Министерство просвещения Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»

Физико-математический факультет

Кафедра математики и физики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ Т. И. Рыбакова
«__» ________ 2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ (БАКАЛАВРСКАЯ) РАБОТА

Направление подготовки бакалавров
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили Математика и информатика

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 5-6 КЛАССОВ КАК СРЕДСТВО ОРГАНИЗАЦИИ ИХ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Научный Руководитель ________________ доцент, к.ф.-м.н. А.Н. Матвеева
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Выпускник ________________ А.И. Петрова
подпись, дата инициалы, фамилия

Рецензент ________________ доцент, к.ф.-м.н. В.Г. Ефремов
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Чебоксары 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

С каждым годом растет потребность общества в людях, способных исследовать, изучать любые изменения, нетрадиционно и качественно решать существующие проблемы. Она обусловлена ускорением темпов развития общества и, как следствие, необходимостью подготовки людей к жизни в быстроменяющихся условиях.

Специалисты, уделяющие внимание вопросам школьного математического образов, обращают особое внимание на усовершенствование задачного материала, так как представленные в современных учебных пособиях задачи, как правило, требуют алгоритмического способа решения, что не способствует развитию исследовательской и познавательной деятельности учащихся. Следовательно, повышается интерес учителей, авторов учебников к задачам определенного жанра, в специальной литературе обозначенных различными синонимичными терминами: проблемные, творческие, поисковые, эвристические, занимательные, которые можно объединить общим термином «нестандартные задачи».

Следует отметить, что решение нестандартных задач можно рассматривать в качестве проблемных ситуаций, что способствует развитию внутренней мотивации, активизирующей психические процессы, за счет чего качественнее и быстрее формируются значимые для осуществления учебной деятельности универсальные учебные действия.

Систематическое использование на уроках математики и факультативных кружках специальных задач, направленных на развитие логического мышления, расширяет математический кругозор школьников, помогает усвоению программного материала. Часто не только ученики, но и учителя сталкиваются на практике со сложностями при работе с материалом, отличным от шаблонных задач. Это объясняется тем, что учителя не обладают достаточным опытом обращения к задачам нестандартного характера в процессе изучения математических дисциплин в учебных заведениях и в своей педагогической деятельности. Также существует проблема практического использования нестандартных задач в учебном процессе и недостаточной подготовленности дидактической базы для этого.

Актуальность выбранной темы состоит в том, что умение решать нестандартные задачи позволяет проверить уровень знаний, логическое мышление и умение оперировать абстрактными объектами, т.е. определить математическую культуру учащихся, о чем невозможно объективно судить при решении однотипных задач. Также существует проблема поиска средств развития мыслительных способностей, связанных с исследовательской деятельностью учащихся как в коллективной, так и в индивидуальной форме обучения. Следовательно, необходимо выявить возможные пути реализации функции исследования в области математики в процессе решения нестандартных задач.

Таким образом, выдвигается *гипотеза исследования*. Очевидно, что систематическое решение нестандартных задач будет способствовать более целенаправленному формированию у учащихся 5-6 классов представления об исследовательской деятельности. Разработка соответствующей методики обучения позволит повысить уровень знаний и умений учащихся по математике, будет способствовать формированию у них осознанного, неформального понимания изучаемых фактов.

Цель выпускной квалификационной работы: выявление возможностей формирования у школьников определенного стиля мышления в процессе решения задач нестандартного характера и разработка соответствующей методики обучения.

Для осуществления обозначенной цели служат *следующие задачи:*

1. Сформулировать понятийный аппарат исследования на основе проведения анализа соответствующей методической литературы.
2. Проанализировать учебники по математике для 5-6 классов разных авторов на наличие нестандартных задач.
3. Классифицировать нестандартные задачи, встречающиеся в школьном курсе математики.

4. Разработать ряд нестандартных задач, направленных на формирование исследовательских способностей учащихся.

5. Разработать методику обучения решению нестандартных задач.

6. На основе разработанных нестандартных задач и методики обучения их решению оценить уровень знаний учащихся, посещавших факультативный курс «Малый физмат».

Объектом исследования является процесс организации исследовательской деятельности учащихся при обучении математике в средней общеобразовательной школе.

Предметом исследования является методика решения нестандартных задач по математике в 5-6 классах.

Разработанная в выпускной квалификационной работе методика решения нестандартных задач с учетом вводимой классификации поможет не только учащимся ориентироваться в многообразии нестандартных задач, методах их решений, но и молодым педагогам разрабатывать факультативные курсы и курсы по выбору, направленные на развитие исследовательских навыков учащихся 5-6 классов. Таким образом обоснована *практическая значимость* данной работы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, определены объект, предмет, цель, гипотеза, задачи. В первой главе «Нестандартные задачи в школьном обучении математике и их психолого-педагогические основы» главе рассмотрены различные подходы к определению нестандартной задачи, классификация задач, а также их дидактические функции; изучена проблема развития исследовательских способностей учащихся 5-6 классов и на основе этого проведен анализ школьных учебников по математике с точки зрения наличия в них нестандартных задач. Во второй главе «Система нестандартных задач по курсу математики 5-6 классов» рассмотрены виды нестандартных задач по курсу математики 5-6 классов и методы их решения, представлены опорные сигналы для работы с учениками и примеры решения основных типов задач по каждому виду;

разработаны ряд нестандартных задач, направленных на формирование исследовательских способностей учащихся и методика обучения их решения; оценен уровень знаний, наличие первичных навыков проведения исследовательской деятельности, а в последствии и уровень сформированности исследовательской компетенции учащихся, посещавших факультативный курс «Малый физмат», в рамках которого школьники познакомились с нестандартными задачами и методами их решений. В заключение работы обобщены результаты исследования.

Глава 1. Нестандартные задачи в школьном обучении математике и их психолого-педагогические основы

§1.1 Различные подходы к определению нестандартной задачи в обучении математике

В настоящее время в ФГОС ОО уделяется большое внимание развитию математический способностей учащихся любой степени обучения. В процессе обучения в школе у учеников формируется ряд универсальных учебных действий (УУД), проявление и развитие которых является одной из основных задач современной школы. Нельзя не отметить тот факт, что развитие большинства УУД зависит от сформированности у учащихся математических способностей. Наиболее успешно данные способности формируются при решении нестандартных математических задач, которые не включены в школьную программу. Именно эти задачи поспособствуют тому, что учащиеся не только научаться считать и подставлять в формулы нужные значения, но и научаться думать, логически рассуждать.

Психолого-педагогическая литература содержит большое количество классификаций задач. Обратим внимание на ряд классификаций, которые обращают внимание на уровень проблемности задачи. Все авторы классификаций сходятся в определении стандартных (шаблонных, репродуктивных, алгоритмических) задач, к которым относятся:

1) задачи, связанные с классическим учебным материалом;

2) задачи, которые решаются определенным алгоритмом или с помощью стандартного правила.

Нестандартные (поисковые, проблемные, эвристические, исследовательские, творческие) задачи имеют абсолютно другой подход. В работах различных авторов можно встретить такое использование вышеперечисленных терминов: проблемно-поисковые, творческо-поисковые, творческая-проблемная, нестандартная-творческая-эвристическая, творческая-эвристическая и так далее. В этом случае авторы применяют все данные прилагательные или некоторые отдельные сочетания в качестве синонимов. Также стоит отметить, что это не общепризнанная терминология, а собственное желание ряда авторов. Другие же авторы при использовании данных терминов специально подчеркивают их различия.

Проанализировав различные типы нестандартных задач, можно сделать вывод, что определения нестандартных задач, которые дают авторы, ориентированы на акцентирование таких их характеристик, которые отлично взаимодействуют с особенностями процесса формирования познавательной компетентности ученика в обучении математике. Можно выделить следующие характеристики:

- содержательные (мало связана с определенным математическим материалом, содержит посильное затруднение);
- организационно-деятельностные (творческая деятельность, возникновение проблемной ситуации);
- когнитивно-интеллектуальные (требует универсальных приемов математического мышления, гибкость и критичности мышления);
- личностно-ценностные (вызывает интерес решения возникшей проблемной ситуации).

Несмотря на вышеизложенные характеристики, которые целиком или частично присутствуют в определениях авторов, существуют различные определения нестандартной задачи.

Из всех определений нестандартных задач, которые дают исследователи, наиболее полном и четко сформулированным можно назвать определение Л. М. Фридмана: «Нестандартные задачи – это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [26].

Как и определений существует огромное количество классификаций нестандартных задач. Но среди их большого разнообразия выделяется классификация Е. Ю. Лавлинской, в которой задачи разбросаны в группы по способу действия, выполняемого в процессе решения. Данная классификация выглядит следующим образом:

1) комбинаторные задачи;

2) задачи на активный перебор вариантов отношений;

3) задачи на упорядочивание элементов множества;

4) задачи на вливание и переливание;

5) задачи на взвешивание;

6) логические задачи;

7) задачи на определение функциональных, пространственных, временных отношений [8].

В учебно-методической литературе также приводится следующие классификации нестандартных задач:

1. по характеру требований (построение или преобразование процесса, нахождение искомого);

2. по содержанию мыслительных операций, задействованных в процессе решения (задачи на сравнение, анализ, синтез, обобщение, аналогию, умозаключючение);

3. по приёмам, задействованным в процессе решения (построение блок-схем, графов, таблиц, словесное рассуждение).

Кроме того, среди нестандартных задач встречаются такие задачи, как магический квадрат, задачи в стихах, головоломки, математические задачи, счетные палочки.

§1.2 Дидактические функции нестандартных задач

Нестандартные задачи все чаще пользуются спросом в учебном процессе по той причине, что задачи демонстрируют изучение математики в игровой и практической форме. Нестандартные задачи позволяют показать учащимся магию чисел, изящество геометрических фигур, метапредметную связь математики с другими предметами в реальной жизни.

Исследования психологов показывают, что частое прорешивание нестандартных задач в урочное и внеурочное время приводит к развитию мышления школьников; развиваются такие качества, как гибкость, критичность, активность, креативность, целенаправленность и т.п. Нельзя не отметить тот факт, что кроме перечисленных характеристик у учащихся происходит развитие пространственного мышления, которое у детей среднего возраста носит характер воображения. Именно использование воображения позволяет школьникам решать нестандартные задачи, так как оно является основой творческого подхода при изучении математики.

Определим дидактические функции, которыми обладают нестандартные задачи. В методике обучения математике понимают проектируемые учителем изменения в деятельности и психике учащихся, которые должны произойти в результате решения ими этих задач [5]. Основными функциями любой задачи можно считать обучающие, развивающие, воспитывающие и контролирующие. Данные функции широко известны и могут быть реализованы на любом этапе урока. Подробно рассмотрим вышеперечисленные функции.

1. Обучающие функции – функции, которые при обучении математике направлены на формирование у учащихся:

- системы ведущих идей, законов, принципов, положений, различных связей между ними;
- умения и навыка моделирования учебного материала;
- пространственных представлений;
- математической интуиции;
- умения использовать математическую символику.

2. Развивающие функции – это ведущие функции нестандартных задач, направленные на развитие мышления учащихся, формирование у них качеств научно-теоретического мышления, на овладение эффективными приемами умственной деятельности. Принято различать развивающие функции общего характера и специальные развивающие функции.

К числу развивающих функций общего характера относятся функции задач, направленные на формирование у учащихся следующих умений:

- использовать известные методы научного познания как методы изучения (сравнение, анализ, синтез, абстрагирование, обобщение, конкретизация);
- производить умозаключения индуктивного и дедуктивного характера;
- ставить мысленный эксперимент;
- выделять существенное; осуществлять выбор средств и методов для достижения поставленной цели;
- проявлять логическую грамотность.

К специальным развивающим функциям относятся функции, способствующие развитию у учащихся следующих мыслительных умений:

- анализировать задачную ситуацию – сопоставлять решаемую задачу с решенными ранее, выявлять скрытые свойства задачной ситуации;
- предполагать с достаточной степенью правдоподобия существование того или иного математического факта, свойства, отношения;
- составлять план для решения задачи, анализировать данные, исключать ненужные, привносить необходимые;
- варьировать методы и средства, необходимые для решения задачи; осуществлять проверку правильности решения;
- анализировать полученное решение, осуществлять при необходимости поиск более рационального решения.

3. Воспитывающие функции – это функции, направленные на формирование у учащихся познавательного интереса и творческих задатков, воспитание важных нравственных качеств.

Немалые затраты времени на решение нестандартных задач приучают учащихся рационально организовывать свою деятельность, предвидеть трудности, связанные с реализацией той или иной идеи. Преодоление препятствий, возникающих при поиске идеи решения, требует настойчивости, упорства, волевого решения. Следовательно, нестандартные задачи способствуют развитию целеустремленности, ответственного отношения к высказываемым предположениям.

Решение задач целесообразно изучать на уроке со всеми учащимися. Выработка идеи решения в результате коллективного обсуждения задачи приводит к пониманию важности коллективного труда, к выработке такого качества личности как инициативность.

Самостоятельное решение задачи школьниками ведет к возникновению эмоционального удовлетворения. Это удовлетворение тем сильнее, чем больше усилий было затрачено на поиск решения.

4. Контролирующие функции – это функции, направленные на установление уровня обученности, математического развития и сформированности познавательного интереса.

Математические задачи способствуют формированию у учащихся умения контролировать свои действия, прогнозировать ход решения, критически оценивать результаты своей работы.

Важно отметить, что при рассмотрении процесса решения задач школьниками учитель может оценить «зону ближайшего развития» ученика. Оценка «зоны ближайшего развития» важна и необходима прежде всего потому, что «для динамики умственного развития и для школьной успешности оказываются не столь существенными функции, созревшие на сегодняшний день, которые являются не больше, как предпосылкой, сколько функции, находящиеся в стадии созревания» [1].

Следовательно, оценив «зону ближайшего развития» учащегося, учитель может не только спрогнозировать динамику умственного развития школьника, но и дать рекомендации, способствующие успешному учению. Кроме того, различные задачи (особенно нестандартные) могут использоваться для определения умений учащихся действовать в различных ситуациях.

Таким образом, при обучении математике нестандартные задачи выполняют все основные дидактические функции. Применение задач различных типов, в том числе нестандартных, формирует продуктивный подход к решению задач, способствуют развитию динамичности умственной деятельности и гибкости мышления. В ходе решения нестандартных задач необходимо осуществлять поиск идеи в различных направлениях, предвидеть последующие действия, воздерживаться от поспешных суждений и ориентироваться на возможность использования данных, не содержащихся в условии [20]. Все это способствует развитию творческих способностей, формирует умение действовать в незнакомых, напряженных ситуациях, связанных не только с решением задач.

§1.3 Проблема развития исследовательских способностей учащихся 5-6 классов

В сложившихся реалиях современного мира несложно заметить, что актуальной проблемой обучения является подготовка молодежи, которая имеет желание и стремление учиться, самостоятельно приобретать новые знания, умеет нестандартно размышлять, находить новые сведения в совершенно неожиданных местах и условиях. В государственном документе «Национальная доктрина образования в РФ до 2025 г.» идет упоминание о создании условий для развития личности и творческой самореализации каждого гражданина России, воспитания поколения людей, способных эффективно работать и обучаться в течение жизни. [24]. Сегодня существует потребность не просто в знающих людях, а в тех, кто способен видеть, формулировать и решать самостоятельно новые проблемы. Таким образом, формирование и развитие исследовательских умений обучающихся является важной проблемой современного процесса обучения.

С точки зрения методики обучения и воспитания проблема формирования исследовательских способностей школьников не является новой. Вопросы, связанные с развитием исследовательских способностей учащихся в отечественной педагогике, присутствуют в трудах Б. Е. Райкова, С. А. Гуревича, Н. В. Иванковой, И. Я. Лернера, П. И. Пидкасистого, Т. И. Шамовой и многих других. В 70-80 годах 20 века появляются работы методистов, в которых на примерах различных дисциплин (гуманитарных, математических, естественнонаучных) изучены особенности формирования у обучающихся исследовательских умений и навыков.

Проанализировав исторические сведения по данной теме, можно сделать вывод, что в моменты реформирования школьного образования, обдумывания неких новшеств в сфере методики обучения интерес учащихся к исследовательским умениям и процессу их формирования обострялся.

Интерес к поставленной цели проявляется все чаще, что свидетельствует об актуальности данного вопроса. Стоит цель не только научить детей учиться, но и исследовать, думать, анализировать, делать соответствующие выводы. Также школьники могут научиться изобретать, осваивать новое, выражать собственные мысли; будут уметь принимать решения. Всему этому способствует правильно организованная исследовательская деятельность в образовательной организации. Но на текущий момент потенциал такой деятельности реализован не до конца.

Проблеме развития научно-исследовательских умений учащихся посвящено много психологических и педагогических исследований. Труды В.И. Андреева, А.И. Савенкова, А.В. Усовой, А.А. Боброва отображают основы теории и методики формирования научно-исследовательских умений учащихся. В исследованиях Н.Г. Алексеева, А.В. Леонтовича рассматривается формирование познавательной способности в процессе научно-исследовательской деятельности учащихся.

«Учебно-исследовательские умения» учеников разные авторы трактуют по-разному:

- В. И. Андреев считал, что это «умение использовать прием соответствующего научного метода познания в условиях решения проблемы, в процессе выполнения научно-исследовательской задачи»;
- А. Г. Иодко – «систему интеллектуальных, практических умений и навыков учебного труда, необходимых для выполнения исследования или его части»;
- В. П. Ушачёв – «способность ученика выполнять умственные и практические действия, соответствующие научно-исследовательской деятельности и подчиняющиеся логике научного исследования, на основе знаний и умений, которые приобретаются в процессе изучения основ наук»;

- Н. Г. Недодатко – «сложное психическое создание (синтез интеллектуальных и практических действий, усвоенных и закрепленных способов деятельности), которое лежит в основе готовности школьников к познавательному поиска»;
- С. П. Балашова – «свойство личности, которое характеризует его способность к поисково-преобразующей деятельности в образовательном процессе, а также как его способность приобретать новые знания, умения и навыки, которые способствуют его развитию».

Таким образом, учебно-исследовательскую деятельность можно определить как, «деятельность учащихся, которая организуется педагогом с использованием преимущественно дидактических средств опосредованного и перспективного управления, направленная на поиск объяснения и доказательства закономерных связей и отношений экспериментально наблюдаемых или теоретически анализируемых фактов, явлений, процессов, в которой доминирует самостоятельное применение приемов, научных методов познания и в результате которой обучающиеся активно овладевают знаниями, развивают свои исследовательские умения и способности» [6].

Поиск разъяснения и обоснования некоторых фактов, закономерностей, явлений и отношений является главной задачей исследовательской деятельности, а результатом считается личностное открытие ученика.

Всякая деятельность учащихся, подразумевающая под собой исследовательский процесс, характеризуется самостоятельно проводимым исследованием на занятиях в школе или дома под руководством учителя, исключающее непосредственное участие самого педагога в исследовании. Задача учителя состоит лишь в формулировке и разъяснении задачи, проведении инструктажа, наблюдением за ходом выполнения задания, при необходимости, в проведении корректировки работы, проверке и анализе результатов исследования.

