Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный педагогический университет
им. И. Я. Яковлева»

Физико-математический факультет

Кафедра математики и физики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______ Т. И. Рыбакова
«__» ________ 2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ (БАКАЛАВРСКАЯ) РАБОТА

Направление подготовки бакалавров
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Профили Математика и информатика

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ КУРСА ПО ВЫБОРУ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В КЛАССАХ ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Научный Руководитель		доцент, к.ф.-м.н.	А.Н. Матвеева
	подпись, дата	должность, ученая степень	инициалы, фамилия
Выпускник			О.В. Чумакова
	подпись, дата		инициалы, фамилия
Рецензент		доцент, к.ф.-м.н.	
	подпись, дата	должность, ученая степень	инициалы, фамилия

Чебоксары 2020

Содержание

Введение

Комплексные числа получили широкое распространение и применение не только в самой математике, но и в ее приложениях. Получение знаний о комплексных числах развивает не только математические знания в целом, но и играет огромную роль в решении задач других прикладных наук: алгебраической и неевклидовой геометрии, теории чисел, механики, аэро- и гидродинамики.

Алгебра комплексных чисел также может применяться в более «простых» базовых разделах математики, таких как элементарная геометрия, тригонометрия, теория движения и подобия, а также в электротехнике и в различных физических задачах.

В литературе мало информации, которая показывает использование комплексных чисел в разделах элементарной математики, описанных выше. Если рассматривать русскую литературу, то практически нет руководств по элементарной геометрии и соответствующей теории преобразований, в которых можно было бы применить алгебраический аппарат комплексных чисел.

В связи с вышеупомянутыми трудностями в этой области математики, существует необходимость изучения методов обучения комплексных чисел в школьном курсе. Поэтому необходимо разработать курс по выбору «Комплексные числа», основная цель которого − познакомить старшеклассников с понятием комплексных чисел, изучить их свойства и показать, как комплексные числа можно использовать для решения проблем элементарной математики. Курс разработан таким образом, что для овладения им учащиеся должны знать только начальную алгебру, геометрию и тригонометрию на уровне старшей школы.

Многие отечественные и зарубежные авторы высказывают мнение, что удаление комплексных чисел из курса алгебры было вредным не только для самого курса, но и для школьной математической программы в целом, кроме того, у учащихся возникают проблемы с пониманием комплексных чисел и возможностью их использования. Но этот факт не является непреодолимым препятствием, и только курсы по выбору могут помочь решить эту проблему. Можно сказать, что в курсе по выбору достаточно познакомиться с систематическим изложением раздела элементарной алгебры.

При изучении математики учащиеся не сталкиваются с комплексными числами ни в алгебре, ни в геометрии. При посещении курса школьники будут иметь представление о своих возможностях и с большей вероятностью выберут наиболее правильный путь в будущем профиле обучения. В связи с этим вопрос обучения школьников по теме «Комплексные числа» представляет большой интерес. Курсы по выбору являются хорошим выходом из этой ситуации.

Объектом исследования является процесс организации курсов по выбору при изучении школьной программы математики в условия перехода к профильн ому обучению.

Предметом исследования является методика проведения курса по выбору «Комплексные числа» для учащихся 11 классов естественно-математического профиля.

Указанные объект и предмет исследования определяют цель работы, которая заключается в разработке содержания и методики проведения курса по выбору «Комплексные числа» в классах естественно-математического профиля.

Гипотеза исследования: курс по выбору на тему «Комплексные числа» приводят к росту уровня подготовленности учащихся, повышают уровень их математической культуры и образованности.

Для достижения поставленной цели и проверки гипотезы необходимо решить следующие задачи:

1)выяснить роль курсов по выбору в системе профильного обучения в классах естественно-математического профиля;

2) подобрать и изучить необходимый математический материал по данной теме;

3) проанализировать методическую литературу и школьные учебники, с целью выявить место и роль комплексных чисел в курсе математики средней школы;

4)разработать программу и содержание курса по выбору «Комплексные числа»;

5) разработать методические рекомендации по изучению данного курса по выбору.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Во введении обосновывается актуальность данной темы, формулируется гипотеза, указываются объект, предмет, цель и задачи исследования.

Первая глава «Психолого-педагогические и методические основы изучения комплексных чисел в школьном курсе математики» включает в себя два параграфа, в которых раскрывается понятие комплексного числа, основы их введения в современный учебный процесс. Также в первой главе анализируются различные учебники, рассматривающие комплексные числа.

Вторая глава называется «Профильное обучение по теории комплексных чисел на основе использования курсов по выбору». В первом параграфе рассматривается необходимость включения курсов по выбору в образовательную программу. Во втором параграфе приводится разработанная программа курса, содержащая поурочное планирование с указанием целей и задач обучения, необходимый теоретический материал, методический комментарий.

Третья глава «Методика обучения решению задач с применением комплексных чисел на основе проведения курсов по выбору» включает в себя рассмотрение применения комплексных чисел при решении алгебраических уравнений, геометрических задач и их применение в тригонометрии. В заключении подводится общий итог работы. Список использованной литературы содержит 23 источника.

Глава 1. Психолого-педагогические и методические основы изучения комплексных чисел в школьном курсе математики

§1.1. Психолого-педагогические основы введения комплексных чисел в школьный курс математики

Ни одна из основных задач современного школьного образования не усваивается без сформированности определенного типа мышления.

В психологии мышление определяется как «процедура познавательной работы человека, которая характеризуется обобщенным и косвенным представлением реальности как особой семьи теоретических и практических действий» [1]. Его суть отражается в общих и значимых свойствах объектов и явлений, в том числе и тех, которые напрямую не воспринимаются.

Расширение границ познания идет за счет мышления, которое позволяет выходить за рамки ощущений и восприятий. Мышлением обрабатывается информация, полученная от ощущений и восприятий, а результаты умственной деятельности проверяются и используются на практическом уровне [2].

