.2019).
4. *Sussman J. S.* Perspectives on intelligent transportation systems (ITS). — Springer Science & Business Media, 2008.
5. *Wang L., Törngren M., Onori M.* Current status and advancement of cyber-physical systems in manufacturing // Journal of Manufacturing Systems. — 2015. — Т. 37. — С. 517—527. — ISSN 0278-6125. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2015.04.008>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0278612515000400>.
6. *Eurostat, Commission européenne U. européenne.* Energy, transport and environment indicators. Т. 2. — Office for Official Publications of the European Communities, 2011.
7. *Isidori A.* Lectures in feedback design for multivariable systems. Т. 3. — Springer, 2017.
8. *Khalil H. K., Praly L.* High-gain observers in nonlinear feedback control // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2014. — Т. 24, № 6. — С. 993—1015.
9. *Bobtsov A., Pyrkin A., Kolyubin S.* Simple output feedback adaptive control based on passification principle // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. — 2014. — Т. 28, № 7/8. — С. 620—632.

10. *Polyak B., Khlebnikov M., Shcherbakov P.* An LMI approach to structured sparse feedback design in linear control systems // 2013 European control conference (ECC). — IEEE. 2013. — С. 833—838.
11. LMI-Based Design of Output Robust Controller / М. А. Kakanov [и др.] // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Т. 51, № 32. — С. 821—825.
12. *Бобцов А. А.* Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 11. — С. 108—117.
13. Output robust control with anti-windup compensation for robotic boat / О. I. Borisov [и др.] // 2016 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). — IEEE. 2016. — С. 13—18.
14. Robust anti-windup control for marine cyber-physical systems / М. Kakanov [и др.] // MATEC Web of Conferences. Т. 161. — EDP Sciences. 2018. — С. 03025.
15. Robust High-Gain Generalization of PID Controllers with Anti-Windup Compensation / О. I. Borisov [и др.] // IFAC-PapersOnLine. — 2018. — Т. 51, № 4. — С. 352—357.
16. *Fertik H. A., Ross C. W.* Direct digital control algorithm with anti-windup feature // ISA transactions. — 1967. — Т. 6, № 4. — С. 317.
17. A tutorial on modern anti-windup design / S. Galeani [и др.] // European Journal of Control. — 2009. — Т. 15, № 3/4. — С. 418—440.
18. *Zheng A., Kothare M. V., Morari M.* Anti-windup design for internal model control // International Journal of Control. — 1994. — Т. 60, № 5. — С. 1015—1024.
19. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis / G. Grimm [и др.] // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2003. — Т. 48, № 9. — С. 1509—1525.
20. *Da Silva J. G., Tarbouriech S., Reginatto R.* Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme // Proceedings of the International Conference on Control Applications. Т. 2. — IEEE. 2002. — С. 1106—1111.

					ФСУИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		61

21. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. — Профессия, 2003.
22. *Мирошник И. В.* Теория автоматического управления // *Линейные системы.* СПб.: Питер. — 2005. — Т. 3.
23. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц // *Автоматика и телемеханика.* — 2005. — № 1. — С. 82—99.
24. *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — С. 280.
25. Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры / В. А. Бойченко [и др.] // *Управление большими системами: сборник трудов.* — 2007. — № 19.
26. *Андриевский Б. Р., Бобцов А. А., Фрадков А. Л.* Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. — М. Инжевск: Институт компьютерных исследований, 2018. — С. 336.
27. *Andrievsky B., Fradkov A., Stotsky A.* Shunt Compensation for Indirect Sliding-Mode Adaptive Control // *IFAC Proceedings Volumes.* — 1996. — Т. 29, № 1. — С. 5132—5137.
28. *Gawthrop P.* Continuous-time Self-tuning Control - A Unified Approach // *IFAC Proceedings Volumes.* — 1987. — Т. 20, № 2. — С. 19—24.
29. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing / S. Aranovskiy [и др.] // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2017. — Т. 62, № 7. — С. 3546—3550. — DOI: [10 . 1109 / TAC . 2016.2614889](https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2614889).
30. Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing / S. Aranovskiy [и др.] // *IFAC-PapersOnLine.* — 2016. — Т. 49, № 13. — С. 99—104.
31. Output Robust Control of Input-Saturated Plants with Anti-Windup Compensation / О. I. Borisov [и др.]. — 2018.

32. *Townsend N. C., Shenoi R. A.* Control Strategies for Marine Gyrostabilizers // IEEE Journal of Oceanic Engineering. — 2014. — Т. 39, № 2. — С. 243—255.
33. *Haghighi H., Jahed-Motlagh M. R.* Ship roll stabilization via sliding mode control and gyrostabilizer // Bul. Inst. Polit. Iasi, LVIII. — 2012.
34. *Perez T., Steinmann P.* Analysis of ship roll gyrostabiliser control // Т. 42. — 2009. — С. 310—315.
35. *Fossen T. I.* Handbook of marine craft hydrodynamics and motion control. — John Wiley & Sons, 2011.
36. *Spong M. W., Vidyasagar M.* Robot dynamics and control. — John Wiley & Sons, 2008.

					ΦСЧИР.101.4234.001 ПЗ	Лист
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата		63