На основе вышеизложенного перед нами возникает весьма актуальный вопрос: как обеспечить развитие исследовательских умений у обучающихся посредством психолого-педагогических методов?

Что в первую очередь необходимо ученикам, чтобы они с удовольствием искали решения проблем? У обучающихся должна быть сформированная база универсальных знаний, умений и навыков, а также присутствовать некие установки на будущее: быть творческим, находчивым, воспринимать критику, планировать, исследовать. В свою очередь дисциплина «математика» представляет широкое поле для формирования и развития личности ребенка: развиваются интеллект, воображение, творческие способности. Особенно это можно заметить в 5-6 классах, когда учащихся есть большая потребность в реализации своих способностей, знаний, желание что-то открыть, придумать. К сожалению, в последствии это желание угасает, либо полностью, либо частично. Именно этого «угасания» у детей и следует избежать, подталкивая школьников к новым открытиям, к реализации своих идей. Следовательно, проблема развития исследовательских умений учащихся является постоянной и одной из актуальных проблем в педагогической теории и практике.

Общеизвестно, что научно-исследовательская деятельность школе имеет значительный развивающий будет потенциал. Поскольку в процессе ее реализации обучающиеся образовании формируют и развивают умение отбирать изучение необходимую информацию, систематизировать ее, правильно ставить вопросы и находить ответы виды на них, условиях отыскивать неизвестное в известном.

Исходя из вышеизложенного стоит отметить, что одной из важнейших целей обучения в общеобразовательных школах является развитие у школьников конкретных видов деятельности, которые могут быть реализованы по различному содержанию и которые поэтому владеют свойством универсальности. К тому же, это такие виды деятельности, которые вполне можно использовать в будущей образовательной и профессиональной деятельность. Исследовательская деятельность можно отнести к вышеназванной деятельности, так как при ее осуществлении совершенствуются жизненно необходимые универсальные учебные действия. Следовательно, одной из важнейших целей современного обучения можно считать развитие исследовательской деятельности, а значит, формирование конкретного комплекса исследовательских умений. Но этого всего будет недостаточно без сформированности мотива как побудительного фактора для осуществления деятельности.

Любознательность и любопытство, присущие детям, способствуют развитию исследовательских навыков и умений, а, следовательно, и развитию самой исследовательской деятельности. При такой деятельности у школьников возникает потребность в образовании, им интересно и необходимо узнать, важные для них в текущий момент, новейшие факты и сведения. Для определенного количества учащихся именно исследовательская деятельность является ведущей, т.е. посредством неё овладение новыми знаниями происходит наиболее эффективно.

На сегодняшний момент исследовательская деятельность осуществляется на факультативных занятиях, кружках или в домашних условиях. Вышесказанные факты говорят о том, что данный вид деятельности должен быть обязательно включен в процесс обучения, но для этого потребуется совершенно иной подход к выборке содержания обучения и построению учебного материала. К тому же, будет намного лучше и эффективнее, если исследовательская деятельность будет включать содержание, которое относится к нескольким предметным областям одновременно, будь то родственные дисциплины или диаметрально противоположные, то есть если данная деятельность будет метапредметной. Это предоставит возможность ученикам показать важность всех предметов, а также дает шанс использовать сформированные на определенном предмете универсальные учебные действия при решении задачи по другой дисциплине, что позволит оптимизировать процесс обучения в условиях все увеличивающегося дефицита времени на изучение отдельных дисциплин. То есть уже нет необходимости заново сформировывать уже имеющиеся умения.

Но повышенная любознательность – это не единственная важная причина интереса учащихся к исследовательской деятельности. Обратимся к практической стороне вопроса. Обучающиеся при выполнении данной деятельности могут самостоятельно на практике убедиться или применить те знания, которые ежедневно получают в школе. Часто сейчас от учеников можно услышать такой вопрос: «Где нам это пригодиться?». Можно долго рассуждать с ними о будущей профессии, но именно исследовательская деятельность наглядно, как говорится «здесь и сейчас», покажет применение знаний, объяснит их необходимость.

В современных школах исследовательская деятельность весьма популярна. Администрация образовательных учреждений и учителя стимулируют участие подростков в всевозможных исследовательских изысканиях: написание ими проектов, имеющих исследовательский характер; факультативные занятия, стремящиеся дать материал свыше учебной программы; развитие внеклассной научно-исследовательской деятельности (научные общества учащихся, научные семинары и форумы). С иной стороны, в школьной практике чаще всего отсутствует концептуально осмысленный и целенаправленно организованный комплекс, способствующий развитию исследовательских умений учащихся. По причине того, что педагоги видят исследовательскую деятельность как дополнение к основному учебному процессу, а не как необходимый компонент современного образования. Это связано с тем, что учителя не владеют методикой организации данной деятельности, приемами формирования необходимых умений.

Основными этапами осуществления учебно-исследовательской деятельности можно считать:

- выделение или осознание проблемы исследования;
- сбор данных и их организацию;
- выдвижение гипотезы;
- проверку и обоснование гипотезы;
- формулирование выводов (результатов).

Посредством наблюдения, сбора, анализа, обобщения и умения делать выводы должно проводиться обучение исследовательской деятельности детей. При этом, в процессе обучения проводимая исследовательская работа должна быть по силам учащимся, а также быть интересной, полезной. Так как в основе любых проводимых исследований лежат знания, умения и навыки, полученные на уроках, проводить исследовательскую деятельность нужно как в урочное, так и в неурочное время. В процессе урочной и внеурочной работы над каким-либо исследованием ученики постепенно обучаются определять проблему, самостоятельно ставить задачи, планировать, держать под контролем, проводить рефлексию своей работы, овладевать навыками коммуникации для успешного выступления перед аудиторией, связно излагать свои мысли, уметь слушать других, задавать вопросы по проблемам выступления.

В организации исследовательской деятельности основная задача педагога – увлечь и «заразить» детей, показать им важность их деятельности и дать поверить в свои силы, а также, по возможности, привлечь родителей в школьные дела своего ребенка.

Как же ученику выбрать тему для своего исследования? Следовать за его интересами – вот, что действительно важно. Главное показать учащемуся, что тем для исследования и проектов очень много, они окружают нас. К той или иной теме нас может подтолкнуть ситуация на уроке или в обычной жизни.

В соответствии с этим под учебно-исследовательскими умениями будем понимать умения полностью или частично реализовывать этапы исследовательской деятельности. Сами учебно-исследовательские умения будут формироваться посредством выполнения учебно-исследовательских задач. А под учебно-исследовательской задачей будем понимать такие проблемные задачи, в результате выполнения которых учащиеся открывают новые знания об объекте исследования, способе или средстве деятельности и обязательно требуют от учащихся поиска, объяснения или доказательства закономерностей, связей или отношений, проведение экспериментальной проверки или теоретического анализа фактов, явлений или процессов.

Не считая общих исследовательских умений, имеют место быть специфические, присущие отдельным предметным областям. Например, к ним можно отнести умение устанавливать непротиворечивость свойств нового объекта построенной математической теории. Проще это умение в математике называется умением устанавливать существование объекта. Таких примеров можно привести множество. Они обоснованы определенными особенностями дисциплин и методами, используемыми для их изучения.

Стоит отметить, что для воплощения исследовательской деятельности на базе предметного содержания необходимо обладать этим самым содержанием. То есть знать особенности объектов этой предметной области, представлять и уметь использовать ее методы, знать содержание важнейших понятий области и уметь ими оперировать. В связи с вышесказанным целесообразно проанализировать содержание учебников и учебных пособий по математике для учащихся 5-6 классов.

§1.4 Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы

Нестандартные задачи по математике решаются не только на факультативных занятиях, кружках, но также их можно встретить в школьном курсе математики.

Проанализируем наиболее часто используемые учебники по математике для учащихся 5-6 классов, авторами которых являются А. Г. Мерзляк [13, 17], Н. Я. Виленкин [12, 16], Г. К. Муравин [21, 22], С. М. Никольский [11, 15], Е. А. Бунимович [18, 19], Г. В. Дорофеев [10, 14].

На основе проведенного анализа школьных учебников была построена таблица 1, содержащая информацию о наличии нестандартных задач в соответствии с вышеизложенной классификацией. В таблице содержатся числа от 1 до 7, согласно которым проводится оценка наличия нестандартных задач в учебнике того или иного автора, причем 1 – данный вид задачи не содержится в рассматриваемом учебнике, 7 – задачи рассматриваемого вида присутствуют в большом количестве в учебнике.

Таблица 1 – Наличие нестандартных задач в школьных учебниках следующих авторов

№	Вид задачи	Г.К. Муравин	Н.Я. Виленкин	А.Г. Мерзляк	С.М. Никольский	Е.А. Бунимович	Г.В. Дорофеев
1	Комбинаторные задачи	7	6	3	5	3	6
2	На активный перебор вариантов отношений	6	7	5	6	6	5
3	На упорядочивание элементов множества	3	4	4	4	4	4
4	На вливание и переливание	1	1	1	2	1	2
5	На взвешивание	2	2	2	1	2	1
6	Логические задачи	5	5	7	7	7	7
7	На определение функциональных, пространственных, временных отношений	4	3	6	3	5	3

Найдем средние значения наличия того или иного вида задачи нестандартного характера в учебниках математики для 5-6 классов (рис.1).

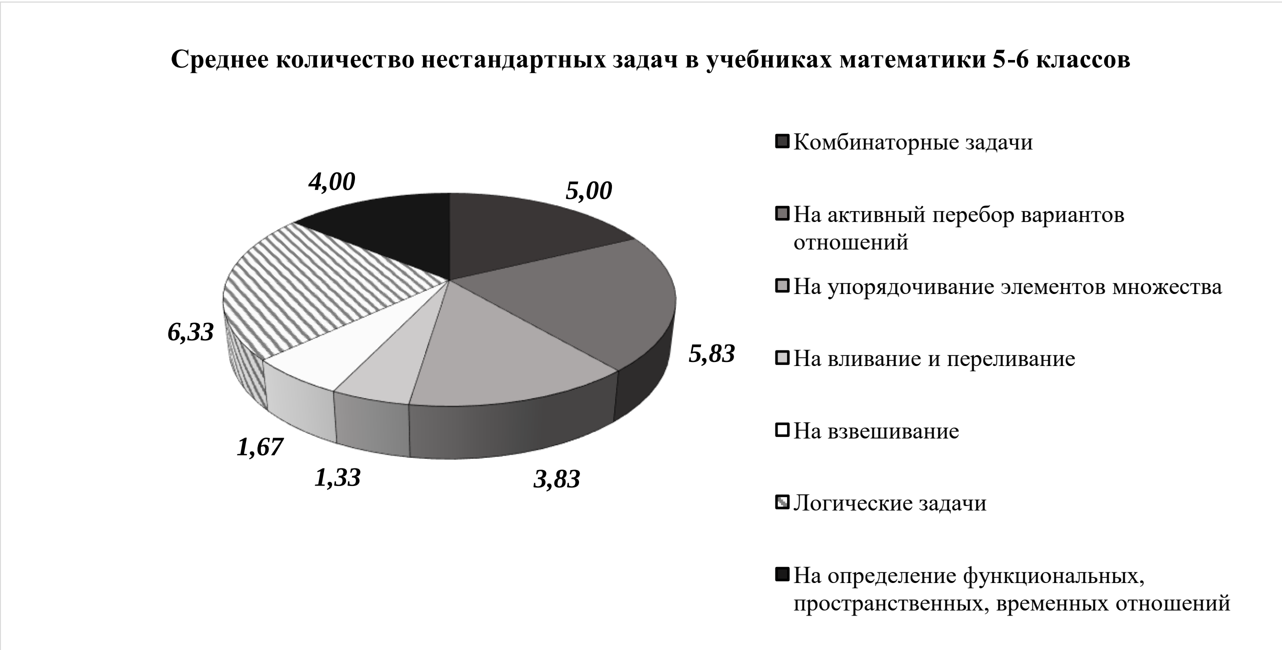

Рисунок 1.

На основе полученных данных можно сделать вывод, что при изучении математики в 5-6 классах большой упор делается на задачи логического типа. Это связано с тем, что возраст 11-13 лет – наиболее подходящий для развития логических, познавательных способностей у детей, так как такого рода задачи представляют собой комбинацию как творческих заданий, так и конкретно арифметических.

Следующим видом нестандартной задачи, представленной в большом объеме в школьном курсе математики, являются задачи на активный перебор вариантов отношений. Данные задачи вызывают положительный отклик среди учащихся, что связано с их частым желанием не решать задачу по определенному алгоритму, а подобрать такое решение, чтобы совпал ответ. Нестандартные задачи этого типа посильны не только сильным ученикам, но средним, а и иногда слабым. Как уже было сказано, это можно списать на отсутствие алгоритма или на необязательное применение математических знаний при решении данного типа задач.

Комбинаторные задачи несмотря на то, что находятся третьими по объему, встречаются часто. Задачи на комбинаторику преимущественно присутствуют в курсе математики шестого класса, а также они занимают одну из лидирующих позиций при решении нестандартных задач на факультативных занятиях. Если в пятом классе еще можно позволить учащихся решать комбинаторные задачи методом перебора, то в последующих классах и на дополнительных занятиях учащиеся должны уметь решать задачи данного вида методом комбинаторного умножения.

Задачи на определение функциональных, пространственных, временных отношений и задачи на упорядочивание элементов множества находятся в середине по среднему значении баллов. Основные теоретические сведения о задачах первого типа только начинают закладываться обучающимся на уроках математики, поэтому задачи повышенной трудности по текущей теме встречаются, но не часто. Задачи второго типа встречаются относительно редко, так как большая роль им уделялась в начальной школе на уроках математики или же, если учебная программа того позволяла, то на уроках информатики.

Задачи на взвешивание и переливание наиболее редко встречаются в школьных учебниках по математике. Однако именно данного рода задачи встречаются на олимпиадах различного уровня. Недостаток заданий связан с тем, что задачи на взвешивание и переливание имеют множество нюансов, а школьная программа не может уделить достаточного количества часов на изучение конкретно этих тем. Следовательно, возникает проблема, которую решают наличие в общеобразовательных организациях факультативных занятий, кружков, на которых как раз и происходит полный разбор всех видов нестандартных задач.

Если основное школьное образование направлено на формирование и развитие и учащихся универсальных учебных действий, то цель факультативных занятий – организация исследовательской деятельности обучающихся.

Обратимся снова к школьным учебникам по математике. Стоит отметить, что каждый учебник, независимо от автора, имеет специальные условные обозначения для нестандартных задач, расположенных в учебно-методическом комплексе. Данные обозначения можно наблюдать в табл. 2.

Таблица 2 – Условные обозначения нестандартных задач

№	**Автор УМК**	**Условное обозначение**
1	Г.К. Муравин, О.В. Муравина	«○» – задачи, в которых путь к ответу немного сложнее «●» – задачи, над которыми следует подумать «*Задачи на смекалку*»
2	Н.Я. Виленкин	 – упражнения для поисковой и исследовательской работы  – задачи, помогающие учиться думать рассуждать, делать наблюдения и выводы, расширяющие круг математических знаний и представлений  – специальные задачи и упражнения, развивающие память, внимательность, сообразительность
3	А.Г. Мерзляк	«●●» – задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений «*» – задачи для математических кружков и факультативов
4	С.М. Никольский	«*» (в левом верхнем углу номера задания) – задания повышенной трудности
5	Е.А. Бунимович	/номер задания в незакрашенном прямоугольнике/ – упражнения повышенной трудности
6	Г.В. Дорофеев	Задания группы Б – задачи повышенной трудности

Из данной таблицы видно, что в каждом учебнике присутствуют задачи для более углубленного изучения курса математики; они даже имеют свои собственные обозначения. Однако стоит отметить, что лишь в половине из предложенных учебников задания носят нестандартный характер. Это упражнения, представленные в учебниках Г. К. Муравина, Н. Я. Виленкина и А. Г. Мерзляка. Наличие таких задач говорит о направленности на более сильных учеников, количество которых в классе должно быть большое. В противном случае данного рода задачи будут опускаться учителем.

§1.5 Общие методические рекомендации по обучению решению нестандартных задач

Рассмотрим методику обучения решению нестандартных задач. Уже неоднократно было сказано, что нестандартные задачи – это задания, для которых в школьном курсе математики не предусмотрено определенных правил, алгоритмов их решения, но существуют общие рекомендации и имеются приемы, которые используются при решении данных задач. В этом заключается основная суть методики обучения нестандартным задачам.

Рекомендуется начинать решение задачи с её анализа: попробовать определить тип задачи; вспомнить сталкивались ли с такими задачами ранее; попросить учащихся переформулировать условие задачи на собственный лад; определить шаги выполнения задания. При необходимости задачу можно разбить на несколько подзадач (синтез) или же начать решать с конца (анализ). Также не стоит отталкивать метод подбора, так как это тоже один из способов решения нестандартных задач. Не обязательно применять все перечисленные рекомендации при решении одного упражнения; достаточно использовать только те, которые подходят к той или иной ситуации и приведут к правильному решению задачи именно учащимися. В этом и заключается организация исследовательской деятельности в процессе решения нестандартных задач.

Первоначально необходимо детям показать сам процесс решения упражнений нестандартного характера, совместно выполнив несколько задач.

Рассмотрим задачу №1063 из учебника Н. Я. Виленкина «Математика. 5 класс» (задача обозначена символом «лупа», см. табл. 2): «Сколько получится, если удвоить половину числа *a*?». Сначала ученики решают задачу, после учитель интересуется решали ли они подобные задачи, известен ли учащимся способ решения. Здесь ученики скорее всего применят свой излюбленный способ решения, а именно подставят вместо *a* некоторые числа. Да, ответ школьники выведут верный, однако нужно объяснить, что это будет частным решением данной задачи, а необходимо найти общее решение. Именно в этом моменте начинается момент исследования. Необходимо попросить учеников рассказать, как они понимают эту задачу; что, по их мнению, должно получиться в ответе; с конца или с начала нужно начать решать. В данном случае учащимся необходимо показать два способа решения. Первый способ ориентирован на практическую составляющую, на ситуации, знакомые каждому ребенку. Например, предложить детям «удвоить половину яблока». Для наглядности все рисунки лучше изображать на доске или иллюстрировать с использованием информационно-коммуникационных технологий. Так как ранее было сказано, что данная задача решается с конца, то учащимся будет предложен рисунок половины яблока, который нужно удвоить, то есть из одной половину получить две. При изображении двух половинок яблока, обучающиеся уже самостоятельно придут к правильному ответу. Нужно учесть, что ход решения проговаривается либо совместно с детьми, либо только детьми, задавая им наводящие вопросы. Можно предложить еще 1-2 примера с предметами из реальной жизни, которые дети могут потрогать: с листами бумаги, сложенными пополам и т.п. Или же попросить решить задачу с помощью чертежа. Второй способ непосредственно арифметический, и он связан с темой «Дроби», которую как раз проходят на момент решения данной задачи. Таким образом, важно донести, что не важен способ решения задачи, а важны рассуждения, то есть сам процесс исследования. Именно этот процесс всегда приведет к правильному решению, какой бы сложной задача не казалось изначально.