Разницу между мышлением и другими психологическими процессами можно увидеть в том, что для первого всегда имеется проблема, которую нужно решить, и быстро меняющиеся обстоятельства, в которых она ставится. Расширение границы познания происходит за счет мышления. На основании полученной информации сделаны определенные выводы, которые являются как теоретическими, так и практическими. В мышлении свойства предметов и явлений, их отношения отражаются в обобщенной форме, в виде законов, сущностей. На степень формирования основных познавательных процессов влияет уровень мышления. Особым результатом мышления может стать понятие − общее представление о классе объектов в их более общих и значимых чертах.

С взрослением у учеников происходит большее развитие мышления. Так как материал, который дается на занятиях становится более трудным, им приходится подстраиваться под него и искать новые выходы. Это требует от учеников большей самостоятельности.

Для старшеклассников самым важным является значимость самого учения, его задач, целей, содержания и методов. Учащийся старших классов сначала пытается понять смысл метода умственной работы, а затем осваивает его, если он действительно полезен. Мотивы обучения также меняются, так как они становятся важным смыслом жизни [3].

У старшеклассников огромную роль играет и абстрактное мышление, и конкретное. Изменение хода мыслительного процесса происходит с развитием абстрактных и теоретических знаний. Мышление старшеклассников описывается высоким уровнем обобщения и абстракции. Для учащихся приоритетной задачей выступает поиск причинно-следственных связей между общим и конкретным, чтобы выделить существенное и сформулировать определение на его основе [5].

Встречаются и некоторые минусы в мышлении старшеклассников. К такому, например, можно отнести их стремление к абстрактным рассуждениям, выдвижению необычных идей, которые возникают в фантастических вымыслах [6]. Наблюдается некритическое отношение к своим знаниям. Так некоторые хорошисты в учебе, преувеличивают свои знания и перестают дальше учиться. К счастью, таких представителей не так много, да и среди них можно найти достигающих высокой степени в подготовке к последующей учебе [4].

Приоритет, который ставится перед старшеклассником – это учеба и получение образования. Так как с переходом из класса в класс происходит увлечение учебной нагрузки, трудности материала, это требует от учеников большей активности и хорошее развитие теоретического мышления. В связи с чем, у них возникают трудности в обучении в старших классах.

У них меняется отношение к учебе, т.к. к ним уже предъявляются новые требования, которым нужно соответствовать. У учеников старших классов появляется осознание того, что полученное образование им понадобиться в дальнейшей взрослой жизни.

Еще одной отличительной особенностью выступает избирательное отношение к учебным предметам [7]. Это можно связать с тем, что они начинают испытывать больший интерес к определенной профессии, которая требует определенных предметов для функционирования [8].

В настоящее время можно отметить, что учителя уделяют больше внимания активному мышлению учащихся, тем самым прививая им интерес к учебе. Индивидуальных характер обучения, позволяет педагогу равномерное распределить свое внимание на всех учеников [9].

Психология является необходимой базой преподавания любого предмета, которая помогает улучшить учебный процесс.

На занятиях по математике происходит активное формирование как общих знаний и умений, так и специфических направлений самого предмета.

Важной задачей математики является пробуждение у учеников необходимости в активном мышлении и поиска наилучшего решения трудных задач. Помимо прочего у них должны быть хорошо развиты логические умения, для доказательства понятий, приведения аргументов и фактов в оспаривании ложных выводов и так далее [10].

Приоритетной формой работы с учащимися старших классов являются такие занятия, в ходе которых будут развиваться:

- навыки сравнения;
- умение сравнивать;
- умение анализировать;
- умение синтезировать;
- умение абстрагировать;
- умение обобщать;
- умение конкретизировать [7].

Учитель математики помимо общих целей ставит и педагогические, которые заключаются в формировании определенного мышления и математической культуры.

Знания детей ограничиваются лишь действительными числами, что говорит о низкой математической культуре. Однако достаточно зрелое математическое образование старшеклассников наталкивает их на расширения понятия о действительном числе. Изучая комплексные числа, обучающиеся, не только развиваются, но и знакомятся с их приложением в технике и науках естественнонаучного цикла. Существует ряд учебников для профильных классов, в которых учащимся предлагается познакомиться с комплексными числами.

Далее детально разберем проблемы, с которыми сталкиваются как учитель, так и учащиеся при изучении темы «Комплексные числа».

Во-первых, выделим, что данная тема обязательно изучается только на профильном уровне старшей школы. Это связано с тем, что к данному моменту у учащихся уже сформировано целостное и разностороннее мышление, выстроен необходимый мотив обучения.

В. А. Сухомлинским было отмечено, что у старших школьников есть трудность в познании и самостоятельном анализе фактов, так как ранее дети привыкли все заучивать, а не приводить обобщающие понятия [7].

Многими школьниками отмечено, что у них плохая подготовка для 10-11 класса. Первопричиной этого является отсутствие способностей в самостоятельном изучении учебного материала и возможность их грамотно разложить.

С точки зрения методологии, тема «Комплексные числа» помогает развить и углубить понятия полиномов и чисел, встроенных в основной курс математики, тем самым завершив развитие понятия числа в старшей школе.

Основными задачами исследования являются:

1. Совершенствование математической культуры учащихся.
2. Углубление представления о понятии чисел.

Данная тема важна не только в курсе самой математики, но и в области физики, техники и т.д. Обязательным минимумом для школьника по теме «Комплексные числа» должно быть четкое представление о комплексных числах и о его формах. Также им необходимо уметь выполнять алгебраические операции над комплексными числами и переводить комплексные числа из одной формы в другую.

В связи с тем, что существует мало учебников и методических разработок по теме «Комплексные числа», учитель имеет право выбирать методы и приемы обучения.