Так как вышеназванная задача является простой нестандартной задачей по той причине, что тема «Дроби» только начала изучаться, то соответственно потом пойдут задачи сложнее. Но учащимися была уже рассмотрена задача простого типа, при её решении они усвоили несколько рекомендаций, поэтому «сложная» задача не вызовет того пугающего эффекта, если бы они с ней столкнулись раньше. Таким образом, при формировании умения решать нестандартные задачи необходимо идти от простой задачи к более сложной. Нужно научить учащихся опираться на ранее решенные задачи и на рекомендации при решении. Также эффективный результат развития исследовательских способностей даст сочетание разных видов нестандартных задач.

Глава 2. Система нестандартных задач по курсу математики 5-6 классов

§2.1 Развивающие задачи, как способ подготовки к обучению решению нестандартных задач

Согласно А. Д. Семушину и К. И. Нешкову задачи в школьном курсе математики можно классифицировать по функциям на них возлагающим [23]:

1) задачи с дидактическими функциями;
2) задачи с познавательными функциями;
3) задачи с развивающими функциями.

Данная классификация позволяет учителям тщательно производить отбор задач, направленных на усовершенствование тех или иных способностей ребенка. Так за усвоение теоретического материала больше отвечают задачи с дидактическими функциями, при решении задач с познавательными функциями учащиеся рассматривают различные методы решения задач, а задачи с развивающими функциями отличны тем, что содержание таких задач часто отличается от школьной программы уровнем сложности самих задач.

Е. И. Лященко было предложено следующее понятие развивающих задач (задач с развивающими функциями) [25]:

– задачи, для решения которых не требуются новые знания по предмету, надо применять имеющиеся в иной комбинации;
– задачи, с помощью и на основе которых приобретаются знания по предмету.

При решении развивающих задач требуется не только объяснить материал, но и сформировать и развивать у учащегося способность мыслить нестандартно, самостоятельно искать новые знания, задавать вопросы и находить на них ответы. Именно здесь можно заметить, что развивающие задачи являются своеобразным мостом между школьным материалом и нестандартными задачами.

Стоит отметить, что в процессе решения развивающих задач у учащихся формируются следующие умения [3]:

– подмечать закономерности;
– выполнять геометрические чертежи и читать их;

– пользоваться примерами и контрпримерами;
– выводить следствия из заданных условий.

Перечисленные умения находят свое применение не только при решении определенных задач, но и играют существенную роль при изучении курса математики 5-6 классов. Уже в шестом классе можно встретить задачи, при решении которых необходимо использовать рассуждения, основанные на методе доказательства от противного. К тому же перечисленные умения служат хорошей базой для постепенного перехода к решению более сложных нестандартных задач. В соответствии с этим можно утверждать, что обучение решению развивающих задач является подготовкой к обучению решению нестандартных задач.

Уже не единожды подчеркивалось, что процесс исследования при решении задач очень важен. Так Н. В. Толпекина и В. А. Далингер [4] утверждают, что задатки для саморазвития каждого школьника формируются в условиях развивающего обучения при исследовательской деятельности. Кроме того, рекомендуется уделять исследовательской деятельности не только внеурочное время, но и часть времени на уроке. Наиболее удачным способом для этого считаются развивающие задачи, которые в основном посильны большому числу учащихся, в отличие от нестандартных задач.

Рассмотрим несколько примеров развивающих задач, которые могут найти свое применение на уроках математики 5-6 классов.

Пример 1. Выполните действия:

$$\text{а) } (568039 + 3915) + (21961 - 915);$$

$$\text{б) } 468 \cdot 37 + 25 \cdot 31 + 468 \cdot 63 + 9 \cdot 25.$$

При выполнении данного номера ученики должны не просто выполнить ряд простейших действий и прийти к ответу, но и проанализировать выражение на возможность вычисления наиболее удобным способом. Данные примеры следует дать учащимся до прохождения темы «Законы арифметических действий» или представить, как подводку к ней. Занимаясь исследованием, учащиеся должны понять, что вычисление сводится к нахождению быстрого способа выполнения представленных действий. С помощью проб и ошибок школьники придут к выводу, между какими числами нужно выполнить первоначальные действия в выражении (пункт а); научаться видеть общие множители, которые для упрощения вычислений необходимо выносить за скобки (пункт б). Процесс получения данной информации прекрасно развивает у учащихся исследовательскую деятельность, а сами знания не только помогут в дальнейшем на уроках алгебры при изучении темы «Многочлены», но и являются хорошей базой для решения нестандартных задач.

Пример 2. Вычислите:

$$1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + 93 - 95 + 97 - 99.$$

Данную задачу предпочтительно дать на обсуждение учащимся шестого класса, так как ответом является отрицательное число, с которым ученики пятого класса еще не знакомы. Попытка обучающихся решить данный пример начнется с арифметических действий над предложенными числами. Необходимо дать учащимся возможность найти решение самостоятельно. Если на уроке времени недостаточно, то дать задание на дом. После того, как все ответы будут озвучены детьми, поинтересоваться способом решения, и в случае отсутствия нестандартных способов, продемонстрировать наиболее подходящий. В результате всех перечисленных действий необходимо прийти к единому способу решения подобных задач. Среди любого количества учащихся обязательно найдется тот, кто уловит закономерность и найдет рациональный способ решения. Процесс вычисления данного примера развивает у обучающихся логическое мышление, учит мыслить нестандартно, а также реализует исследовательские наклонности.

Пример 3. В турнире по шашкам принимало участие 5 человек. Каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько партий они сыграли?

Учащимся предлагается решить типичную комбинаторную задачу, которая может встретиться как в учебнике математике, так и на факультативных занятиях. Естественно, никаких формул комбинаторики школьникам 5-6 классов не известны, и даже не стоит их предлагать. Задачи на перебор элементов стоит начать решать с наводящих вопросов. Например, «Если принимает участие 5 человек, то каждый участник со сколькими людьми может сыграть?», «Сколько тогда игр возможно?», «Могут ли игроки дважды встретиться за игровым столом?». Данные наводящие вопросы подтолкнут учащихся к решению задачи, и они смогут решить её по действиям, что им давно знакомо. После рекомендуется предложить учащимся другой способ решения данной задачи – графический, а именно с помощью дерева решений. Предложенный способ как нельзя лучше развивает у учащихся пространственное мышление, выходящее за рамки обычных арифметических действий. Развивающие задачи, как исток нестандартных задач, должны научить думать, а не мыслить шаблонно. Именно поэтому так важно рассматривать все способы решения задач и никогда не отклонять способы решения, предложенные детьми.

Обратимся к учебному пособию П. М. Горева и В. В. Утёмова [2], который представляет собой сборник задач для проведения дополнительных занятий по математике в 5-6-х классах. По словам авторов «книга предназначена в первую очередь для учеников 5-6-х классов, желающих повысить уровень своих знаний по математике, привить себе стойкий интерес к предмету, приобщиться к опыту творческой деятельности, направленной на оригинальное, сильное мышление». Учебное пособие содержит девять частей, состоящих из разных по тематике задач, развивающих тот или иной вид универсальных учебных действий или же их совокупность.

Первая часть книги состоит из тридцати серий развивающих задач по математике, каждая из которых содержит шесть задач. В состав каждой серии входят задачи, решаемые арифметическим способом, задачи логического и комбинаторного характера, задачи с геометрическими фигурами и задачи на смекалку. Как уже было сказано выше, данные задачи носят развивающий характер, то есть они являются подготовкой учащихся к решению более сложных нестандартных задач. По причине того, что каждая серия задач содержит в себе разные по тематике задания, ученики постепенно нарабатывают опыт. Впоследствии при выполнении похожих заданий у учащихся не будет возникать вопросов по методике их решения.

Более подробно рассмотрим одну из серий развивающих задач по математике, предложенную авторами. Стоит отметить, что авторы учебного пособия условно разделили страницы с каждой серией на две части – слева находятся сами условия задач, справа – место для записи ответов на предложенные задания, содержащей необходимые иллюстрации. Данное разделение удобно, если для проверки учителю необходимы только ответы, в ином случае предпочтительнее проверять решения задач, так как это позволяет проследить ход мыслей учащихся. Обратимся к тринадцатой серии задач, содержащий задания с № 73 по № 78.

Задача 73. Яхта отправилась в плавание в понедельник в полдень. Плавание будет продолжаться 80 часов. В какой день и час яхта вернется обратно?

Данная развивающая задача относится к заданиям, решаемых арифметическим способом. При выполнении стоит обратить внимание учащихся на знание ими понятия «полдень», а также дней недели и количество часов в сутках. Задание обычно не вызывает трудности у учащихся, так как подобные примеры можно встретить и на уроках математики. Первым действием необходимо найти сколько суток вмещается в восьмидесяти часах и сколько еще останется (80 часов = 3 суток и 8 часов). Остается после этого только правильно отсчитать дни и прибавить к полудню оставшиеся восемь часов. На данном этапе дети могут поторопиться, посчитав, что если понедельник – первый день недели, то спустя трое суток наступить третий, то есть среда. В этом случае необходимо решение показать схематически на доске.

Ответ: четверг, 20.00 (8 часов вечера).

Задача 74. Украли Василису Прекрасную. Поехал Иван-царевич выручать её. Встретил Змея Горыныча, Бабу-ягу, Кощея Бессмертного и Лешего. Иван-царевич знал, что один из них украл Василису. Он спрашивает: «Кто украл Василису?». Змей Горыныч, Баба-яга и Кощей ответили: «Не я», а Леший: «Не знаю».

Потом оказалось, что двое из них сказали правду, а двое – неправду. Знает ли Леший, кто украл Василису?

Перед учениками ставится типовая логическая задача, которая обычно решаются с помощью таблицы, так как наглядно демонстрирует ход решения и не позволяет учащимся запутаться в своих рассуждениях. Для решения этой задачи также построим таблицу размером 5×5 (табл. 3).

Таблица 3 – Решение задачи №74

	1 случай	2 случай	3 случай	4 случай
Змей Горыныч	+	+	–	–
Баба-яга	+	–	+	–
Кощей Бессмертный	–	+	+	+
Леший	–	–	–	+

Так как по условию задачи двое говорили правду, то в первом случае предположим, что это были Змей Горыныч и Баба-яга, тогда соответственно Кощей Бессмертный и Леший соврали. Проверим правильность данного случая. Если Змей Горыныч и Баба-яга сказали правду («Не я»), тогда Василису украл Кощей, а Леший знал об этом. Рассуждения верны, и не противоречат условию задачу о единственности похитителя. Второй и третий случай аналогичны, однако во втором случае похитила Василису Баба-яга, в третьем – Змей Горыныч (см. табл. 3). В четвертом мы случае мы предположили, что солгали Змей и Баба-яга, а Кощей и Леший сказали правду. Но из этого следует, что украли двое, что противоречит условию задачи. Следовательно, данный случай нам не подходит, а также случаи, в которых солгали двое из тех, кто говорил: «Не я» (в таблице не рассмотрены). Соответственно случаи 1-3 верны.

Можно было воспользоваться упрощенным вариантом таблицы, то есть без использования 2 и 3 случая, однако, если при решении у учеников возникают трудности, этим пренебрегать не стоит. Также необходимо обратить внимание школьников на вопрос задачи: не спрашивается, кто похитил. Поэтому при рассмотрении случаев 1-3 стоит заметить, что напротив Лешего в ячейках всегда стоит знак «–», то есть солгал.

Ответ: знал.

Задача 75. Разделите изображенную фигуру на 4 равные части (рис. 2).

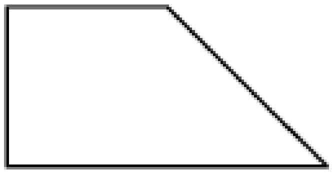

Рисунок 2.

Мы наблюдаем задачу с геометрическим содержанием. При выполнении данного номера стоит назвать фигуру, с которой дети раньше не встречались, отметить её особенности. Конкретно на рисунке, предоставленным авторами учебного пособия, высота делит нижнее основание на два равных отрезка. Рекомендуется для наглядности выполнить построение на клетчатой бумаге, а также начертить клетки на доске для объяснения материала. Кроме того, необходимо дать понять учащимся, что трапеция содержит острый угол, который играет большую роль при делении фигуры на части. После разъяснения всей нужной информации, рекомендуется дать волю фантазии учащихся, объясняя ошибки, которые могут возникать при решении.

Ответ: рис.3.

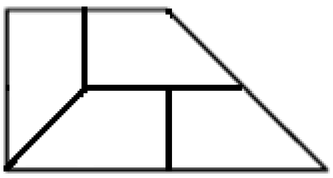

Рисунок 3.

Задача 76. Шесть карасей легче пяти окуней, но тяжелее десяти лещей. Что тяжелее: два карася или три леща?

Прежде чем приступить к решению задачи необходимо спросить у учащихся, нет ли здесь лишних условий, отбросив которые, значительно упростим себе поиск решения. Да, здесь присутствует лишняя информация об окунях, информацию о которых опустим. Решение можно начать с записи неравенства (знаки сравнения учащимся знакомы, однако в задаче знак «>» будет означать «тяжелее», знак «<» – «легче»):

$$10 \text{ лещей} < 6 \text{ карасей}.$$

Так как в итоге нам необходимо сравнить два карася и три леща, то можно догадаться, что 2 карася получим, разделив имеющиеся шесть на три. Но что же делать с десятью лещами? На данном этапе необходимо логически порассуждать и применить смекалку. Если шесть разделили на три, то и десять необходимо разделить на то же число, что невозможно выполнить, так как десять нацело на три не делится, но на три делится ближайшее к десяти число девять. Проверим, можно ли заменить лещей девятью:

$$9 \text{ лещей} < 10 \text{ лещей} < 6 \text{ карасей}.$$

По свойству транзитивности данный процесс выполнить можно, не нарушив условие задачи. Тогда разделим все неравенства на три и получим следующее:

$$3 \text{ леща} < 2 \text{ карася}.$$

Ответ: 2 карася тяжелее.

Задача 77. Сколько трехзначных чисел, в записи которых использована хотя бы одна цифра 2?

Учащимся необходимо решить задачу на комбинаторику. Первоначально нужно определиться с количеством трехзначных чисел – 900. Далее процесс рассуждения заключается в следующем: посчитать количество чисел, у которых на первом, втором или третьем месте стоит цифра 2, причем числа в каждой группе не должны повторяться. Первая группа – числа вида 2**. Таких чисел всего 100: от 200 до 299. С этими числами больше не работаем, осталось восемь сотен. Стоит сразу объяснить учащимся, что не имеет смысла работать с каждой сотней, достаточно посчитать количество чисел в одной сотне и потом умножить на восемь. Рассмотрим числа от 100 до 199. Вторая группа – числа вида *2*. Таких чисел в заданном интервале 10: от 120 до 129. Перечисленные числа также больше не считаем, то есть в данном сотне работаем с оставшимися девятью десятками. И третья группа – числа вида **2. Таких чисел всего 9: по одному в каждой из оставшихся десяток. Осталось все подсчитать:

$$100 + (10 + 9) \cdot 8 = 252.$$

Ответ: 252 числа.

Задача 78. Ира, Наташа, Алёша и Витя собирали грибы. Наташа собрала больше всех, Ира не меньше всех, а Алёша – больше, чем Витя. Верно ли, что девочки собрали грибов больше, чем мальчики?

Данную задачу также, как и задачу 76 рекомендуется решать с помощью знаков сравнения. Об этом нам говорит само условие задачи, используя слова «больше», «меньше». Также при разборе задачи важно не упустить момент и объяснить, что значит «не меньше всех», чтобы не допустить ошибочных рассуждений учащихся. Неравенство, соответствующее задаче, можно представить двумя различными способами:

$$1)\ \text{Витя} < \text{Ира} < \text{Алёша} < \text{Наташа};$$

$$2)\ \text{Витя} < \text{Алёша} < \text{Ира} < \text{Наташа}.$$

Оба варианта будут верными, так как удовлетворяют условиям задачи. Часто при решении подобных задач учащиеся подставляют конкретные значения. Да, ответ получают верный, но это будет только частным решением, а для полного понимания задачи необходимо найти общее решение. Для нахождения ответа в данном задании достаточно сравнить количество грибов у Наташи и Алёши, у Иры и Вити. В обоих случаях количество грибов у девочек будет больше, соответственно, именно они собрали грибов больше, чем мальчики.

Ответ: верно.

Выше была рассмотрена одна из серий развивающих задач, входящих в первую часть учебного пособия П. М. Горева и В. В. Утёмова [2], которая включает в себя 180 развивающих задач (в первой части 30 серий по 6 задач в каждой). Каждая серия содержит непохожие друг на друга задачи, объединенные лишь одной тематикой. Данные серии подойдут для разбора на уроках математики, если позволяет учебная программа, на факультативных занятиях и для организации самостоятельной работы учащихся по математике. На факультативных кружках рекомендуется их использовать как подготовку к решению основных нестандартных задач, то есть на первых 4-8 занятиях, в зависимости от того, насколько часов рассчитан курс. Это не только морально подготовит учащихся, но и сформирует хорошую базу для беспроблемного решения нестандартных задач и позволит оценить способность детей к проведению исследований при решении математических задач.

Так как большинство задач, представленные в школьных учебниках, являются алгоритмическими, то процесс обучения математике для школьников теряют ту привлекательность, которая была свойственна ей в дошкольном и начальном образовании, и включение развивающих задач в школьные уроки математики позволит поддерживать интерес к предмету, желание ее изучать.

Развивающие задачи, представленные в сборнике, подходят для учащихся 5-6-х классов, соответствуют их знаниям, полученными на уроках математики.

На основе проведенного анализа учебного пособия П. М. Горева и В. В. Утёмова [2] мной была выявлена необходимость применения развивающих задач как на уроках математики, так и на факультативных занятиях.

В соответствии с этим мной был разработан ряд развивающих задач по математике для учащихся 5-6 классов для использования в урочное и внеурочное время как способ подготовки к обучению решению нестандартных задач.

Задание 1. В следующем примере расставить знаки арифметических действий и скобки таким образом, чтобы получилось верное равенство:

$$2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0 = 2020.$$

Задача представляет собой задание арифметического характера. Целью выполнения данной задачи является развитию у учащихся исследовательских навыков в процессе рассмотрения и перебора всех возможных вариантов решения. В таких задачах стоит обратить внимание на то, что может существовать более одного варианта решения, и направить школьников на продолжение поисков всех возможных случаев. При выполнении обучающимся достаточно владеть знаниями математики начальной школы об основных арифметических действиях.

Задание 2. Пятеро школьников из пяти различных городов приехали в Чебоксары для участия в олимпиаде по математике. «Откуда вы?» - спросили их. Волков: «Я живу в Казани, а Смирнов – в Нижнем Новгороде». Кузьмин: «В Нижнем Новгороде живет Михайлов, я прибыл из Йошкар-Олы». Михайлов: «Из Казани приехал я, а Кузьмин – из Ульяновска». Смирнов: «Я прибыл из Нижнего Новгорода, а Фролов – из Самары». Фролов: «Волков приехал из Йошкар-Олы, а я действительно живу в Самаре». Каждый назвал одно правильное утверждение, а другое ложное. Откуда приехал каждый школьник?

Перед нами один из распространенных видов логических задач, в которых необходимо сопоставить ребят с городами, откуда они приехали, основываясь на условии задачи. Задания такого типа решаются табличным способом для безошибочного поиска ответа с помощью расставления в ячейках знаков «плюс» и «минус». Цель решения задачи – развитие у учащихся логического мышления в процессе выполнения жизненных заданий. Для выполнения данной развивающей задачи обучающимся достаточно владеть теми универсальными учебными действиями, которые в них заложены в начальной школе, а именно рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности, установление причинно-следственных связей, построение логической цепи рассуждений и так далее.

Задание 3. Необходимо расставить в ряд 5 девочек и 4 мальчика так, чтобы каждый мальчик стоял между двумя девочка, а каждая девочка между двумя мальчиками (условие не касается первого и последнего ребенка). Сколько существует различных вариантов расстановки детей, учитывая, что, если поменять двух девочек местами, то получим другую комбинацию расстановки?

Мы наблюдаем задачу комбинаторного характера. Так как перебор всех вариантов не является рациональным способом решения данной задачи, то учащимся на момент выполнения данного номера нужно владеть таким способом решения, как дерево решений. Оно позволяет наглядно продемонстрировать учащимся все возможные случаи, ни один не потеряв, что возможно при переборе. Цель задания – умение преобразовать объект из текстовой формы в графическую или знаковую модель; развитие творческого подхода к выполнению математических задач.

Задание 4. Сколько черных прямоугольников содержится в заданном прямоугольнике (рис. 4)?

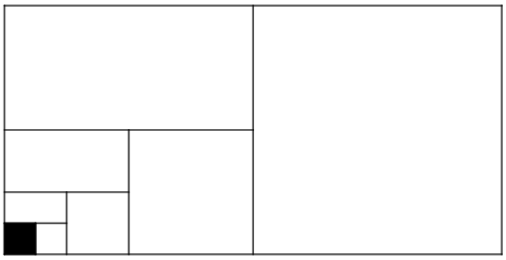

Рисунок 4.

Предложенная задача с геометрическим содержанием требует от учащихся знаний понятия «прямоугольник». Цель выполнения данного задания – развитие пространственного мышления. При выполнении важно обратить внимание учащихся на присутствующую в задаче закономерность, которая позволит выполнить задание арифметическим способом и существенно быстрее, чем подсчет фигур на рисунке.

Задание 5. Какой сегодня день, если послезавтра не воскресенье; вчера был будний день, завтра тоже не выходной; до наступления субботы дней больше, чем прошло с предыдущей субботы?

Задание, представляющее собой совокупность логической задачи и задачи на смекалку, может вызвать некую трудность у учащихся, так как им необходимо иметь знание о днях неделях, о понятии «будний день» и логических операциях, а также нужно убедиться в полном понимании школьниками смысла задачи и способе решения. Решение задачи содержит такой метод, как доказательство от противного, то есть ученики должны понимать, что при выполнении подобных заданий нужно не искать ответ, а вычеркивать неподходящие. Данные развивающие задачи решаются с целью формирования умения систематизировать и преобразовывать информацию с помощью построения логической цепи рассуждений.

Задание 6. Продолжи ряд тремя числами:

$$4, 12, 9, 45, 40, 280, \dots .$$

Задачи на поиск закономерности в ряду – одна из важнейших тем в математике, так как развивает у учащихся аналитические способности, умение сравнивать, обобщать и делать выводы. Для выполнения таких задач учащимся необходимо обладать специфическим математическим воображением, так как школьникам нужно найти алгоритм, согласно которому в ряду чисел происходит их повторение, изменение или замещение в соответствии с установленным правилом. Это правило детям и нужно найти, отвечая на наводящиеся вопросы учителя, если возникает сложность.

Предложенные мной развивающие задачи либо попадают под классификацию нестандартных задач (Гл.1, §1.1), либо являются подготовкой к решению подобных задач. Таким образом, развивающие задачи по математике бесспорно являются отличной базой для обучения решению нестандартных задач как на уроках математики, так и на факультативных занятиях.

На основе всего вышеизложенного можно прийти к выводу, что в настоящее время обучение в школе, а именно на стандартных уроках, строится по формуле:

«усвоение = понимание + запоминание»,

но это не позволяет учащимся думать и в полном мере овладевать всеми знаниями и универсальными учебными действиями, поэтому в основу современной школы необходимо положить следующую формулу:

«овладение = усвоение +применение знаний на практике»,

которая в полном объеме реализуется в процессе реализации регулятивных действий. В настоящий момент данная формула находит свое применение при решении нестандартных задач, рассмотрение которых возможно на факультативных занятиях.

§2.2 Различные идеи и методы математики в задачах

Эффективность обучения учащихся решению нестандартных задач зависит от нескольких условий:

1. Задачи следует вводить в процесс обучения определенным образом, постепенно повышая уровень сложности, так как непосильная задача негативно скажется на развитии учащихся.

2. Важно предоставить учащимся максимальную самостоятельность в поиске решения задач, дойти до конца, убедиться в ошибочности ответа, ввернуться к условию и заново приступить к поиску решения.

3. Необходимо объяснить учащимся разные способы, приёмы, методики решения различных нестандартных задач.

В §1.1 была предложена одна из классификация нестандартных задач. Однако каждую из семи групп задач можно разбить на подгруппы, которые представляют собой набор заданий определенной тематики, обладающих одинаковой или схожей методикой выполнения.

П. М. Горев и В. В. Утёмов во второй части своего учебного пособия [2] переходят от развивающих задач, рассмотренных в первой части, непосредственно к нестандартным задачам. В данном разделе авторы демонстрируют собственное видение разделения нестандартных задач на подгруппы, о которых речь шла выше. Всего мы можем наблюдать двадцать видов нестандартных задач. «Решая эти задачи, важно запоминать не ход их решения, а ту общую идею, которая в них заложена. Большинство заданий этой части относятся к олимпиадным математическим задачам, которые могут встретиться на соревнованиях различного уровня», - подчеркивают авторы в предисловии учебного пособия. Рассмотрим те, виды задач, которые находили свое применение в моей практической деятельности.

– **Разберем все варианты**

Задачи данного типа решаются перебором всех возможных вариантов решения до тех пор, пока не будет получен правильный ответ. Здесь задачи не всегда имеют единственное правильное решение. Однако, если ответ учащегося удовлетворяет всем условиям задачи, то он принимается как правильный.

Задача 183. Три богатыря – Илья Муромец, Добрыня Никитич и Алеша Попович, защищаясь от нашествия на родную землю, срубили Змею Горынычу все 13 голов. Больше всех срубил Илья Муромец, а меньше всех – Алеша Попович. Сколько голов мог срубить каждый из них?

По вопросу задачи уже можно предположить, что возможно несколько правильных ответов. На олимпиадах по математике учащимся достаточно привести один из вариантов, но при обучении решению таких задач необходимо рассмотреть все варианты. Решение сводится к тому, чтобы представить число 13 в виде суммы трех разных чисел. Перебор всех вариантов удобнее начинать с Алеши Поповича, так как он срубил меньше всех. Для наглядной демонстрации всех возможных случаев воспользуемся таблицей (табл. 4).

Таблица 4 – Решение задачи 183

Алеша Попович	Добрыня Никитич	Илья Муромец	Всего
1	5	7	13
1	4	8	
1	3	9	
1	2	10	
2	5	6	
2	4	7	
2	3	8	
3	4	6	

– **«Табличная» логика**

Задачи, решаемые с помощью таблиц, одни из самых распространенных среди логических заданий. Решить одну и ту же задачу и прийти к правильному ответу во многих случаях можно разными способами. Знание и понимание различных методов решения поможет определить, какой способ подойдет в каждом конкретном случае. «Табличные» логические задачи требуют от учащихся сопоставить элементы множеств: имя и фамилию, имя и город, брат и сестра и т.д. То есть необходимо сразу дать понять учащимся, что в таких случаях нужно использовать для решения таблицу. Суть метода состоит в фиксации условий задачи и результатов собственных рассуждений в ячейках с помощью знаков «+» и «–» или «1» и «0», что соответствует истинности и ложности высказывания.

Задача 191. В одной школе учатся три друга: Сергей, Коля и Максим. Их фамилии Петров, Семёнов и Иванов. Сергей учится в пятом классе, мама Коли инженер. Иванов учится в шестом классе, его мама бухгалтер. Сергей и Семёнов болеют за разные футбольные клубы. Как зовут Петрова, Семёнова и Иванова?

Составим таблицу (табл. 5): строками которой будут фамилии друзей, а столбцами – имена.

Таблица 5 – Решение задачи 191

	Сергей	Коля	Максим
Петров	+	–	–
Семёнов	–	+	–
Иванов	–	–	+

Для расстановки знаков последовательно читаем предложения в условии задачи. Рассмотрим третье и четвертое предложения, проанализируем утверждения и заполним таблицу. Исходя их того, что Сергей учится в пятом классе, а Иванов в шестом, то фамилия Сергея не Иванов (ставим «–»). Аналогично фамилия Коли не Иванов, так как не совпадает профессия мамы. Следовательно, у Максима фамилия Иванов. Если в какой-то ячейке стоит плюс, то в соответствующих столбце и строке в остальных ячейках проставляем знак «минус», что упрощает поиск правильного ответа на задачу. В следующем предложении упоминается «Сергей и Семёнов», значит Сергей не является обладателем данной фамилии (ставим «–»). В столбце с именем Сергей стоят два минуса, отсюда следует вывод, что его фамилия – Петров. Тогда фамилия Коли – Семёнов. Так последовательно рассуждая приходим к правильному решению логической задачи, используя только таблицу.

– **Эффект «плюс-минус один»**

Данный эффект возникает в задачах тогда, когда искомый ответ несколько отличается от числа, которое мы хотим назвать сходу. Рассмотрим на примере.

Задача 205. В ряд записаны числа: 15, 16, 17, …, 39, 40. Сколько их всего?

Первое желание учащихся, когда они встречаются с такой задачей – это вычесть из 40 число 15, и таким образом получить ответ. Но, естественно, он будет неправильным. Далее обычно от школьников поступает предложение расписать все число просто посчитать. В данном случае важно объяснить, что такой способ имеет право на существование, но он весьма трудоёмкий.

Существует несколько методик для решения подобных задач. Обратимся к той, которая наиболее проста для запоминания учащимся 5-6 классов. Необходимо начать с наводящих вопросов: «Сколько всего чисел от 1 до 40?», «А от 1 до 14?». Дальше учащиеся уже самостоятельно придут к выводу, что из 40 нужно вычесть 14 и тогда они получат ответ. Таким образом, следует обратить их внимание на то, что подсчет чисел, начиная с единицы, им знаком и они всегда могут своим знанием воспользоваться.

Часто у учащихся при решении каких-либо задач на уроках математики или дополнительных кружках возникает вопрос о количестве двузначных и трехзначных чисел. Это также можно отнести к эффекту «плюс-минус один». Здесь также помогаем обучающимся наводящими вопросами: «Какое самое большое двузначное число?», «Какое самое маленькое?», «Сколько чисел от 1 до 99?», «Сколько чисел от 1 до 9?» и так далее. Постепенно дети запомнят количество двузначных и трехзначных чисел и у них уже не будет возникать такого вопроса.

– **Переливания**

Один из самых распространенных видов нестандартных логических задач. В олимпиадных заданиях различного уровня непременно можно встретить подобную задачу. В задачах на переливание с помощью сосудов известных ёмкостей требуется отмерить некоторое количество жидкости. Все задачи на переливание можно разделить на два типа:

1) «Водолей» – задачи, в которых необходимо получить некоторое количество жидкости с помощью нескольких пустых емкостей из бесконечного источника, из которого можно наливать жидкость, и в который ее можно выливать.

Алгоритм для решения задачи данного типа:

- Наполнить большую емкость жидкостью из бесконечного источника.
- Перелить из большей емкости в меньшую емкость.
- Вылить жидкость из меньшей емкости.
- Повторить действия 1-3 до тех пор, пока не будет получено обозначенное в условии задачи количество жидкости.

2) «Переливашка» – задачи, в которых необходимо разделить жидкость в большей емкости с помощью нескольких меньших по объему емкостей, жидкость можно только переливать из одной емкости в другую.

Алгоритм для решения задачи данного типа:

- Из большей емкости наполнить емкость промежуточного объема.
- Перелить жидкость из промежуточной емкости в самую маленькую емкость.
- Перелить жидкость из самой маленькой емкости в большую емкость.
- Повторять действия 2-3 до тех пор, пока емкость промежуточного объема не станет пустой.
- Если емкость промежуточного объема опустела, то повторить действия 1-5 до тех пор, пока не будет получено обозначенное в условии задачи количество жидкости.

При решении таких задач необходимо учитывать следующие замечания:

– разрешается наливать в сосуд ровно столько жидкости, сколько в нем помещается;

– разрешается переливать всю жидкость из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается;

– разрешается отливать из одного сосуда в другой столько жидкости, сколько необходимо, чтобы второй сосуд стал полным.

Каждую задачу на переливание таким методом можно решать двумя способами:

I. начать переливания с большего сосуда;

II. начать переливания с меньшего сосуда.

Какой из способов более рационален (т.е. каким способом мы быстрее получим нужное количество жидкости) зависит от условий задачи. Изначально это определить нельзя.

Задача 233. Имеются два пустых бидона – трёхлитровый и пятилитровый. Как, пользуясь этими бидонами, набрать из реки ровно 1 л воды?

Первый шаг – определить тип задачи на переливание. Так как в условии задания упоминается река, то это тип «Водолей», так как река – бесконечный источник воды. Далее остаётся следовать чётко заданному алгоритму данного типа задачи. Ответ оформляется в виде таблицы (табл. 6), демонстрирующей весь процесс переливания воды.

Таблица 6 – Решение задачи 233

3 л	0	3	0	2	2	3	0	3
5 л	5	2	2	0	5	4	4	1

– **Правила комбинаторики**

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами. Комбинаторика изучает комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами. Основной задачей комбинаторики является определение количества комбинаций элементов, подчиненных заданным условиям. Комбинаторика рассматривает только конечные множества.

Основные правила комбинаторики – это правило суммы и правило произведения.

- Правило суммы: если некоторый элемент a из множества A можно выбрать m способами, а элемент b из множества B – n способами, то выбор «a или b» можно осуществить $m+n$ способами.

- Правило произведения: если элемент a из множества A можно выбрать m способами, а элемент b из множества B можно выбрать n способами, причем выбор элемента a, не зависит от выбора элемента b, то пару вида «a и b» можно составить $m \cdot n$ способами.

Задача 246. В Стране чудес есть три города: А, Б и В. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги (рис. 5). Сколькими способами можно проехать от А до В?

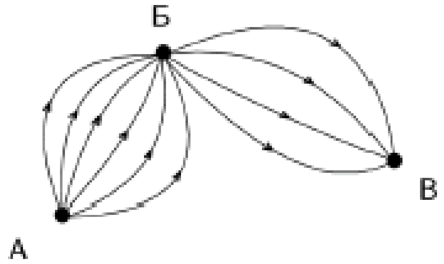

Рисунок 5.

Первый способ решения, который сразу предлагают учащиеся, – посчитать все дороги на рисунке, следя по стрелочкам. Данный способ имеет право на существование, но в другой комбинаторной задаче может содержаться рисунок сложнее, что сделает невозможным простой перебор всех вариантов, так как школьник может в них запутаться. Поэтому рассмотрим способ решения, основанный правилах комбинаторики. Для того чтобы учащиеся смогли самостоятельно определить правило, можно задать им наводящиеся вопросы: «Если мы пойдем по первой дороге из А в Б, то сколькими способами мы можем выбрать дорогу из Б в В?», «А если по второй дороге из А в Б?» и так далее. Обучающиеся заметят закономерность, позволяющее им определить, что в задаче используется правило произведения. После этого необходимо объяснить, что метод решения можно определить проще – с помощью правила, записанного выше. Важно в задачах на комбинаторику обратить внимание на союзы, используемые в условии задачи. Если в постановке вопроса задачи можно поставить союз «и» («или») между величинами, и при этом смысл задачи не меняется, то при решении необходимо применить правило произведения (суммы) для подсчета общего количества возможных комбинаций.

– **Круги Эйлера**

Круги Эйлера-Венна – геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления. Наряду с кругами применяются прямоугольники и другие фигуры.

До того, как приступить к решению задач по данной теме, необходимо обратить внимание учащихся на основные понятия: множество объектов и его обозначение с помощью кругов Эйлера, принадлежность объекта множеству, пересечение и объединение множеств. Школьники быстро усваивают перечисленные понятия за счёт наглядности объяснения материала.

Задача 258. Некоторые ребята из класса любят ходить в кино. Известно, что 15 ребят смотрели фильм «Обитаемый остров», 11 человек – фильм «Стиляги», из них 6 смотрели и «Обитаемый остров», и «Стиляги». Сколько человек смотрели только фильм «Стиляги»?

Сразу обращаем внимание учащихся на то, что задача решается с помощью кругов Эйлера, так как заданы множества и количество человек, принадлежащих каждому множеству. Также нужно отметить, что круги, обозначающие множества пересекаются, по той причине, что в условии задачи есть учащиеся, относящиеся и к первому, и ко второму множеству. Далее изображаем условие с помощью кругов Эйлера (рис. 6).

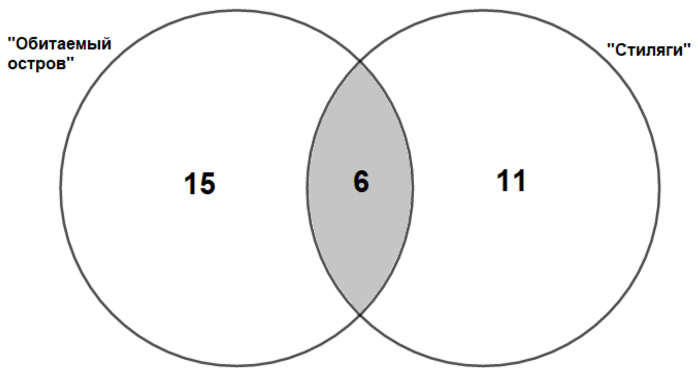

Рисунок 6.