§ 1.2 Анализ школьных учебников по алгебре и началам анализа для 10-11 классов, содержащих тему «Комплексные числа»

До определенного периода времени комплексные числа не входили в школьную программу обучения математике. С определенного периода времени новые числа изучаются школьниками в профильных классах, а также в качестве дополнительного материала на базовом уровне.

Рассмотрим пособие для учащихся физико-математических классов Н. Я. Виленкина, О. С. Ивашов-Мусатова, С. И. Шварцбурга «Алгебра и начала математического анализа».

Материл в учебнике, представлен таким образом, что к моменту введения комплексных чисел учащиеся пройдут полный курс школьный алгебры и тригонометрии, а также у них будет сформировано представление об интегральном и дифференциальном исчислении, познакомятся с дифференциальными уравнениями. Материал, относящийся к теме исследования, представлен в двух разделах, которые называются «Комплексные числа в алгебраической форме»; «Тригонометрическая форма комплексных чисел».

На подготовительном этапе предлагается вспомнить методы решений алгебраических уравнений, вспомнить каким образом решался вопрос разрешимости этих уравнений. Авторы пособия начинают изложение данной темы с сопоставления изученного материала и исторических сведений: при отрицательном знаке дискриминанта нельзя найти действительные корни квадратного уравнения, что привело к необходимости расширить множество действительных чисел. Таким образом, для учащихся создается проблемная ситуация и выходом из этой ситуации будет введение нового вида числа, с которым они еще не знакомы. Так детей знакомят с мнимой единицей, и новое для учащихся комплексное число представляется в виде суммы действительной части и мнимой. И на данном этапе рассмотрения этой темы вводится определение комплексного числа как «…$(a;b)$ действительных чисел a и b, взятых в определенном порядке. Две пары $(a;b)$ и $(c;d)$ задают одно и то же комплексное число в том и только в том случае, когда они совпадают, т.е. когда $a=c$ и $b=d$ » и уже для чисел, представленных в таком виде, вводят операции сложения, умножения.

Так как всякую упорядоченную пару действительных чисел можно рассматривать как координаты вектора на плоскости, то в процессе изучения комплексных чисел можно проводить аналогию с векторами и соответственно вводить операции над комплексными числами подобно соответствующим операциям над векторами. Стоит отметить, что умножение комплексных чисел с точки зрения геометрии будет представлять собой комбинацию поворота вектора на некоторый угол с преобразованием подобия.

Центральным вопросом изучения этого параграфа является знакомство с методами извлечения квадратных корней из комплексных чисел с последующим решением уравнений с комплексными коэффициентами.

Во втором параграфе авторы заканчивают рассмотрение «комплексного числа в алгебраической форме» и переходит к тригонометрии комплексного числа, опираясь на геометрические представления. Они начинают говорить о координатной плоскости и задают на ней комплексное число в виде радиус-вектора, т.е. геометрически его интерпретируя. Вводят полярную систему координат. Так как учащимся предложено познакомиться с еще одним способом записи комплексного числа, то нельзя без внимания оставить рассмотрение таких вопросов теории комплексных чисел как формула Муавра и формула, позволяющая извлекать корни n–ой степени из числа. И аналогично, как при рассмотрении квадратного корня рассматривают решение двучленных и трехчленных уравнений. Изложение материала не обходит стороной и основную теорему алгебры, которая справедлива как для комплексного, так и для действительного множества.

Материал, представленный в учебнике достаточно большой по объему, поэтому если его использовать в образовательном процессе при составлении календарного графика и тематического планирования необходимо выделить достаточно много часов. Занимаясь по этому учебнику, учащиеся не просто познакомятся с новым видом чисел, но и изучат основы теории функции комплексного переменного [11].

Далее проанализируем учебник С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина «Алгебра и начала математического анализа» для учащихся 11 классов, который содержит материал, относящий к теме исследования. Согласно данному изданию, изучение математике в школе должно быть завершено знакомством с комплексными числами. Учащимся предлагается ознакомиться со следующим материалом: «Алгебраическая форма и геометрическая интерпретация комплексных чисел»; «Тригонометрическая форма комплексных чисел»; «Корни многочленов. Показательная форма комплексных чисел». Каждый параграф состоит из нескольких пунктов, которые рассматриваются основные определения, свойства чисел, теоремы. В первом параграфе вводятся новые понятия «комплексное число», «алгебраическая форма записи», «геометрическая интерпретация». Введение этих понятий можно может основываться как на применение конкретно-индуктивного метода, так и на основе абстрактно-дедуктивного метода. Многие слова, входящие в эти понятия знакомы ученикам, поэтому особых трудностей возникать не должно.

При освещении вопроса о сопряженности и её свойств, авторы изменили содержание данной темы, добавив понятие о взаимно сопряженных числах.

Во второй параграф входят геометрическая интерпретация комплексного числа, понятия «модуль», «аргумент» и «главные аргумент» комплексного числа. Формулы, связывающие эти понятия с действительными числами, участвующими в алгебраической записи комплексных чисел, старшеклассники могут вывести и доказать самостоятельно, опираясь на знания из области геометрии и тригонометрии. Основная цель представленного в этом параграфе материала – знакомство с еще одной формой записи комплексных чисел (тригонометрической) и формирование навыков перевода комплексных чисел из одной формы записи в другую.

Последний параграф «Корни многочленов. Показательная форма комплексных чисел» рассматривает вопросы извлечения корней из комплексных чисел с перечислением свойств, вопросы разрешимости алгебраических уравнений в комплексных числах и знакомства с еще одним способом записи комплексных чисел (показательная). В учебнике корни из комплексных чисел рассматриваются только для тригонометрической формы записи, т.е. для извлечения корня из комплексного числа в алгебраической форме его обязательно переводят в тригонометрическую форму. Вопрос о корнях многочленов рассматривается, но вскользь и более обще (объясняясь примерами).

Проанализировав учебник, можно сделать вывод, что материал, содержащийся в нем, носит ознакомительный характер. Его можно применять в общеобразовательной школе. Практический материал скуден, небольшой по объему. [12].