После наглядного изображения переходим непосредственно к арифметическим действиям. До этого можно задать несколько наводящих вопросов: «Сколько человек смотрели только первый фильм?», «Второй фильм?», «Сколько человек смотрели второй фильм, но не смотрели первый?». Отвечая на заданные вопросы, учащиеся найдут ответ задачи и смогут самостоятельно сформулировать формулу для решения подобных задач.

– **Остров рыцарей и лжецов**

Задачи о рыцарях и лжецах – один из распространенных видов нестандартных задач по математике, в которых можно встретить следующих персонажей:

- Лжец (вампир, оборотень, упырь) – персонаж, всегда говорящий ложь.
- Рыцарь (человек, правдолюбец) – персонажей, всегда говорящий правду.

Решение задач данного типа сводится к перебору вариантов, исключая те, которые приводят к противоречию.

Задача 302. Абориген Тим в присутствии другого аборигена Тома заявил: «По крайней мере, один из нас – лжец». Кто же они?

Задание требует рассмотрения двух случаев.

1) Пусть Тим является рыцарем, значит он сказал правду. Следовательно, если он рыцарь, то Том является лжецом.

2) Пусть Тим является лжецом. Тогда, согласно его утверждению, он сказал правду, чего быть не может. Получили противоречие.

От учеников при решении задач данного типа требуется рассмотреть все возможные варианты, которые удовлетворяют как условию задачи, так и общей тематике (знание об особенностях рыцарей и лжецов).

– **Чашечные весы**

Задачи на взвешивания – достаточно распространенный вид математических задач. В таких задачах от решающего требуется определить отличающийся от остальных предмет по весу за ограниченное число взвешиваний. Поиск решения в этом случае осуществляется путем операций сравнения, правда, не только одиночных элементов, но и групп элементов между собой.

Задача 355. Есть 4 камня разного веса. Сколько взвешиваний (без гирь) надо, чтобы определить самый лёгкий и самый тяжёлый камни?

Так как первоначально нам про вес камней ничего не известно, то сравниваем первый и второй камни, третий и четвертый камни. По той причине, что камни разного веса равенства не возникнет, тогда следующим шагом взвешиваем самый легкие камни из первых двух взвешиваний, после аналогично самые тяжелые. Таким образом мы сможем определить самый легкий и самый тяжелые камни.

Чаще всего в задачах на взвешивание нужно разделить все исходные камни на группы из одинакового количества камней. После провести взвешивание в каждой получившейся группе. Исходя из требования задачи перейти к взвешиванию камней, взятых из каждой группы. Следовать такому алгоритму действий до тех пор, пока не будет получен ответ.

– **Принцип Дирихле**

Принцип Дирихле – утверждение, устанавливающее связь между объектами («кроликами») и контейнерами («клетками») при выполнении определённых условий. Наиболее распространена следующая формулировка этого принципа: «Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика».

Более общую формулировку можно представить в следующем виде: «Пусть в n коробках помещены k предметов. Если количество предметов больше количества коробок ($k>n$), тогда существует хотя бы одна коробка, в которой бы находилось 2 предмета». Нам не важно, в какой именно коробке находятся по крайней мере два предмета. Также не имеет значение, сколько предметов в этой коробке, и сколько всего таких коробок.

Задача 385. В поход пошли 20 туристов. Самому старшему из них 35, а самому младшему 17 лет. Верно ли, что среди туристов есть одногодки?

На момент решения задачи с учениками уже рассмотрен пример с кроликами и клетками, поэтому проще приводить объяснение, основываясь на аналогичной терминологии.

Необходимо поинтересоваться у учащихся, чем в данной задаче будут «кролики», а чем «клетки»: туристы – «кролики», возраст – «клетки». Возраст туриста – одно из чисел: 17, 18, 19, …, 33, 34, 35 (всего 19 вариантов). Согласно принципу Дирихле, так как число «кроликов» больше числа «клеток», тогда среди туристов могут встретиться одногодки. Учащиеся, не зная данный принцип, также могут сделать правильный вывод, исходя из условий задачи. Для этого достаточно обладать логическим мышлением, которое соответствует возрасту 10-12 лет.

– **Раскраски**

К задачам данного типа относятся задачи с использованием шахматной доски, на закрашивание фигур, на разрезание или на разбиение фигур на определенные части. Причем решение связано с определенным видом раскрашивания, чаще всего шахматным.

Задача 412. Можно ли разрезать на фигурки (рис. 7) указанного вида квадрат 8×8?

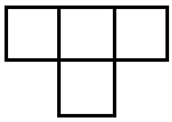

Рисунок 7.

Подобные задачи учащиеся любят решать практическим способом, то есть рисуют квадрат соответствующего размера и выделяют на нем фигурки определенной формы. Данный способ решения не противоречит условиям задачи, значит его однозначно можно использовать. Однако задача имеет относительно небольшие числа, поэтому графически удалось показать решение. В ситуациях, когда размер квадрата больше применяют решение, основанное на рассуждениях, на определенном исследовательском процессе.

Рассматриваем квадрат указанного размера. Раскрасим все его клетки в шахматном порядке. Тогда каждая фигурка будет содержать нечётное число черных клеток (1 или 3), аналогично с белыми. Всего фигурок на данном квадрате 16 ($8 \cdot 8/4 = 16$, где 4 – количество клеток в фигурке), и они содержат четное число черных клеток на заданном квадрате, а всего черных клеток 32, что удовлетворяет перечисленным условиям. Значит, можно.

Выше рассмотрена небольшая доля задач определенных тематик. Статистика показывает, что именно задачи такого рода можно встретить и на олимпиадах для школьников различного уровня, и на всероссийских проверочных работах для учеников 5-6 классов. На основе задач, предложенных авторами учебного пособия и подробно рассмотренных на примерах выше, мной был разработан ряд нестандартных задач по математике для учащихся 5-6 классов для использования в урочное и внеурочное время для организации их исследовательской деятельности.

Задание 1. Среди учеников шестого класса нет неуспевающих по математике. Косте, Сергею и Вове выставили разные оценки по этому предмету за третью четверть. Известно, что Сергей не имеет в четверти троек.

От ребят прозвучали следующие высказывания:

Вова: «У меня в четверти либо 4, либо 5».

Костя: «Сергей отличник, а Вова троечник».

Сергей: «Среди нас нет тех, кто получил пять, но знаю, что у Кости в четверти не 4».

Мальчики решили пошутить, поэтому в высказываниях Кости и Сергея одна часть предложения правдивая, вторая ложная. Кто какую оценку получил?

Как уже не раз было сказано, логические задачи данного типа решаются с помощью таблицы. Ученикам для выполнения задания достаточно обладать знаниями курса математики начальной школы, а именно сформированными на этих уроках универсальными учебными действиями, а также задатками к логической исследовательской деятельности, которые могли быть заложены как на уроках, так и при решении развивающих задач. Логические задачи служат развитию познавательного мышления, способности рассуждать и делать соответствующие выводы.

Задание 2. Сколько существует различных двузначных чётных чисел, делящихся на три?

Данную задачу необходимо дать на размышление детям в конце пятого или в шестом классе, так как для решения учащиеся не только должны знать об эффекте «Плюс-минус один», но и признаки делимости, а именно понятие четности и признак делимости на три. Решение подобных задач способствует развитию регулятивных учебных действий: школьник развивает такие важные аспекты учебного процесса, как анализ и контроль собственной деятельности.

Задание 3. Как с помощью банок ёмкостью 1 л и 5 л разделить молоко, находящее в шестилитровой кастрюле, на две равные части?

Самое главное при решении задач на переливание – это понимать их основные принципы и правила переливания. Так как ученики, впервые столкнувшиеся с задачей такого типа, считают, что можно перелить нужное количество. Специальных знаний по математике решение таких задач не требует. Цель выполнения задания – развитие пространственного мышления, осознание возможности собственной ошибки в процессе выбора алгоритма решения.

Задание 4. Как с помощью чашечных весов без гирь определить, какая из 18 монет фальшивая (тяжелее остальных)? Какое минимальное количество взвешивание потребуется?

Задания данной тематики имеют примерно одинаковый алгоритм решения, основанный на разбиение монет на кучки и их дальнейшем взвешивании. Задачи с чашечными весами решаются с целью формирования и развития у ребенка логического мышления и умения делать соответствующие выводы из результатов собственной деятельности. Для решения учащимся достаточно знать таблицу умножения и владеть познавательными и регулятивными учебными действиями, сформированными в младших классах.

Задание 5. Изображена (рис. 8) схема дорог, связывающая населенные пункты A, B, C, D, E, F. По каждой дороге можно двигаться только в направлении, указанным стрелкой. Сколько существует различных путей из A в F?

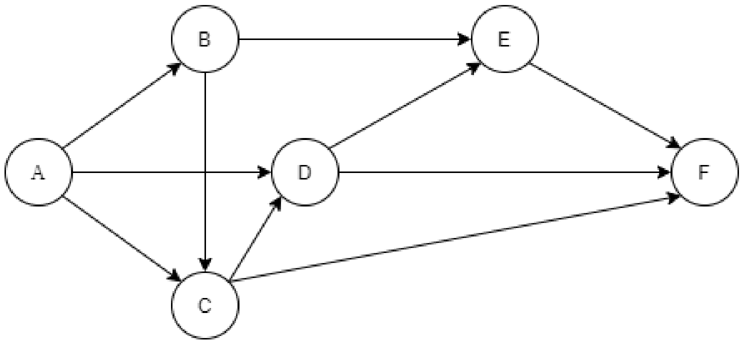

Рисунок 8.

Задача предназначена для развития пространственного и творческого мышления на базе ряда арифметических действий. Иными словами, данное задание – это совокупность двух разных по тематике задач: комбинаторные и «Разберем все варианты». Чтобы решать комбинаторным способом необходимо владеть соответствующими правилами. Другой способ заключается в переборе всех возможных вариантов, следуя по стрелочкам. Учитель сам решает, какой способ показать, основываясь на знаниях учеников и для какой цели предлагается школьникам данное задание.

Предложенные мной нестандартные задачи не противоречат заданной классификации (Гл. 1, §1.1). Данные задачи, в отличие от развивающих, направлены на работу с обучающимися, способными мыслить нестандартно, выходить за рамки привычной им математики.

Стоит обратить внимание, что в параграфе содержится методика решения нестандартных задач определенных тематик. Но это не значит, что все задачи данного типа будут решаться подобным образом. В условиях решения нестандартных задач скорее можно утверждать обратное. Методика решения разобранных задач задает направление, в сторону которого учащиеся должны развернуть ход собственной мыслительной деятельности.

На основе вышеизложенного можно сделать вывод, что для успешного решения нестандартных задач недостаточно знать теоретических материал по той или иной тематике, но и постоянно его применять в практической деятельности, самостоятельно исследуя новые способы решения нестандартных задач.

§2.3 Задачи на логику, смекалку и сообразительность

Систематическое применение нестандартных задач способствует развитию исследовательских способностей и формированию математических представлений учащихся. Появление догадки свидетельствует о развитии у детей таких качеств умственной деятельности, как смекалка и сообразительность. Смекалка выражается в результате формирования у учащихся регулятивных универсальных учебных действий (анализ, сравнения, обобщения, установление связей, аналогии, выводов, умозаключений). О проявлениях сообразительности свидетельствует умение обдумывать конкретную ситуацию, устанавливать взаимосвязи, на основе которых решающий задачу приходит к выводам, обобщениям. Сообразительность является показателем умения применять полученные знания в практической деятельности. Из этого следует, что смекалка, сообразительность, влекущие за собой догадку как результат поиска решения занимательной задачи, необходимо развивать в процессе обучения.

Догадка также является одним из способов решения логических задач. Его можно считать аналогией методу подбора при решении арифметических задач. Но догадке, как и любому другому методу решения, предшествует анализ задачи: выделение существенных признаков, пространственного расположения и обобщения ряда фигур, их свойств, сходных признаков и т.п. Нельзя не признать, что решать нестандартные задачи с помощью догадки весьма нерационально. Именно поэтому на уроках у учащихся формируются некие приёмы мыслительной деятельности: анализ и синтез, сравнение, аналогия, классификация, так как учащиеся при решении нестандартных задач развивают способность выполнять перечисленные операции.

Стоит отметить, что ответы на задачи на смекалку и сообразительность можно найти не только с помощью догадки, но и логики, на которой и строится вся математика.

Решение задачи на логику предполагает работу с понятиями, использование различных логических конструкций, построение цепочки точных рассуждений с правильными промежуточными и итоговыми умозаключениями.

В отличие от большинства математических и других видов задач, при решении логических задач ключевым является не нахождение количественных характеристик объекта, а определение и анализ отношений между всеми объектами задачи.

В литературе можно заметить, что задачи на смекалку называют «задачами с подвохом». Это задания, содержащие обычный вопрос и имеющие нетривиальный ответ. Обычно правильное решение таких задач не требует никаких дополнительных знаний, достаточно внимательно прочитать условие задачи. Первоначально ответ можно сделать вывод, что ответ выглядит странным или неправильным, но если пересмотреть условие и вдуматься, то он окажется вполне логичным. Загадки с подвохом отлично развивают сообразительность и нестандартное мышление.

В не раз уже упомянутом учебном пособии [2] П. М. Горев и В. В. Утёмов не обошли стороной задачи на логику, смекалку и сообразительность. Им выделена третья часть, в которой собраны задачи, позволяющие проявить вышеупомянутые качества. В данной части содержится несколько групп задач: от логических до совокупности задач на смекалку и сообразительность. Самое главное при решении таких задач попросить учеников не спешить с ответом, несколько раз подумать, соотнести свой ответ с условием задачи и с жизненным опытом и только потом, полностью уверившись в правильности, отвечать.

Задача 430. Почему парикмахер охотнее подстрижет двух футболистов, чем одного волейболиста?

Данная задача помещена в раздел «Железная логика!», следовательно, имеет весьма логичный ответ, который сопоставим с реальной действительностью. Такое задание можно встретить в других вариациях: например, вместо спортсменов жители некоторых стран, но смысл и ответ задачи абсолютно не поменяются. Здесь могут помочь наводящиеся вопросы, прямо не относящиеся к условию задачи, но, ответив на вопросы, можно сделать соответствующий вывод. Можно спросить у учащихся, сколько стоит сходить подстричься одному человеку, а сколько двум. Уже здесь многие сообразят, что парикмахер охотнее обслужит двух людей, так как в этом случае заработает больше. Тут опять же важно обратить внимание, что задачи на смекалку тесно связаны с жизненными ситуациями, значит нужно думать и с этой точки зрения.

Задача 434. Датчане любят говорить: «У нас всё лучше, чем в Швеции: климат, природа, народ, история… и только одно у шведов лучше». Что это?

Перед нами задача из раздела «Трудно не догадаться!», в котором представлены задания, с которыми не каждый взрослый может справиться, но именно непосредственное детское мышление способно дать быстрый ответ на нетривиальную загадку. При решении данной задачи можно заметить метапредметную связь таких дисциплин, как математика и география, так как знание расположения европейских стран довольно сильно облегчит поиск ответа. Какие же вспомогающие вопросы можно задать учащимся? «Как связаны Швеция и Дания?», «Как вы можете назвать человека, сидящего с вами за одной партой?». Для наглядности можно пригласить к доске двух человек, изображающих вышеупомянутые страны, и разыграть небольшую сценку, учитывая ответы на вопросы, заданные учителем. Решение такой задачи предполагает непрекращающийся процесс анализа и рассуждения от учащихся, а от учителя требуется задавать наводящие вопросы, если ученики находятся в тупике.

Задача 445. Восстанови пример на умножение (рис. 9).

$$
\begin{array}{r}
\times\; * \; 2 \; * \; 3 \\
* \; * \\
\hline
+\quad * \; * \; * \; 8 \; 7 \\
* \; * \; * \; * \; * \quad \\
\hline
2 \; * \; 0 \; 0 \; 4 \; *
\end{array}
$$

Рисунок 9.

Для решения данной задачи на сообразительность необходимо знать всю таблицу умножения и уметь умножать числа столбиком. Начинаем рассуждать с конца: на сколько нужно умножить три, чтобы получилось семь. Учащиеся дадут ответ девять, вписываем его вместо звездочки. Дальше нужно объяснить, что сейчас будем умножать четырёхзначное число, находящееся в первой строчке на найденное число девять. То есть нужно ответить на вопрос, какое число нужно умножить на девять, чтобы получилось восемь, зная, что «в уме» осталось два после умножения трех на девять. В итоге ученикам нужно решить уравнение вида $x \cdot 9 + 2 =* 8$, которое после преобразования имеет вид $x \cdot 9 =* 6$. Далее учащиеся сделают логический вывод, что это число четыре, умножая которое на девять и прибавляя два, получим число 38 (восемь записываем, три «в уме»). Следующее пример содержит оба множителя: $2 \cdot 9 + 3 = 21$ (единицу пишем, два «в уме»). Осталась цифра, стоящее в разряде тысяч, про которое известно, что при умножении его на девять получается двузначное число. Но сумма двух и произведения некого числа и девяти всегда дает двузначное число, причем дополнительных условий в примере нет, следовательно, на данный момент мы не можем сказать, какая стоит цифра в разряде тысяч.

Далее переходим к умножению четырехзначного числа на цифру, стоящую в разряде десятков двузначного числа. Нам известно, что сумма восьми и некого числа дает число *4, значит можем сделать вывод, что под восьмеркой будет стоять цифра 6 (8+6=14). Возвращаемся к первым двум строчкам и задаемся вопросом, произведение трех и какого числа дает 6, получим, что это число 2. Таким образом, мы нашли, что один из исходных множителей – число 29. Умножаем последовательно известные цифры первого числа на два. На текущем шаге пример будет выглядеть следующим образом (рис. 10):

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & \times & * & 2 & 4 & 3 \\
 & & & & & 2 & 9 \\
\hline
+ & & * & * & 1 & 8 & 7 \\
 & * & * & 4 & 8 & 6 & \\
\hline
 & 2 & * & 0 & 0 & 4 & 7
\end{array}
$$

Рисунок 10.

На рисунке 10 видно, что сумма четырех и некого числа дает 0, то есть число 10, учитывая единицу «в уме», то есть в данном случае вместо звездочки должна стоять цифра 5. На этом шаге возвращаемся к цифре, стоящей в разряде тысяч в первом множителе и сводим нахождение данной цифры к решению уравнения вида $x \cdot 9 + 2 =* 5$. Отсюда находим, что неизвестная цифра в первом множителе – это 7. Таким образом, нам известны оба множителя – 7243 и 29. Осталось их перемножить и записать оставшиеся цифры в примере. Ответ на данную задачу записывается в виде примера (рис. 11):

$$\begin{array}{r} \times\ 7243 \\ 29 \\ \hline +\ 65187 \\ 14486 \\ \hline 210047 \end{array}$$

Рисунок 11.

Задача 452. Сколько земли будет в яме шириной 2 м, длиной 2 м и глубиной 2 м?