В учебном издании Ю. М. Колягина Ю. В. Сидорова, М. В. Ткачевой, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунина «Алгебра и начала математического анализа» для 11-го класса комплексные числа изучаются на протяжении девяти параграфов, что говорит об достаточно глубоком изложении материала.

В данном пособии материал предлагается небольшими порциями в следующей последовательности. Вначале, ка и в большинстве учебников, рассматриваются вопросы разрешимости алгебраических уравнений. Рассмотрев квадратное уравнение, не разрешимое в действительных числах, перед учащимися ставится проблемная задача в отыскании корней этого уравнения. Для решения этой задачи предлагается ввести новое число, которое в последующем назовут комплексным. В учебнике операции над комплексными числами также вводится последовательно, сначала сложение и умножение комплексным чисел, а также их свойство. Такое введение материала может быть обусловлено с такими алгебраическими понятиями как «группа» и «аксиомы группы». Далее рассматриваются комплексно-сопряженные числа, которые сыграют немаловажную роль при введении операции деления. Перечисляя свойства комплексно-сопряженных чисел, появляется еще одно важное понятие «модуль комплексного числа». В четвертом параграфе «Вычитание и деление комплексных чисел» операция вычитания и деления вводятся посредством операции, обратной сложению и умножению комплексных чисел соответственно. Введение этих операции подобным образом можно соотнести с аксиомами кольца и поля. Далее для знакомства с различными формами записи комплексных чисел возникает необходимость познакомить учащихся с понятием «комплексной плоскости», т.е. рассмотреть комплексные числа с точки зрения геометрии. Здесь важно определить геометрический смысл модуля числа и подготовить учеников к введению понятия «главного аргумента» комплексного числа. Параграф «Тригонометрическая форма комплексного числа» посвящен вопросам перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической форме записи. После того, как учащиеся познакомятся с тригонометрической формой записи числа, возникает логический вопрос: «Для чего она нужна?», ведь в алгебраической форме записывать числа гораздо короче и проще. Для того чтобы показать значимость этой формы записи авторы учебника предлагают познакомиться с формулой Муавра, которая упрощает операцию возведения комплексных чисел в степень. Также знакомят учеников с преимуществами выполнения операций умножения и деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. После изучения основных понятий и операций, связанных с комплексными числами, авторы учебника предлагают еще раз возвратиться к вопросу о разрешимости квадратных уравнений. Учащиеся делаю вывод о том, что на множестве комплексных чисел квадратное уравнение всегда разрешимо и имеет два решения. В завершающем параграфе «Примеры решения алгебраических уравнений» рассматриваются различных типы уравнений, показывается, что они все разрешимы на множестве комплексных чисел и формулируется основная теорема алгебры.

Изложение материала дается небольшими порциями, что важно при изучении «сложной» для понимания темы. Здесь просматривается связь между порядком вводимых операций над числами и аксиомами поля, т.к. известно, что множество комплексных чисел является полем. Таким образом, можно сказать, что здесь проводится пропедевтика вузовского курса «теории функции комплексного переменного» и «числовых систем». Недостатком учебника можно считать малое количество упражнений и необязательное изучение некоторых параграфов. [13].

По учебнику А. Г. Мордковича, П. В. Семенова «Алгебра и начала математического анализа» знакомство с комплексными числами происходит в 10 классе. Изучив тригонометрию и освоив понятие «действительное», ученики знакомятся с новым видом числа. Такое изложение материала весьма разумно, так как при изучении комплексных чисел необходим материал из тригонометрии и комплексное число является обобщением действительного числа.

Последовательность вводимых понятий связана с логической структурой теории комплексных чисел: сначала вводится алгебраическая форма записи комплексного числа и операции над ними, затем вводят понятие «комплексной плоскости», представляют еще одну форму записи комплексных чисел, после этого предлагается изучить роль комплексных чисел в решении квадратных уравнений. Завершают тему изучением вопроса об извлечении корня третьей степени из комплексного числа и возведение комплексных чисел в натуральную степень.

При введении комплексного числа авторы учебника предлагают опираться на материал, изученный раннее: в частности, вспомнить все изученные числовые множества и операции, выполнимые на этих множествах. На множестве натуральных чисел не всегда выполнимы операции вычитания и деления, на множестве целых чисел – операция деления, на множестве рациональных и действительных чисел выполнимы все четыре арифметические операции, кроме извлечения квадратного корня. Рассмотрев простейшее уравнение, подводим учащихся к введению мнимой единицы, квадрат которой равен. Таким образом, ставится задача рассмотрения множества таких чисел, которые расширят действительные числа. Таким множеством является множество комплексных чисел. Арифметические операции в изложении учебника представлены в таком виде, что результат также является комплексным числом.

Для более глубоко изучения комплексных чисел необходимо рассмотреть их с геометрической точки зрения. Предлагается рассмотреть координатную плоскость, на одной из осей которой будут располагать мнимые числа, а на другой – действительные. Тем самым можно рассмотреть связь действительных и комплексных чисел с точки зрения геометрии. Всякому комплексному числу соответствует единственная точка на плоскости и, соединив эту точку с началом координат, получаем радиус-вектор этой точки, длина которого будет представлять собой модуль комплексного числа. В учебнике предлагается рассмотреть свойства модуля комплексного числа. Далее используя геометрические представления, угол между радиус-вектором и положительным направлением действительной оси представляет собой главный аргумент комплексного числа. После введенных понятий учащихся знакомят с тригонометрической формой записи комплексного числа.

Далее предлагается изучить извлечение квадратного корня. Вначале рассматривается корень для комплексных чисел с нулевой мнимой частью и отрицательной действительной, и решаются задачи только на интуитивном уровне, основываясь на решение примеров. Но рассмотрев теорему о сопряженном корне, авторы предлагают рассмотреть общее решение вопроса об извлечение корня 2 степени в виде формулы, как в алгебраической форме, так и в тригонометрической и алгоритм его извлечения.

Рассмотрев данный вопрос, предлагает изучить решение для квадратного уравнения с комплексными переменными, а также теоремы Виета, обратная теореме Виета и формула разложения квадратного трехчлена.

В завершение параграфа вводится формула Муавра и алгоритм извлечения кубического корня из комплексного числа.

При изложении материала в учебнике представлено небольшое количество упражнений, с помощью которых можно закрепить только что изученный материал. Отдельно имеется задачник, который к каждому параграфу включает задания трех уровней сложности. [14].

В учебном пособии М. И. Башмакова, Б. М. Беккер, В. М. Голохового «Задачи по математике. Алгебра и анализ» комплексные числа представлены в последней главе. Пособие построено таким образом, что его можно использовать независимо от учебника, по которому вводилась теория. Используя пособие можно осуществлять дифференцированный подход в обучении комплексным числам: в начале каждого пункта предлагается рассмотреть решение определенного количества задач и только после этого приступать к самостоятельному выполнению других задач. К более простым задача приведены указания и краткий теоретический материал, содержащий все необходимые формулы и определения, более сложные задачи приведены с решениями [15].

В завершение рассмотрим учебник А. П. Киселева «Алгебра. Часть II». Тема «Комплексные числа» представлена в следующих пунктах «Мнимые числа», «Комплексные числа», «Действия над комплексными числами», «Геометрическое изображение комплексного числа», «Тригонометрическая форма комплексного числа», «Действия с комплексными числами, выраженными в тригонометрической форме». Изучение темы предлагается начать с введения чисто мнимых чисел конкретно-индуктивным методом, далее вводятся понятия «комплексное число», «противоположные комплексные числа», «сопряженные комплексные числа». Иллюстрируя примеры, вводятся арифметические операции, операцию возведения в натуральную степень и извлечение квадратного корня из комплексного числа, записанных в алгебраической форме. Аналогично учебникам, рассмотренные выше, в пункте «Геометрическое изображение комплексного числа» показывается, что всякое комплексное число может быть представлено в виде точки на плоскости, для которого можно определить модуль. Далее вводится тригонометрическая форма записи комплексного числа и основные операции, выполняемые над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме.

Учебник включает в себя краткие исторические факты. Материал достаточно объемный и включает в себя много задач для проведения практических занятий [16].

Глава 2. Профильное обучение по теории комплексных чисел на основе использования курсов по выбору

§2.1. Курсы по выбору и особенности их организации

Математика является одним из главных предметов в жизни школьников. Это можно объяснить тем, что ее нужно обязательно сдавать после окончания школы. И математика также необходима для поступления в высшие учебные заведения на направления технического или физико-математического профиля. Таким образом, можно сделать вывод, что математика играет огромную роль на этапе предпрофильной и профильной подготовки учащихся. Поэтому многие учителя заинтересованы в создании курсов по выбору.

Подразумевается, что учебный план для профильной школы будет состоять из трех типов курсов:

- базовые общеобразовательные курсы;
- профильные общеобразовательные курсы;
- курсы по выбору.

Обязательным для учащихся всех профилей обучения являются базовые предметы. Универсальные учебные действия, которые должны уметь выполнять школьники, прописаны в программах и определяются содержанием учебников, которые рекомендованы Министерством просвещения Российской Федерации для общеобразовательных школ.

Если же рассматривать профильное образование, то тут имеются определенные углубленные курсы конкретно по каждому профилю. Например, к предметам гуманитарного профиля относятся «Русский язык», «Литература», «Иностранный язык», «История», «Обществоведение», «Мировая художественная культура». А в физико-математический профиль включаются «Алгебра», «Геометрия», «Физика».

Курсы по выбору – неотъемлемая часть для учеников, которая входит в состав выбранного профиля обучения на этапе получения среднего общего образования. Для начала, учитель должен определиться с курсами, которые будут интересны детям и доступные не только ему, но и его ученикам. Далее школьники делают выбор в пользу тех занятий, которые развивают в них стремление к тому или иному предмету и помогают определить их профессиональные качества [17].

Изучение курсов по выбору идет за счет компонента образовательного учреждения. За все время обучения в старших классах ученикам предлагается школой множественный выбор, среди которых они должны выбрать 5-6 курсов. Суммарно можно вычислить, что на один курс можно выделить от 35 до 70 часов. Само изучение можно разбить как на семестр, так и один или два учебных года.

Курсы по выбору являются основой для индивидуализации образовательного пути школьника [18]. Форма проведения таких курсов может быть как традиционно, так и более современной. Оценивание учеников по данным курсам происходит на основе выполнения зачетных творческих работ.

Все учителя предметники сетуют на нехватку учебного времени. Существует большая проблема в нехватке часов, выделяемых учебным планом, на усвоение всей программы. Курсы по выбору не включают в себя работу со слабыми учениками и выделение дополнительного времени на «исправление» оценок. Эти занятия рассчитаны на небольшие группы школьников (от 1 до 15 человек), выбравшие данные курсы.

Учителю для составления программы курсов нужно опираться на свой и чужой опыт, пользоваться необходимой литературой. Цель, на достижение которой направлены данные курсы, это личностное развитие ученика, выявление и развитие его возможностей. Но не надо думать, что главной целью данного предмета является «выращивание» математиков. Детям стоит прививать интерес к предмету, при этом не лишая их возможности пользоваться сетью Интернет и библиотекой.

Учебные программы курсов по выбору имеют только приблизительный характер. Так как данные занятия нацелены только на интересы определенной группы учащихся, то уже по ходу обучения учителем могут вноситься коррективы в программу, отталкиваясь от способностей и особенностей детей.