Раздел «А ну-ка, смекни!» содержит задачи на смекалку, которые требует не вдумчивого и последовательного решения, а внимательного прочтения условия задачи и рассуждения.

Первое желание учащихся, когда они видят данную задачу – найди объём ямы, считая, что это и будет являться ответом. Здесь нужно обратить их внимание на условие задачи, попросить прочитать несколько раз, выделить ключевые слова задания. Можно также попросить учащихся нарисовать яму с данными условиями. Рисунок явно продемонстрирует, что в яме земли находиться не может.

Задача 485. Школьники из московской гимназии отправились на экскурсию в Волоколамск. Один из них, рассказывая дома об этой поездке, нарисовал картинку (рис. 12). Можно ли по ней определить, куда едет автобус – в Москву или в Волоколамск?

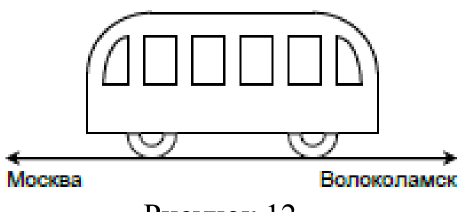

Рисунок 12.

Задача из раздела «Мастерская озарения» позволяет развить как смекалку, так и сообразительность. Данную задачу также можно решить с помощью догадки, так как здесь ответом является один из двух возможных ситуаций. Задание имеет практическую направленность, то есть для того, чтобы решить учащимся данную задачу необходимо понять, что обязательно должно быть у автобуса, представить, как выглядит транспорт, когда школьники стоят на остановке или наблюдают за автобусом с другой стороны дороги. Также хорошо поможет объяснить задачу сценка с участием двух и более учащихся, играющих автобус, пассажиров и наблюдателей со стороны. В данном случае, так как дверей на рисунке мы не наблюдаем, то автобус едет из Волоколамска в Москву. Здесь учащиеся еще раз смогли убедиться, что жизненный опыт важен при решении нестандартных задач. Также такие задачи невольно отвечают на постоянный вопрос учащихся, зачем они изучают тот или иной предмет в школе.

Рассмотренные задачи не требуют решения по действиям или определенной логической цепочки рассуждений. Чаще всего ответ на них прост и весьма логичен, стоит только применить собственную смекалку и сообразительность, которые развиваются при постоянном решении нестандартных задач такого типа. Вышеперечисленные задачи встречаются как на олимпиадах по математике, так и на квестах, интеллектуальных играх. Перечисленные задачи стали опорой для разработки мной нестандартных задач по математике для учащихся 5-6 классов на логику, смекалку и сообразительность.

Задание 1. Фламинго, стоящий на двух ногах, весит около 4 кг. Сколько будет весить фламинго, стоящий на одной ноге?

Данная задача требует начальных задатков к сообразительности и носит практический характер. Дополнительных знаний задача не требует, достаточно полностью понимать условие задачи. Цель выполнения задачи такого типа – развитие логического мышление и способности использовать жизненный опыт при решении математических задач.

Задание 2. У девушки в вазе стояло двадцать пять роз, все, кроме тринадцати, завяли. Сколько роз осталось в вазе?

В таких задачах необходимо задавить желание учащихся вычесть из одного числа другое, и таким образом найти ответ. Важно несколько раз перечитывать условие задачи и выделить ключевые слова. При необходимости условно разбить задачу на части и подробно разбирать их с учащимися. Данные задания решаются для того, чтобы учащиеся развили способность обращать внимание на все слова в условии задачи, так как чаще всего они играют ключевую роль в поиске решения задачи.

Задание 3. Как передвинуть три спички, чтобы в итоге получилось три треугольника (рис. 13)?

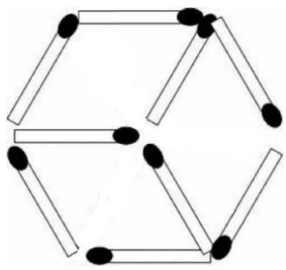

Рисунок 13.

Задача на спички – одна из любимых головоломок учащихся любых возрастов. При решении таких задач хорошо развиваются не только сообразительность и логика, но и пространственное мышление. В младшем школьном возрасте лучше для этого использовать счетные палочки, чтобы можно было их передвигать для безошибочного поиска решения. При решении таких задач важно учащимся знать основное правило: должны быть задействованы в фигурах все спички.

Задание 4. Какое из перечисленных чисел не обладает свойством, которым обладают остальные числа: 7785, 2968, 5040, 6102, 1581, 3709, 9933?

Данную задачу преимущественно следует давать учащимся в конце пятого или в шестом классе, так как задание основано на признаке делимости на три. То есть учащимся необходимо догадаться, что все перечисленные числа, кроме одного, делятся на какое-то определенное число. Для этого они должны иметь представление о признаках делимости и сообразить, какой признак необходим. Цель выполнения данного задания – практическое применение знаний, полученных на уроках математики, в нестандартных ситуациях.

Задание 5. На одной улице живут несколько семей, в каждой семье есть дети, количество которых не превышает двух. Известно, что у каждого брата есть сестра, но не у каждой сестры есть брат. Сколько семей может жить на этой улице, если тут живут 4 мальчика и 8 девочек?

Несмотря на то, что на первый взгляд кажется, будто задача имеет строго логическое мышление, то это не совсем верно. Так как в задаче не сказано о наличии в семье двух сестер, то можно сделать предположение, что такое вполне возможно. То есть учащимся нужно проявить свою сообразительность, чтобы догадаться о существовании такого варианта. Цель данной задачи – развитие исследовательских навыков учащихся на основе задач на сообразительность.

Задачи, предложенные мной выше, отличаются от тех классических видов нестандартных задач, рассмотренных в предыдущем параграфе (Гл. 2, §2.2). Данные задачи в основном не требуют определенных знаний, полученных на уроках математики, а необходимы сформированные на этих уроках учебные действия. Если в классических нестандартных задачах можно заметить примерно одинаковый план выполнения заданий, то в задачах на смекалку и сообразительность этого нет. Каждая задача данного типа уникальна. «Задачи с подвохом», как еще их называют, требуют от учащихся внимательного чтения условия задачи и применения своих практических знаний.

Таким образом, решение нестандартных задач – это не только полученные знания, но и все сформированные и постепенно развивающиеся в процессе исследовательской деятельности универсальные учебные действия, а также жизненный опыт учащегося.

§2.4 Математические эксперименты

Личностно-ориентированный подход к обучению, развивающее и проблемное обучение, информационно-коммуникационные технологии постепенно внедряются в образовательные организации за счет изменений, происходящих в сфере образования.

Ученик в образовательном процессе выполняет как пассивную роль, то есть его функцией является восприятие учебной информации от учителя, так и активную: использует полученные знания в практической деятельности.

Эксперимент – один из методов реализации такого принципа обучения, так как в этом случае учащиеся вовлекаются в поисковую исследовательскую деятельность, результатом которой будут не только соответствующие знания и умения по предмету, но и умение осуществлять самостоятельную познавательную деятельность.

Умение логически мыслить, правильно и последовательно выстраивать аргументацию, ясно и отчетливо выражать свои мысли, анализировать ситуацию, отделять важное от несущественного – малый перечень того, что формируется и развивается в процессе изучения математики и что безусловно пригодится в жизни. То есть учащиеся могут убедиться в необходимости математических знаний. Полное усвоение математического материала может свидетельствовать о упрощенном изучении смежных дисциплин, что достигается за счет сформированных на уроках математики универсальных учебных действий.

Малая доля учащихся способна к строгим теоретическим выкладкам, однако на практике практически все могут наблюдать, подмечать закономерности, анализировать. Можно сделать вывод, что, занимаясь математическим экспериментом, каждый ученик оказывается активным участником исследовательского процесса.

Любой эксперимент содержит три этапа:

1) Подготовительный: ориентирован на теоретическое обоснование эксперимента, формулировку гипотезы, его планирование, создание модели, выбор условий и средств исследования.

2) Сбор экспериментальных данных направленный на работу с моделью, проведение нужных измерений и вычислений, фиксация результатов, повторность измерений и учёт факторов, влияющих на исследуемый объект.

3) Обработка результатов, который содержит анализ и интерпретацию результатов эксперимента, сопоставление их с гипотезой, формулировка выводов.

На всех этапах эксперимента важна мыслительная деятельность экспериментатора. Все результаты эксперимента должны отражать только собственные наблюдения и опыты. Сравнение собственных наработок можно проводить только с литературой по данной теме.

Этапы исследовательской деятельности и этапы эксперимента находятся в тесной связи. Эксперимент способствует разрешению различных математических ситуаций, возникающих в процессе решения исследовательских задач. Гибкость и вариативность решения математической ситуации, установление причинно-следственных, метапредметных связей в процессе проведения эксперимента также подтверждает важность его использования при осуществлении исследовательской деятельности в процессе обучения математике.

Четвертая часть учебного пособия П.М. Горева и В.В. Утёмова [2] содержит задачи на тему «Математические эксперименты». Данный раздел представлен в форме последовательных задач, которые позволяют понять, что математика окружает нас в любой момент времени. Разберем основные виды математических экспериментов.

– **Эксперименты с полоской бумаги**

Задание. Склей ленту Мёбиуса шириной 5 см. Что получится, если разрезать её вдоль, отступив от края сначала 1 см, затем на 2 см, на 3 см, на 4 см?

До непосредственной работы с бумагой необходимо поинтересоваться у учащихся, знакомы ли они с этой фигурой и, что, по их мнению, должно получиться в результате проведения эксперимента. Можно даже записать все варианты на доске. Далее переходим к работе с самой моделью. Важно учесть, что учителю необходимо подготовить к данному занятию весь необходимый материал: бумага, клей, ножницы.

Важно отметить, что на момент выполнения данной задачи учащиеся должны иметь представления о ленте Мёбиуса. Таким образом, первый шаг – склейка модели – учитель демонстрирует процесс для школьников. После для удобства можно сделать отметки, указывающие сантиметры. Далее непосредственно переходим к процессу разрезания. Важно отметить, что из-за того, что по ленте можно передвигаться бесконечно, то первый разрез можно делать в любом месте. В итоге получим три кольца: первое кольцо - лист Мёбиуса шириной

1 см, длина равна длине исходного кольца; второй и третий кольца – кольца шириной 1 см, длина в 2 раза больше исходного листа. Причем второй и третий кольца сцеплены как между собой, так и с первым кольцом. II и III кольцо сцеплены с I кольцом и между собой.

Задачи данного типа рассчитаны на развитие нестандартного пространственного мышления, постепенно знакомят учащихся с топологическими объектами.

– **Площади клетчатых фигур**

Задание. Какая часть площади фигур, изображенных на рисунке (рис. 14), закрашена?

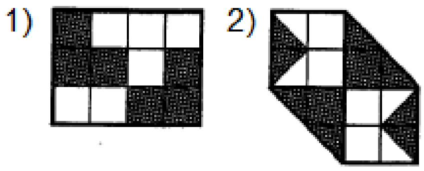

Рисунок 14.

В представленных в данной теме задачах площадь фигуры – количество клеток, которые в ней умещаются. В пятом классе до прохождения темы «Дроби» учащимся можно предложить дать ответ в виде «Пять клеток из семи закрашено, закрашена большая часть фигуры», в шестом же классе учащимся желательно давать ответ в виде дроби, где числитель – площадь закрашенной части, знаменатель – площадь всей фигуры. Задания предусматривают работу как с помощью вырезания из бумаги, так и с помощью построения фигуры на листе бумаги. Способ выполнения определяется учителем, в зависимости от того, какие качества нужно развить в учащихся.

Работа с первой фигурой не вызывает трудностей. Хотя школьники не видят разделения на клетки у закрашенных фигур, они с легкостью могут сделать вывод об их количестве. В данном случае ответ будет выглядеть в виде «Шесть клеток из двенадцати закрашено, площади закрашенной и незакрашенной частей равны, то есть закрашена половина от всей фигуры» или $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

При работе со второй фигурой могут возникнуть сложности, так как появились неизвестные учащимся треугольники. У них появляется логический вопрос: «Что делать в этом случае?». Часть школьников сразу может догадаться, что один прямоугольный треугольник – половина целой клетки. Остальным это необходимо будет объяснить на более простом рисунке или с помощью упрощенной модели, вырезанной из листа бумаги. После учащиеся увидят на рисунке две закрашенные цельные клетки и восемь «половинок», которые образуют четыре полноценные клетки. То есть ответом будет «Шесть клеток из двенадцати закрашено, то есть половина фигуры» или $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

Так как в двух примерах вышел одинаковый ответ, то нужно предложить обучающимся сравнить фигуры и самим нарисовать или вырезать и закрасить такую фигуру, чтобы площади закрашенной и незакрашенной части были равны.

– **Не отрывая карандаша**

Задание. Попытайся нарисовать одним росчерком каждую из следующих трёх фигур (рис 15). Помни требования: начертить все линии заданной фигуры, не отрывая карандаша от бумаги, не делая никаких лишних штрихов и не проводя дважды по одной линии.

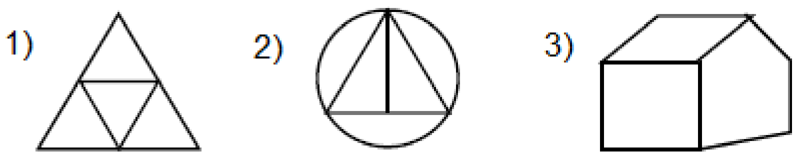

Рисунок 15.

Данный тип задач часто встречается в учебниках математики различных авторов. При выполнении на уроках учащимся не дается никакой теоретической информации по поводу методики решения подобных заданий. Это обусловлено нехваткой учебных часов на разбор нестандартных задач. Однако в школах с углубленным изучением математики и на факультативных кружках необходимо объяснить обучающимся, по какому принципу выполняются задачи подобного типа.

В учебном пособии данная задача представлена до теории, то есть задание является проблемной ситуацией для учеников: они пробуют разные способы решения, начинают обводить фигуры с разных точек и так далее. После успешного нахождения ответа на задание важно попросить учащихся найти закономерность, почему в некоторых фигурах можно начинать с любой точки, в других – с определенной точки, в-третьих – обвести одним росчерком нельзя. И только после этого переходить непосредственно к определению *чётных* (узлы, в которых сходятся четное число линий) и *нечётных* (узлы, в которых сходятся нечетное число линий) узлов. Далее нужно вернуться к заданию и сделать соответствующие выводы согласно полученной теоретической информации. А именно: первая фигура содержит все четные узлы, то есть её можно обвести одним росчерком, начиная с любой точки; вторая фигура имеет два нечетных узла, значит фигура обводится одним росчерком, начиная с одного из них; в третьей фигуре четыре (больше двух) нечетных узла, следовательно, её нельзя нарисовать одним росчерком.

Математические эксперименты в отличие от классических нестандартных задач могут быть выполнены большим количеством учащихся. Но объяснить некоторые феномены, возникающие в процессе выполнения способны лишь обучающиеся с «сильным» мышлением, которые постоянно занимаются исследовательской и познавательной деятельностью.

На основе разобранных выше заданий мной были разработаны собственные задачи для учащихся 5-6 классов, представляющие математический эксперимент как одну из форм нестандартных задач.

Задание 1. Сложить лист бумаги пополам несколько раз. После каждого складывания записать, на сколько частей разбился исходный лист (табл. 7). Какую закономерность можно сделать исходя из данных таблицы? Сколько раз получится сложить лист бумаги пополам? В каком случае возможно больше?

Таблица 7 – Решение задания 1

№ складывания	Количество частей
1	2
2	4
…	

Цель выполнения данной задачи заключается в том, что учащиеся развивают пространственное решение, творческий подход к решению математических задач, а также могут на собственном опыте столкнуться с таким феномен, как «предел складывания бумаги», и проявят свои исследовательские навыки в попытке разрешить данный феномен, ответив на вопрос задачи. Кроме того, стоит отметить, что все математические эксперименты с использованием бумаги развивают моторику рук, что способствует развитию коммуникативных учебных действий.

Задание 2. Напишите любое двузначное число. Поменяйте местами его цифры и напишите полученное число. Вычтите из большего числа меньшее. Чему равна сумма цифр полученной разности?

Для чистоты эксперимента необходимо сразу предупредить учащихся, чтобы они писали разные числа. Желательно одного ученика пригласить выполнить задание у доски. В результате у учеников будут получаться числа от 9 до 72, делящиеся на девять, и 0, если в числе одинаковые цифры. Здесь нужно обратить внимание учащихся, что сумма цифр чисел, делящихся на девять, будет девять, то есть данное задание можно считать введением в тему «Признаки делимости». Далее следует объяснить возникающий феномен, разложив каждое из чисел на сумму разрядных слагаемых и выполнив соответствующее действие. Например, для чисел 83 и 38 получим следующее выражение:

$$83 - 38 = 80 + 3 - (30 + 8) = 80 + 3 - 30 - 8 = 50 - 5 = 45.$$

После разбора на частном примере необходимо продемонстрировать и общее объяснение данного феномена:

$$\overline{mn} - \overline{nm} =$$
$$= 10m + n - (10n + m) = 10m + n - 10n - m = 9m - 9n = 9(m - n).$$

Математический эксперимент – одна из любимых учащимися форм нестандартных задач. При решении таких задач обучающиеся демонстрируют все свои творческие способности в процессе исследовательской деятельности. Эксперимент – ответ на практике на вопрос учащихся «Зачем нам нужна математика?»

Математический эксперимент может быть предложен учащимся как в начале курса обучения решению нестандартных задач, так и в конце. В первом случае задания, рассмотренные выше, продемонстрируют учащимся важность изучения математики и вовлекут их в исследовательскую деятельность. Во второй ситуации, математический эксперимент можно представить как логический вывод из всей той информации, что была получена учащимися на факультативных занятиях, то есть ученики на практике удостоверяться в важности и необходимости не только прошедших занятий, которые развили в обучающихся универсальные учебные действия, но и в самой математике, которую можно встретить на каждом шагу.

§2.5 Практика использования нестандартных задач для развития исследовательских способностей школьников

Основная цель состоит в исследовании процесса развития математических способностей у школьников в ходе обучения решению нестандартных задач.

Задачи исследования:

1. Подобрать методику для исследования уровня развития математических способностей.
2. Выявить начальный уровень развития математических способностей у учащихся 5-6 классов.
3. Проверить эффективность условий развития математических способностей.

База исследования – МБОУ «СОШ №47» г. Чебоксары, 5 «Б» класс.

Количественный состав группы – 20 человек, из них 13 девочек и 7 мальчиков.

Название факультативного курса – «Малый физмат».

В качестве критериев развития математических способностей для определения первоначального уровня развития математических способностей выбраны следующие компоненты математических способной, выделенные В. А. Крутецким [7]:

- способность к формализации математического материала;

- способность к оперированию числовой и знаковой символикой;
- гибкость мышления, способность сокращать процесс рассуждения (рациональность);
- развитость образно-геометрического мышления и пространственного представления.

С помощью развивающих заданий, разработанных выше (Гл. 2, §2.1, задания 1 – 6), проводилась проверка компонентов структуры математических способностей, представленных в таблице 8.

Таблица 8 – Критерии и задания для выявления уровней развития математических способностей

№	Критерии	Умения, необходимые для решения задачи	Номер задания
1	Способность к формализации математического материала	Умение отличать задачу от других текстов	1, 6
2	Способность к оперированию числовой и знаковой символикой	Умение записывать решение задачи, производить вычисления	1, 4, 6
3	Гибкость мышления, способность сокращать процесс рассуждения	Умение записывать решение задачи выражением. Умение решать задачу разными способами	1, 2, 3, 4, 5, 6
4	Развитость образно-геометрического мышления и пространственных представлений	Умение выполнять построение геометрических фигур	4

Мной была определена шкала оценивания каждого задания:

– 0 баллов – ученик не справился с заданием.

– 1 балл – дан только ответ без указания решения.

– 2 балла – ученик справился с заданием наполовину (решение содержит правильный ход решения); решение содержит существенные ошибки.

– 3 балла – неполное или неточное обоснование правильного ответа; решение содержит незначительные ошибки, не влияющие не результат.

– 4 балла – учение полностью справился с заданием.

Данная шкала относится ко всем заданиям, так как они равносильны по уровню сложности, различие в тематиках развивающих задач.

Максимальный балл – 24, минимальный балл – 0.

Согласно количеству набранных баллов, ученики были распределены на три группы (уровня).

1. Низкий уровень (от 0 до 8 баллов).

Ученик обладает общими, присущими среднестатистическому учащемуся, математическими способностями. Возникают трудности при записывании решения задачи, при вычислениях. Невозможность построить логические цепочки, нет попыток предвидеть ход решения задачи. Не обладает задатками пространственного мышления для работы с геометрическими фигурами.

2. Средний уровень (от 9 до 14 баллов).

Ученик способен выполнять задания по определенному алгоритмы, по образцу. Нет трудностей при записывании решения задачи, возможны ошибки в вычислениях. Ученик способен выделить из условия задачи данное и искомое, построить необходимые логические связи. Способен некоторые задачи решать несколькими способами. Решение задач с геометрическим содержанием имеют погрешности.

3. Высокий уровень (от 15 до 24 баллов).

Ученик обладает на высшем в соответствии с возрастом математическими способностями. Нет проблем в записи решения задачи, отсутствуют вычислительные ошибки. Учащийся способен на полный всесторонний анализ задания, выделяет все взаимосвязи между данными и искомыми. В состоянии решить задачи несколькими способами, выбирает наиболее рациональный способ из возможных. Развито логическое и пространственное мышление.

На основе проведенной диагностики были определены уровни развития математических способностей учащихся до начала занятий на факультативном кружке «Малый физмат». Результаты, представленные на рис. 16, основаны на таблице 8 и таблице 9 (см. приложение А).

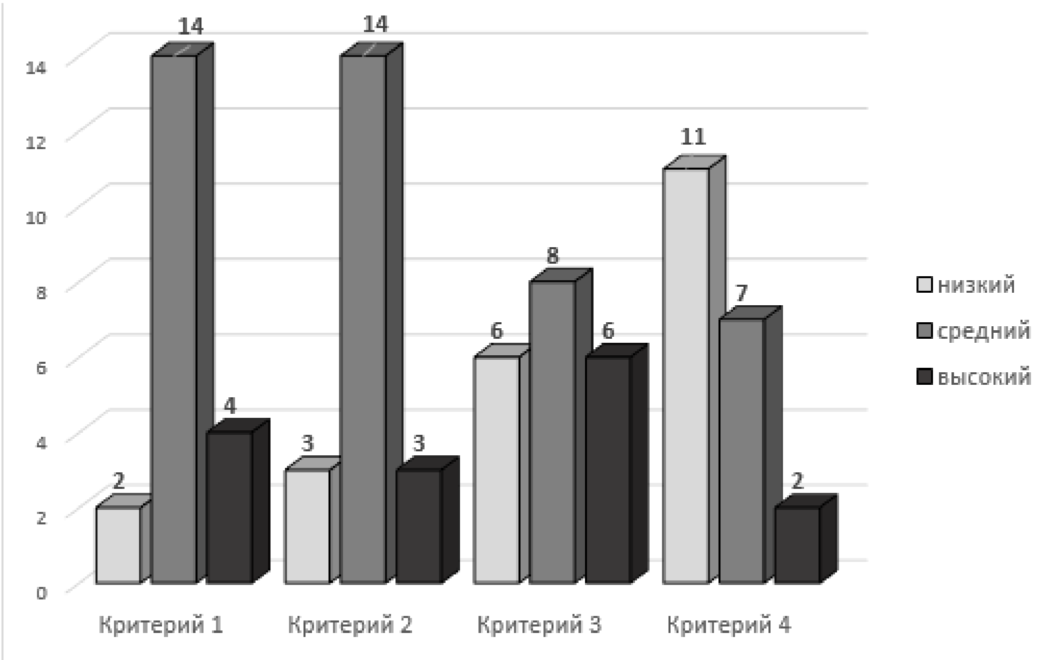

Рисунок 16.

Согласно представленным выше данным, у 10% учащихся (2 чел.) существует низкая способность к формализации математического материала (критерий 1). Средний уровень имеют большинство учащихся – 70% (14 чел.), высокий уровень – 20% (4 чел.). Учащиеся с такими результатами отличают задачу от других текстов.

Низкий уровень развития способности к оперированию числовой и знаковой символикой (критерий 2) имеют 15% учащихся (3 чел.). Такие школьники не обладают навыками записи решения задачи, не могут определить данное и искомое, совершают ошибки в вычислениях. 70% учеников (14 чел.) имеют средний уровень, что говорит об умении записать решение неполно или неточно, возникают ошибки в вычислениях. Высокий уровень наблюдается у 15% учащихся (3 чел.).

У 30% учащихся 5 «Б» класса (6 чел.) замечен низкий уровень развития гибкости мышления, способности сокращать процесс рассуждения (критерий 3), что свидетельствует о неспособности учащихся решать задачи несколькими способами, видеть логические связи между данными. Средний уровень наблюдается у 40% учеников (8 чел.), высокий уровень – у 30% учеников (6 чел.). Данные школьники могут предложить несколько способов решения задачи, обладают задатками логического мышления.

Низким уровнем развития образно-геометрического мышления и пространственных представлений (критерий 4) обладает большее число учеников – 55% (11 чел.), что говорит о недостаточно развитом пространственном мышлении, невозможности на данном этапе абстрагироваться от арифметических шаблонных действий. Средний уровень имеют 35% обучающихся (7 чел.), и лишь у 10% (2 чел.) наблюдается высокий уровень.

Исходя из сравнительной диаграммы критериев (рис. 16) можно сделать вывод, что наиболее проблемным критерием на предварительном этапе диагностики учащихся, посещавших факультативные занятия «Малый физмат», оказалось развитие образно-геометрического мышления (55% имеют низкий уровень); наиболее развитым критерием – способность к формализации математического материала.

Согласно результатам диагностики (см. приложение А, табл. 9) на предварительном этапе, учащиеся пятого класса условно разделены на три группы по уровню склонности к развитию решения нестандартных задач, что демонстрирует рис. 17.

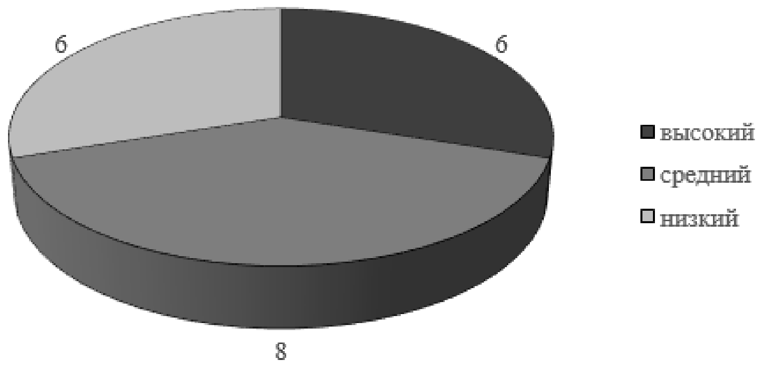

Рисунок 17.

Результаты исследования показывают, что низкий уровень склонности к решению нестандартных задач имеют 30% учеников (6 чел.) пятого класса, посещающих факультативный кружок «Малый физмат». Такие учащиеся имеют математические способности на уровне общего образования. Существуют трудности при записи решения задачи, возникают ошибки в вычислениях. Не могут предвидеть ход решения задачи.

Средний уровень присущ большему числу учащихся – 40% (8 чел.). Это обладатели алгоритмического мышления, то есть способны решать по заданному алгоритму. Определяют данное и искомое и видят взаимосвязь между ними. В вычислениях и построении геометрических фигур возможны ошибки, неточности.

Учащихся, имеющих высокую склонность к развитию способности решать нестандартные задачи, насчитывается 30% (6 чел.) от общего числа пятиклассников, посещающих кружок. Такие ученики имеют склонность к исследовательской деятельности. Демонстрируют быстрое овладение математическими знаниями, умениями и навыками, развитое логическое мышление; обладают сообразительностью смекалкой.

Таким образом, можно сделать вывод, что учащиеся 5 «Б» класса, посещающие факультативные занятия «Малый физмат», на предварительном этапе имеют преимущественно средний уровень выраженности способности к решению нестандартных задач по математике.

Условиями развития математических способностей у школьников являются:

- формирование их в результате целенаправленной деятельности учителя;
- определение предметного содержания, приёмов обучения и комплекс нестандартных задач, которые выходят за рамки учебного материала и направленные на организацию исследовательской деятельности учащихся.

Целенаправленная деятельность по организации исследовательской деятельности была организована в форме математического кружка «Малый физмат».

Цель: развитие логического мышления и способности учащихся к математической деятельности, расширение знаний учащихся о методах и способах решения текстовых задач, повышение уровня умения решать текстовые задачи, формирование умения решать нестандартные задачи, развитие устойчивого интереса учащихся к изучению математики.

Задачи:

– познакомить учащихся со стандартными и нестандартными способами решения текстовых задач;

– предоставить учащимся возможность проанализировать свои способности к математической деятельности;

– развить у учащихся умение самостоятельно и творчески работать с учебной и научно-популярной литературой;

– расширить и углубить представление учащихся о практическом значении математики в различных областях и отраслях.

Условия организации занятий. Кружок создается из учащихся 5 «Б» класса, склонных к дополнительным занятиям математикой и желающих повысить свой математический уровень, на добровольной основе. Продолжительность одного занятия не более 40 минут. Занятия проводятся во внеурочное время, в течение учебного года 2 раза в неделю (64 часа).

Занятия кружка рассчитаны на коллективную, групповую и индивидуальную работу. Процесс обучения построен таким образом, что один вид деятельности сменяется другим. Данный подход способствует вовлечению всех учащихся в образовательный процесс, учёт особенностей каждого обучающегося; при групповой работе можно рассчитывать на моделирование ситуаций, предназначенных для решения нестандартных задач. Также групповая работа направлена на сплочение коллектива, выделение в каждой группе ролей и обязанностей учащихся.

Занятия на факультативных уроках отличны от урочных по причине их однообразности для учащихся. В следствии чего на занятиях использовались такие средства обучения как видеофильмы, плакаты, презентации, содержащие теоретический, практический материал или математическую игру. Мотивация как один из факторов успешного развития математических способностей также присутствует в кружке в виде раздачи баллов за каждое выполненное задание учащимися как индивидуально, так и группой.

На факультативных занятиях были использованы такие виды нестандартных задач, как логические и комбинаторные задачи, математические игры, задачи с геометрическим содержанием, задачи по теории чисел и др.

Содержание учебной программы математического кружка, ориентированного на использование нестандартных задач в организации исследовательской деятельности учащихся пятых классов, и тематическое планирование представлены в таблицах 12-13 (см. приложение Б).

Контроль над уровнем развития математических способностей учащихся, посещавших факультативные занятия, проводился несколько раз в год, после прохождения каждой темы. В середине учебного года проводилась диагностика для определения уровня организации исследовательской деятельности при решении нестандартных задач (промежуточный этап). Для этого была использована диагностика предварительного этапа исследования. Проверка знаний и способностей учащихся проводилась с помощью задач, взятых из учебного пособия П. М. Горева и В. В. Утёмова [2] (задачи 191, 205, 233, 258, 355, 445) и методика решения которых рассмотрена выше (Гл. 2, §2.2-2.3).

Результаты выполнения учащимися пятого класса заданий для сравнительной оценки знаний на промежуточном этапе относительно результатов обучающихся на предварительном этапе представлены на рис. 18-19 и таблице 10 (см. приложение А).

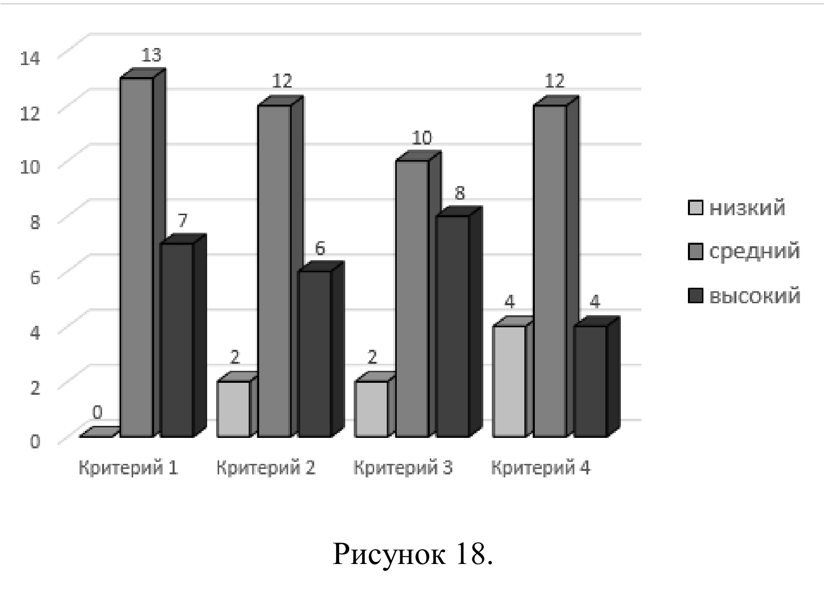

Рисунок 18.

На рисунке 18 продемонстрирована диаграмма критериев развития математических способностей на промежуточном этапе исследования. Данная диагностика показала, что никто из учащихся не обладает низким уровнем развития способности к формализации математического материла (снижение показателя на 10%). Средний уровень по данному критерию наблюдается у 65% учащихся (13 чел.) (снижение показателя на 5%), высокий уровень – у 35% школьников (7 чел.) (повышение показателя на 15%).

Согласно критерию 2, низкий уровень развития способности к оперированию числовой и знаковой символикой имеет 10% учащихся (2 чел.) (снижение показателя на 5%). У 60% школьников (12 чел.) выявлен средний уровень, и можно заметить, что показали данного критерия снизились на 10%. Высоким уровнем развития способности к оперированию числовой и знаковой символикой обладают 30% пятиклассников (6 чел.), посещающих факультативные занятия (повышение показателя на 15%).

10% учащихся (2 чел.) имеют низкий уровень развития гибкости мышления, способности сокращать процесс рассуждения, то есть можем заметить снижение показателя на 20%. Средний уровень по данному критерию имеют 50% учащихся (10 чел.) (повышение показателя на 10%). Способность строить логические взаимосвязи на высоком уровне наблюдается 40% школьников (8 чел.) (повышение показателя на 10%).

На промежуточном этапе низким уровнем развития образно-геометрического мышления и пространственных представлений имеют 20% обучающихся (4 чел.) (снижение показателя на 35%). Средний уровень выявлен у 60% школьников (12 чел.) (повышение показателя на 25%), высокий уровень – у 20% учеников (4 чел.) (повышение показателя на 10%).

Наиболее развитыми критериями из представленных являются критерий 3 (развитие гибкости мышления, способности сокращать процесс рассуждения) и критерий 4 (развитие образно-геометрического мышления и пространственных представлений).

На рисунке 19 рассмотрим сравнительную диаграмму уровней развития математических способностей на предварительном и промежуточном этапах.

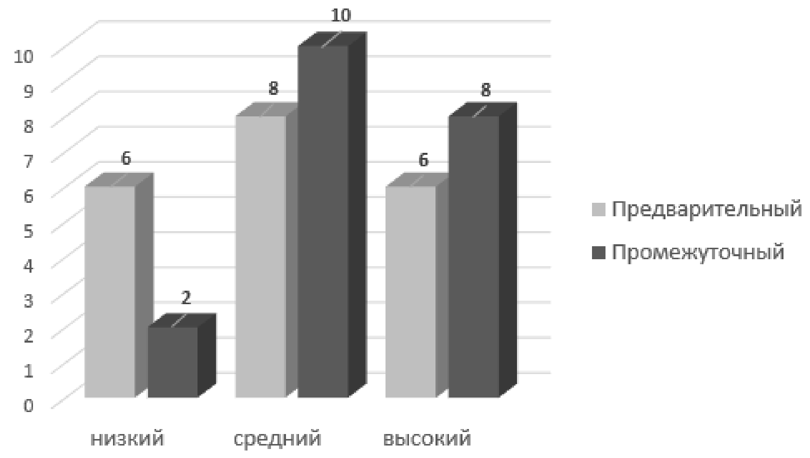

Рисунок 19.

Диаграмма демонстрирует улучшение показателей учащихся пятого класса, занимающихся в математическом кружке «Малый физмат» больше четырех месяцев. Заметно, что сильно снизилось количество учеников с низким уровнем способности к решению нестандартных задач (на 20%), за счёт чего увеличилось количество школьников со средним уровнем (на 10%). Также повысилось количество учащихся с высоким уровнем (на 10%). Таким образом, развитие у учащихся универсальных учебных действий, способности рассуждать, анализировать, делать соответствующие выводы при решении нестандартных задач повышают уровень математических способностей школьников, что говорит о повышении уровня организации их исследовательской деятельности.

Завершающий этап исследования для определения уровня организации исследовательской деятельности учащихся пятых классов при решении нестандартных задач проводился в конце учебного года после завершения учебного плана математического кружка. На данном этапе аналогично предыдущим использовалась диагностика предварительного этапа. Задания для исследования результатов учащихся после окончания курса представлены в §2.2 (задания 1–5) и §2.3 (задание 3) главы 2.

В таблице 11 (см. приложение А) представлены результаты выполнения учащимися заданий для исследования их уровня математических способностей на завершающем этапе.

На рис. 20 представлен сравнительный результат уровня организации исследовательской деятельности учащихся пятых классов при решении нестандартных задач на всех этапах исследования.