Следующее отличие программы курсов возникает в связи с отсутствием четкого обязательного минимума изучения материала, потому что итоговую контрольную работу учитель составляет сам. Учитель может не опираться на содержание контрольно-измерительных материалов для Единого государственного экзамена.

Скорость работы выбирается по ходу изучения курса. В случае, когда материал вызвал затруднения или же интерес детей, учитель может выделить больше времени. А может быть вариант, когда тему прошли быстро либо от нее и вовсе отказались.

Третья особенность программ курсов по выбору, взаимосвязана с двумя предыдущими, и основывается на том, что применяя деятельностный подход можно без труда построить рабочую версию программы для составления плана учебных занятий. Эти программы по предметам описывают алгоритм изучения основного учебного материала. В ходе построения уроков для курсов по выбору нужно делать упор на том, чему дети смогут научиться, а не том, что они узнают.

Еще одним главным отличием курсов по выбору является то, что они помогают решить одну из основных трудностей, которые появляются на школьном пути в процессе изучении предметов. Суть этой причины в том, что отсутствует обязательный минимум успеваемости, то есть дети с разными способностями за определенное время получали одни и те же результаты в обучении. Как уже говорилось ранее, разные ученики, обучаясь на курсах по выбору, могут получить неодинаковый результат, но при этом равноценный по интересам для самих учащихся. Усвоение знаний по материалам курсов учениками происходит на основании собственного индивидуального темпа.

От учителя для успешного функционирования курсов по выбору требуется начальная подготовка, заключающаяся в ознакомлении с учебно-методическим комплектом курса. В состав данных комплектов входят полные тексты учебной программы, учебного пособия для учащихся, рабочей тетради, методического пособия для учителя. Эти учебно-методические комплекты имеют разные включения, в зависимости от выбора курса.

Изучение курсов вызывает большие сложности. Для начала нужно понять суть курса, затем рассмотреть методический каркас, на основе всего этого построить авторский путь и при этом придумать для учеников интересную демонстрацию своего творения. Вся эта подготовка отнимает много времени. А что будет, если нужно освоить два или три курса? Из этой проблемы можно найти выход, если группа учителей одной школы или же некоторых соседних школ объединятся для подготовки общих элективных курсов.

Несомненно, чтобы осилить курс по выбору, нужно много вложений. Но одновременно результаты обучения курсов могут доставить большое удовлетворение, а само введение этих занятий дает огромный опыт для дальнейшей работы и личностного роста педагога в профессии. Результативность изучения программы будет зависеть от выбора самих курсов.

Для составления курсов учитель указывает цель разработки, затем его содержание, которое должно соответствовать всем требованиям и указать его место, как в отношении общеобразовательных предметов, так и базовых профильных. Курс должен быть составлен таким образом, чтобы выполнялась одна из функций:

1. изучение ключевых проблем современности;
2. ориентирование на особенности будущей профессии;
3. ориентирование на улучшение навыков познавательной, организационной деятельности;
4. дополнение и углубление базового и предметного образования;
5. компенсирование минусов обучения по профильным предметам [19].

Методы и формы обучения основываются на требованиях осуществления профильного обучения в старших классах с учетом индивидуальных и возрастных особенностей учащихся, развития и саморазвития личности.

обучение через опыт и сотрудничество;

1. возможность построения индивидуальных образовательных траекторий с учетом потребностей учеников и их индивидуальных особенностей;

2. обучение через опыт и сотрудничество;

3. интерактивность;

4. личностно-деятельностный подход.

Для демонстрации более значимых отличительных черт курса его создателям лучше подготовить краткую аннотацию, которая в своем составе содержит название, основное содержание и для кого специализировано данное направление. Немаловажно, чтобы аннотация была сжатой, но одновременно помогало потребителю понять курс и выявить его престижность для учеников, для учителей, родителей, школьного сообщества в целом.

В минимальное число главных составляющих учебно-методического комплекса можно добавить дидактические материалы для учащихся, учебники и задачники, методические рекомендации для учителя, электронные образовательные ресурсы и др.

§2.2. Разработка курса по выбору «Комплексные числа» для классов естественного-математического профиля

Систематизировав тематическое планирование существующих учебно-методических комплексов по алгебре и началам анализа для 10-11 классов, выяснилось, что при прохождении темы «Комплексные числа» изучаются следующие основные вопросы:

- понятие комплексного числа;
- алгебраическая форма комплексного числа;
- основные алгебраические операции над комплексными числами;
- комплексные числа на координатной плоскости;

- тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа;
- решение квадратных уравнений с комплексными числами;
- возведение комплексного числа в степень, формула Муавра;
- извлечение корня из комплексного числа, комплексные корни в решении квадратных уравнений.

Но в большинстве учебников комплексные числа рассматриваются поверхностно, материал, представленный в учебниках, является вводным, не содержит достаточно практических задач и не показано каким образом комплексные числа могут быть применены при решении задач из других рассматриваемых в школьном курсе разделов математики. Тем самым возникает необходимость в разработке курса по выбору, основанного на вопросах, представленных в учебниках, и показывающего применение комплексных чисел в решении задач геометрии, алгебры и тригонометрии.

Определим обучающие, развивающие и воспитательные цели создания данного курса:

- овладение и результативное использование научной терминологии;
- формирование знаний и умений обучающихся при работе с комплексными числами;
- развитие интереса к предмету;
- развитие и формирование логического, абстрактного, эвристического и системного мышления;
- развитие математической культуры мышления.

Чтобы достичь поставленных целей, надо решить следующие задачи:

- познакомить учащихся с комплексными числами;
- научить учащихся выполнять основные алгебраические операции над комплексными числами;
- сформировать интеллектуальную развитость учащихся;
- сформировать математические качества мышления;

- расширить знания о методах математики.

Требования, ставящиеся перед учащимися к математической подготовке:

- знать и правильно употреблять термины, теоремы и формулы, связанные с комплексными числами;
- уметь привести решения уравнений;
- уметь решать задачи, с приведением развернутого объяснения [20].

Целевой аудиторией программы курса по выбору «Комплексные числа» должны быть школьники, желающие закрепить полученные знания о комплексных числах или познакомиться с ними, рассмотреть их применение в курсе элементарной математики и других областях знаний.

В этой методике несколько тем объединяются в одну общую. По каждой теме прописаны знания и умения, которые ученик должен получить в ходе изучения данного материала.

Курс рассчитан на 52 часа, еженедельная нагрузка составляет 1,5 часа. Тематическое планирование курса представлено в табл. 1.

Таблица 1 – Тематическое планирование курса по выбору

Номер темы	**Тема**	**Количество часов**
1	**2**	**3**
1	Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Основные алгебраические операции с комплексными числами.	2 ч.
2	Комплексные и сопряженные к нему числа.	1 ч.
3	Комплексное число и его геометрическое изображение. Модуль комплексного числа и его геометрический смысл.	2 ч.
4	Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.	2 ч.
5	Применение операций умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.	2 ч.
6	Корень из комплексного числа. Основная теорема алгебры многочленов.	1 ч.
7	Решение алгебраических уравнений, несложных рациональных уравнений и систем.	2 ч.
8	Решение алгебраических уравнений 3-ей и 4-ой степеней с помощью комплексных чисел.	13 ч.
9	Применение комплексных чисел при решении планиметрических задач	13 ч.

1	2	3
10	Формула Эйлера. Доказательство тригонометрических тождеств. Гиперболические функции	13 ч.
11	Оценка ЗУН.	1 ч.

Тема 1. *Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Основные алгебраические операции с комплексными числами.*

После освоения темы учащиеся должны

знать:

- классификацию чисел;
- основные алгебраические операции;
- определение комплексного числа;
- мнимую и действительную часть комплексного числа;
- алгебраическую форму комплексного числа;

уметь:

- использовать классификацию чисел;
- находить действительную и мнимую часть комплексного числа;
- переводить комплексные числа в алгебраическую форму;
- выполнять алгебраические операции над комплексными числами.

Содержание темы: Определение комплексных чисел и основных алгебраических операций над ними. Мнимая и действительная часть комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.

Тема 2. *Комплексные и сопряженные к нему числа.*

После освоения темы учащиеся должны знать и уметь:

- знать определение сопряженных комплексных чисел;
- уметь выполнять алгебраические операции над сопряженными комплексными числами;
- уметь находить число, сопряженное с суммой комплексных чисел;
- знать противоположные и обратные числа.

Содержание темы: Определение сопряженных чисел. Теоремы и следствия о сопряженных комплексных числах. Противоположные и обратные числа.

Тема 3. *Комплексное число и его геометрическое изображение. Модуль комплексного числа и его геометрический смысл.*

Знания и умения, формируемые у учащихся в ходе освоения темы:

- знать определение комплексной плоскости;
- уметь работать на комплексной плоскости;
- знать полярную систему координат и уметь с ней работать;
- знать определение модуля комплексного числа и уметь применять его основные свойства;
- знать геометрический смысл модуля.

Содержание темы: Координаты комплексного числа на комплексной плоскости. Сумма и разность векторов. Полярная система координат. Определение модуля комплексного числа и его основные свойства. Геометрический смысл модуля комплексного числа.

Тема 4. *Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.*

В ходе изучения темы учащимися должны быть получены следующие знания и умения:

- знать аргумент комплексного числа и его свойства;
- знать и уметь записывать комплексное число в тригонометрической и показательной формах;
- уметь переводить комплексное число из одной формы в другую.

Содержание темы: Аргумент комплексного числа и его свойства. Тригонометрическая форма комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Перевод комплексного числа из одной формы в другую.

Тема 5. *Применение операций умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.*

В результате освоения темы учащиеся должны прибрести следующие знания и умения:

- уметь умножать, делить и возводить в степень комплексные числа в тригонометрической форме;
- уметь применять формулу Муавра.

Содержание темы: Умножение, возведение в степень и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Формула Муавра.

Тема 6. *Корень из комплексного числа. Основная теорема алгебры многочленов.*

В результате освоения темы учащиеся должны прибрести следующие знания и умения:

- знать определение корня степени n из комплексного числа;
- знать и уметь извлекать корень степени n из комплексного числа;
- Знать основную теорему алгебры многочленов.

Содержание темы: Определение корня степени n из комплексного числа. Извлечение корня из комплексного числа. Основная теорема алгебры многочленов.

Тема 7. *Решение алгебраических уравнений, несложных рациональных уравнений и систем.*

В результате освоения темы учащиеся должны прибрести следующие знания и умения:

- знать общий вид квадратных уравнений и уметь находить дискриминант;
- уметь решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами;
- уметь использовать теорему Виета;
- уметь решать рациональные уравнения и системы с комплексными коэффициентами.

Содержание темы: Общий вид квадратных уравнений с действительными и комплексными коэффициентами. Алгоритм решения квадратных уравнений с комплексными коэффициентами. Алгоритм решения рациональных уравнений и систем уравнений с комплексными коэффициентами.

Тема 8. *Решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней с применением комплексных чисел.*

Знания и умения, которые должны быть сформированы у учащихся в результате освоения темы:

- знать и уметь решать уравнения третьей и четвертой степеней с помощью комплексных чисел;
- знать и уметь применять метод Феррари;
- знать и уметь применять формулу Кардано.

Содержание темы: Метод Феррари. Формула Кардано.

Тема 9. *Применение комплексных чисел при решении планиметрических задач.*

Знания и умения, которые должны быть сформированы у учащихся в результате освоения темы:

- уметь применять теорию комплексных чисел к задачам элементарной геометрии;
- уметь применять теорию комплексных чисел к планиметрическим задачам.

Содержание темы: Перевод геометрических понятий на язык комплексных чисел. Применение теории комплексных чисел к планиметрическим задачам.