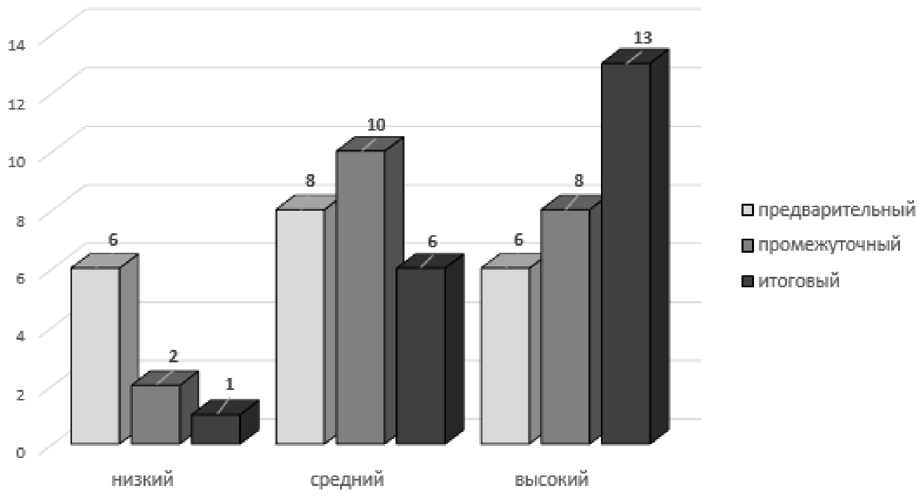

Рисунок 20.

Сопоставив данные полученные на всех этапах обучения, можно заметить явный прогресс в умении учащихся решать нестандартные задачи, применять теоретические сведения на практике. Количество учащихся с низким уровнем математических способностей к окончанию курса значительно уменьшилось: на 25% (на 5 чел.) по сравнению с предварительным этапом, на 5% (на 1 чел.) – с промежуточным этапом. Учеников со средним уровнем также снизилось: на 10% (на 2 чел.) по сравнению с предварительным этапом, на 20% (на 4 чел.) – с промежуточным этапом. Значительное улучшение результатов наблюдаем при анализе количества учеников с высоким уровнем: по сравнению с предварительным этапом их число увеличилось на 35% (на 7 чел.), с промежуточным этапом – на 25% (на 5 чел.).

Таким образом, низкий уровень способности к решению нестандартных задач наблюдается у 5% учащихся (1 чел.), посещавших факультативные занятия «Малый физмат», средний уровень имеют 30% учеников (6 чел.), высокий уровень наблюдается у 65% школьников (13 чел.).

Сравнительный анализ результатов выполнения учащимися пятого класса развивающих и нестандартных задач позволяет сделать вывод о развитии у школьников познавательного и исследовательского интересов школьников к математике. За счёт развития у учащихся нестандартного пространственного мышления, сообразительности и смекалки, а также умения применять полученные знания в практической деятельности у школьников возрастает успешность не только в овладении математикой, но и любого другого предмета смежного цикла.

В результате исследования нами установлено, что после проведения опытно-поисковой работы, направленной на развитии исследовательских способностей в ходе решения нестандартных задач, пятиклассники продемонстрировали высокие результаты развития математического мышления.

В ходе опытно-поисковой работы нами были отобраны и разработаны нестандартные задачи по математике с целью их реализации на факультативных занятиях для развития уровня организации исследовательской деятельности учащихся при решении представленных задач.

После проведения опытно-поисковой работы, направленной на развитии исследовательских способностей в ходе решения нестандартных задач, экспериментальная группа учащихся пятого класса стала демонстрировать более высокий уровень развития математических способностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В условиях современного образования развитие у учащихся исследовательских способностей является одной из наиболее актуальных проблем. Эффективность и качество развития данных способностей влияет на успешность усвоения учащимися любого учебного предмета. Формирование и развитие исследовательской деятельности практически невозможно в условиях стандартного учебного процесса. Возникает необходимость в факультативных занятиях по математике, ориентированных на решение нестандартных задач, для организации исследовательской деятельности обучающихся. Математические кружки способствуют развитию у школьников универсальных учебных действий, математической культуры, самостоятельной практической деятельности, логического мышления, смекалки и сообразительности.

При решении нестандартных задач, которые отличаются от заданий, предлагаемых на уроках математики, ученики не могут воспользоваться стандартным правилом или алгоритмом, так как для таких задач их нет. По этой причине учащиеся самостоятельно исследовательским путем приходят к правильному ответу на задание. Решение нестандартных задач позволяет обучающимся накапливать опыт в сопоставлении, наблюдении, выявлять математические закономерности, высказывать догадки, доказывать логические утверждения. Таким образом, при решении нестандартных задач у учеников формируется определенный стиль мышления, который способствует организации исследовательской деятельности.

В результате исследования был сформулирован понятийный аппарат на основе проведения соответствующей методической литературы: представлены понятия «нестандартные задачи», «учебно-исследовательские умения», «развивающие задачи», «математический эксперимент».

Приведена одна из классификаций нестандартных задач, встречающихся в курсе математики, автором которой является Е. Ю. Лавлинская. Согласно данной классификации, задачи разбросаны в группы по способу действия, выполняемого в процессе решения: комбинаторные задачи, задачи на активный перебор вариантов отношений, задачи на упорядочивание элементов множества, задачи на вливание и переливание, задачи на взвешивание, логические задачи, задачи на определение функциональных, пространственных, временных отношений.

В выпускной квалификационной работе проанализированы учебники по математике 5-6 классов разных авторов на наличие нестандартных задач. Согласно проведенному исследованию, все рассмотренные учебники содержат в той или иной степени ряд нестандартных задач по классификации Е. Ю. Лавлинской. Анализ учебников показал, что наиболее часто встречающимся видом нестандартных задач на уроках математике являются нестандартные задачи, наименее – задачи на вливание и переливание. Также стоит отметить, что учебники по математике для 5-6 классов Г. К. Муравина наиболее насыщены нестандартными задачами для развития математических способностей учащихся.

Проведенное исследование содержит разработку ряда нестандартных задач разных видов, направленных на формирование исследовательских способностей учащихся: развивающие задачи, представленные как способ подготовки к решению нестандартных задач; нестандартные задачи по классификации Е. Ю. Лавлинской, задачи на смекалку и сообразительность, математические эксперименты. На основе данных задач и заданий из учебного пособия П. М. Горева и В. В. Утёмова была разработана методика решения каждого вида нестандартных задач, которая имеет лишь общую структуру для решения каждой группы заданий, однако в ходе выполнения той или иной задачи необходимо учитывать ее особенности.

В ходе реализации опытно-поисковой работы был определен уровень развития математических и исследовательских способностей учащихся пятого класса, посещавших математический кружок «Малый физмат», с помощью разработанных нестандартных задач. При диагностике оценивалось:

1) способность к формализации математического материала;

2) способность к оперированию числовой и знаковой символикой;

3) гибкость мышления, способность сокращать процесс рассуждения (рациональность);

4) развитость образно-геометрического мышления и пространственных представлений.

Контроль развития способностей учащихся проводился на трех этапах: предварительный, промежуточный, итоговый.

После проведения опытно-поисковой работы, направленной на развитие исследовательских способностей в ходе решения нестандартных задач, пятиклассники стали демонстрировать высокий уровень к логическому и пространственному мышлению, развилась сообразительность. Учащиеся стали демонстрировать умение абстрагироваться, делать логические выводы, видеть взаимосвязь объектов, применять теоретический материал в практической жизни, использовать накопленный жизненный опыт при решении нестандартных задач.

Пятиклассники стали проявлять высокий уровень перцептивных способностей, высокий уровень проявления аналитических способностей, способность анализировать целое через составляющие его части, развитым пространственным воображением.

Таким образом, можно сделать вывод, что при решении нестандартных задач в урочное и внеурочное время несомненно наблюдается у учащихся повышенное внимание к изучению математики и общая тенденция к организации их исследовательской деятельности. Перспективы развития темы видятся в разработке программы внеурочной деятельности, направленной на развитие математических и исследовательских способностей обучающихся при решении нестандартных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гайдукова, И. Б. Можно ли научить творчеству? / И. Б. Гайдукова // Миссия творчества в развитии общества: Тезисы докладов Международного научно-практического семинара: Изд-во Курск. гос. техн. ун-та. – Курск, 1999. – С. 66.

2. Горев, П. М. Уроки развивающей математики. 5-6 классы: Задачи математического кружка: учебное пособие / П. М. Горев, В. В. Утёмов. – Киров: МЦИТО, 2014. – 207 с.

3. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений / В. А. Далингер. – Москва: Просвещение, 2006. – 256 с.

4. Далингер, В. А. Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике: учебное пособие / В. А. Далингер, Н. В. Толпекина. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2004. – 264 с.

5. Колягин, Ю. М. Учись решать задачи: пособие для учащихся VII-VIII кл. / Ю. М. Колягин, В. А. Оганесян. – Москва: Просвещение, 1980. – 99 с.

6. Концепция развития исследовательской деятельности учащихся / Н. Г. Алексеев, А. В. Леонтович, А. С. Обухов, Л. Ф. Фомина // Исследовательская работа школьников. – 2002. – №1. – С. 24-33.

7. Крутецкий, В. А. Психология: учебник для учащихся пед. училищ / В. А. Крутецкий. – Москва: Просвещение, 2003. – 442 с.

8. Лавлинская, Е. Ю. Методика работы с задачами повышенной трудности в начальной школе / Е. Ю. Лавлинская. – Волгоград: Перемена, 2010. – 162 с.

9. Липатникова, И. Г. Проведение эксперимента по математике как способ развития индивидуальной проектно- исследовательской деятельности / И. Г. Липатникова, А. В. Косиков // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2.

10. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др. – Москва: Просвещение, 2017. – 287 с.

11. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2015. – 272 с.

12. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – Москва: Мнемозина, 2013. – 280 с.

13. Математика. 5 класс: учеб. учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва: Вентана-Граф, 2014. – 304 с.

14. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова и др. – Москва: Просвещение, 2010. – 303 с.

15. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2015. – 256 с.

16. Математика. 6 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – Москва: Мнемозина, 2013. – 288 с.

17. Математика. 6 класс: учеб. учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва: Вентана-Граф, 2014. – 304 с.

18. Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Е. А. Бунимович, Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова и др. – Москва: Просвещение, 2014. – 223 с.

19. Математика. Арифметика. Геометрия. 6 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева и др. – Москва: Просвещение, 2014. – 240 с.

20. Митенева, С. Ф. Развитие творческих способностей учащихся в процессе решения нестандартных задач по математике: Монография / С. Ф. Митенева. – Вологда: Изд-во ВГПУ, 2008. – 150 с.

21. Муравин, Г. К. Математика. 5 класс: учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2014. – 318 с.

22. Муравин, Г. К. Математика. 6 класс: учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2014. – 319 с.

23. Нешков, К. И. Функции задач в обучении / К. И. Нешков, А. Д. Семушин // Математика в школе. – 1971. – №3. – С. 4-7.

24. О национальной доктрине образования в Российской Федерации: постановление Правительства РФ от 04 октября 2000 г. №751 // Собрание законодательства. – 2000. – № 41. – Ст. 4089.

25. Саранцев, Г. И. Общая методика преподавания математики: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – Саранск: [б.и.], 1999. – 207 с.

26. Хабибуллин, К. Я. Решение нестандартных задач – основа творческой деятельности учащихся / К. Я. Хабибуллин // Школьные технологии. – 2000. – №2. – С. 137-141.

Приложение А

Результаты выполнения учащимися пятого класса нестандартных задач для оценивания их математических способностей

Таблица 9 – Результаты на предварительном этапе

№ п/п	№1	№2	№3	№4	№5	№6	Сумма
1	3	2	2	1	2	3	13
2	2	1	1	0	0	1	5
3	2	1	1	1	1	2	8
4	1	0	2	2	2	3	10
5	4	3	4	2	1	4	18
6	3	2	2	2	2	2	13
7	2	3	3	1	1	3	13
8	4	3	2	1	3	3	16
9	2	4	3	2	2	4	17
10	3	4	4	1	1	3	16
11	1	2	2	0	0	1	6
12	2	1	0	1	0	1	5
13	4	4	4	3	3	4	22
14	0	1	1	0	0	0	2
15	1	2	1	1	1	2	8
16	3	1	2	3	2	2	13
17	2	1	2	2	1	1	9
18	4	3	4	3	3	4	21
19	2	2	3	2	2	2	13
20	2	2	1	1	1	2	9

Таблица 10 – Результаты на промежуточном этапе

№ п/п	№191	№205	№233	№258	№355	№445	Сумма
1	3	2	4	4	2	2	17
2	3	2	2	3	2	1	13
3	3	2	2	3	2	0	12
4	3	2	1	2	4	2	14
5	4	2	3	4	3	3	19
6	2	4	2	3	2	1	14
7	2	2	3	3	4	0	14
8	4	2	3	3	3	2	17
9	3	4	3	3	2	2	17
10	3	3	2	2	3	4	17
11	1	1	1	3	1	0	7
12	1	1	3	1	3	2	11
13	4	4	3	4	4	4	23
14	2	2	1	1	1	1	8
15	3	2	1	1	3	1	11
16	2	1	4	1	4	1	13
17	3	1	1	3	3	3	14
18	3	4	4	2	4	4	21
19	4	3	4	3	3	0	17
20	2	2	2	1	3	1	11

Таблица 11 – Результаты на итоговом этапе

№ п/п	Гл. 2, §2.2					Гл. 2, §2.3	Сумма
	№1	№2	№3	№4	№5	№3	
1	3	3	4	4	3	2	19
2	4	2	3	3	2	3	17
3	4	3	2	3	2	0	14
4	3	2	2	3	4	1	15
5	4	2	3	4	4	3	20
6	3	4	3	3	2	1	16
7	4	3	2	3	4	1	17
8	4	3	3	3	2	4	19
9	3	4	4	3	3	4	21
10	4	3	2	3	3	3	18
11	3	1	0	2	2	1	9
12	3	0	3	1	2	3	12
13	4	4	4	4	4	4	24
14	3	2	1	0	1	1	8
15	3	2	2	3	2	2	14
16	3	2	3	3	2	1	14
17	4	2	2	3	3	3	17
18	4	4	4	4	4	3	23
19	4	3	4	3	3	3	20
20	3	2	1	0	3	4	13

Приложение Б

Учебный план факультативного курса для учащихся пятых классов «Малый физмат»

Таблица 12 – Содержание факультативного курса

№ п/п	Наименование разделов, тем	Часы учебного времени
1	Занимательная арифметика. Числа.	14
2	Текстовые задачи	13
3	Логические задачи	11
4	Комбинаторные задачи	5
5	Геометрические задачи	6
6	Математические игры	13
7	Обобщающее повторение (решение олимпиадных заданий)	2
	Итого:	64

1. Занимательная арифметика. Числа (14 ч.)

История развития математики. Математические головоломки. «Магические» фигуры. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. С помощью цифр и знаков действий научить составлять такие числовые выражения, значения которых были бы равны данным числам. Рассмотреть задачи, которые можно решить, применяя принцип Дирихле.

2. Текстовые задачи (13 ч.)

Решение задач на переливание различных типов. Решение задач на движение: в одну сторону, в разные стороны. Решение задач на взвешивание.

3. Логические задачи (5 ч.)

Рассмотреть три широко распространённых типа логических задач и выяснить, как следует подходить к их решению. Чаще всего встречается тип задач, в которых на основании серии посылок, требуется сделать определённые выводы. Не менее распространена и другая разновидность логических задач, которые принято называть задачами «о мудрецах». Третья разновидность популярных логических задач составляют задачи о лжецах и тех, кто всегда говорит правду.

Рассмотреть задачи, решаемые с помощью «кругов Эйлера». При решении логических задач часто бывает трудно запомнить многочисленные условия, данные в задаче, и установить связь между ними. Решать такие задачи помогают графы, дающие возможность наглядно представить отношения между данными задачи. Рассмотреть применение графов при решении конкретных задач.

4. Комбинаторные задачи (5 ч.)

В процессе знакомства с математической дисциплиной, называемой «Комбинаторика», рассмотреть несложные вероятностные задачи и комбинаторные задачи с квадратами.

5. Геометрические задачи (6 ч.)

Научить выполнять простейшие чертежи на клетчатой бумаге, рисовать орнаменты. Развивать наблюдательность, глазомер, способность к конструированию. Решать геометрические головоломки, задачи на клетчатой бумаге.

6. Математические игры (13 ч.)

Рассмотреть числовые ребусы: арифметические примеры на различные действия, в которых некоторые цифры заменены звездочками. Основная задача – восстановить первоначальную запись примера. При решении задач подобного вида требуется выполнение одного условия: фигура должна быть вычерчена одним непрерывным росчерком, т.е. не отнимая карандаша от бумаги и не удваивая ни одной линии, другими словами, по раз проведённой линии нельзя уже было пройти второй раз. Рассмотреть числовые и геометрические головоломки. Научить сопоставлять различные факты, выделять одинаковые и разные соотношения закономерности. Познакомить с наиболее простыми «моделями-играми». Рассмотреть такие игры, в которых ничьи отсутствуют и для которых теория позволяет установить, какая из сторон выигрывает при условии правильной игры. Познакомить с двумя методами поиска выигрышной тактики для одной из сторон (выигрышной стратегии): «поиск симметрии» и «анализ с конца».

Таблица 13 – Тематическое планирование

№	Тема	Часы
Занимательная арифметика. Числа (14 ч)		
1	История развития начальной математики	1
2-5	Составление числовых выражений	4
6-7	Математические головоломки	2
8	«Магические» фигуры	1
9-12	Признаки делимости	4
13-14	Принцип Дирихле	2
Текстовые задачи (13 ч)		
15	Задачи на переливание типа «Водолей»	1
16	Задачи на переливание типа «Переливашка»	1
17-18	Решение задач на переливание	2
19-22	Задачи на взвешивание	4
23	Задачи на движение навстречу друг другу	1
24	Задачи на движение в противоположные стороны	1
25	Задачи на движение в одну сторону	1
26-27	Решение задач на движение	2
Логические задачи (11 ч)		
28	Кто это сделал?	1
29	Правда или ложь?	1
30	Запутанная информация	1
31	Математические игры, выигрышные ситуации	1
32	Поиск закономерности	1
33-35	Круги Эйлера	3
36-38	Графы в решении задач	3
Комбинаторные задачи (5 ч)		
39-40	Вероятность	2
41	Перемещение	1
42	Размещение	1
43	Сочетание	1
Геометрические задачи (6 ч)		
44	Лабиринты	1
45	Задачи на разрезание	1
46	Задачи на перекраивание	1
47	Геометрические головоломки	1
48	Геометрические иллюзии	1
49	Геометрия на клетчатой бумаге	1
Математические игры (13 ч)		
50-52	Числовые ребусы	3
53-54	Росчерком пера	2
55-57	Головоломки	3
58-61	Шифровки	4
62	Задачи в стихах	1
63-64	Обобщающее повторение	2