Тема 10. *Формула Эйлера. Доказательство тригонометрических тождеств. Гиперболические функции.*

Знания и умения, которые должны быть сформированы у учащихся в результате освоения темы:

- знать и уметь применять формулу Эйлера;
- уметь доказывать тригонометрические тождества;

- знать гиперболические функции.

Содержание темы: Формула Эйлера. Доказательство тригонометрических тождеств. Гиперболические функции.

Тема 11. *Оценка ЗУН.*

В ходе проведения итогового контроля по курсу проверяются знания и умения:

- умение правильно использовать термины комплексное число, мнимая единица;
- знание и умение пользоваться основными теоремами и формулами;
- умение решать алгебраические уравнения в комплексных числах или с применением понятия комплексного числа;
- уметь привести полное объяснение при решении задач;
- уметь доказывать тригонометрические тождества.

В качестве базового источника знаний мы возьмем учебник для учащихся общеобразовательных учреждений Н. Я. Виленкина «Алгебра и начала математического анализа» 11класс. В нем хорошо прописан весь теоретический материал для 1-7 тем нашего курса по выбору. Единственным недостатком является недостаточное количество практического материала. Поэтому далее приведем по каждому разделу задания для проведения практики.

Тема 1. *Определение комплексных чисел. Алгебраическая форма комплексного числа. Основные алгебраические операции с комплексными числами.*

Перечень заданий для выполнения на практическом занятии или самостоятельной работы:

1. Представить данное число $z=\frac{7-i}{4}+13$ в алгебраической форме, найти его действительную и мнимую части.

2. Для комплексного числа $z=3-7i$ найти его действительную и мнимую часть.

3. Определить, при каких x и y два комплексных числа $z_1 = 13 + yi$ и $z_2 = x + 5i$ являются равными.

4. Найти сумму чисел $z = 10 - 3i$ и 6.

5. Найти разность чисел: $z = 9 - 5i$ и 3.

6. Умножить комплексное число $z = 2 + 3i$ на действительное число 3.

7. Найти сумму комплексных чисел: $z_1 = -7 + 5i$, $z_2 = 13 - 4i$.

8. Сложить два комплексных числа: $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 5 - 4i$.

9. Найти разность комплексных чисел $z_1 = 15 - 27i$, $z_2 = 13 + 7i$.

10. Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, ели $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$.

11. Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$.

12. Даны комплексные числа $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 5 + 2i$. Найти их произведение $z_1 \cdot z_2$.

13. Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

14. Разделить число 1 на комплексное число $z = 1 + 2i$.

15. Записать комплексное число в алгебраической форме $z = \frac{1}{\sqrt{3} + i}$. (т.е. в форме $a + bi$).

16. Даны два комплексных числа $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 2 - 5i$. Выполнить над ними все алгебраические операции.

Тема 2. *Комплексные и сопряженные к нему числа.*

Перечень заданий для выполнения на практическом занятии или самостоятельной работы:

1. Найти для комплексного числа $z = -34 - i$ ему сопряженное число.
2. Найти противоположное число для комплексного числа $z = 138 - 75i$.
3. Найти сумму, разность и произведение комплексно-сопряженных чисел: $z = 1 + i$, $\bar{z} = 1 - i$.

4. Найти произведение комплексного числа $z = 4 - 7i$ и его сопряженного.

5. Найти частное двух комплексных чисел и его сопряженное $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 2 + 5i$.

6. Если $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$. Найти: $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$, $\frac{z_2 - 2\overline{z_1}}{\overline{z_2} + z_1}$.

Тема 3. *Комплексное число и его геометрическое изображение. Модуль комплексного числа и его геометрический смысл.*

Перечень заданий для выполнения на практическом занятии или самостоятельной работы:

1. На комплексной плоскости изобразить точки, соответствующие числам: а) $3 + 5i$; б) $4 - i$; в) $0.2 - 0.5i$.

2. На комплексной плоскости изобразить точки, соответствующие комплексным числам и суммам этих чисел: а) $3 + 4i$ и $2 + i$; б) $1 - 5i$ и $2 + 3i$; в) $-5 + 2i$ и $5 + 2i$.

3. Построить уменьшаемое, вычитаемое разность комплексных чисел: а) $7 - 2i$ и $5 - 3i$; б) $3 + 6i$ и $6 + 3i$; в) $1 - i$ и $3i$.

4. Изобразить в виде векторов следующие числа: -2; $-3i$; $2 + i$; $2 - i$; $-2 - i$.

5. Найти модуль комплексных чисел: $20 - 19i$, $i(i - 1)$.

6. Найти модуль комплексного числа: $z = 3i$.

7. Найти модуль комплексных чисел: $z = 4 + 3i$, $z = -7 - i$, $z = 4 - 3i$.

Тема 4. *Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.*

Перечень заданий для выполнения на практическом занятии или самостоятельной работы:

1. Найти аргумент чисел: а) $-3 + 2i$; б) $-1 + i$; в) $3 - 3i$; г) $5 + 2i$; д) 4.

2. Найти аргумент комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$ и выразить его в тригонометрической форме.

3. Записать числа в тригонометрической форме: -8, $z=-1+i$, $\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.

4. Записать число в тригонометрической форме $z=3+\sqrt{3}i$. Найти его модуль и аргумент.

5. Представить в тригонометрической форме число $z=1$. Найти его модуль и аргумент.

6. Записать комплексное число $z=-2i$ в показательной форме.

7. Перевести комплексное число $z=5+3i$ из алгебраической формы в показательную.

8. Представить данное число $z=-8+15i$ в тригонометрической и показательной форме, найти его действительную и мнимую части, модуль и аргумент.

9. Представить в показательной форме следующие комплексные числа: а) $2+3i$; б) $-\sqrt{3}+i$; в) $1-i$; г) ; д) -2.

Тема 5. *Применение операций умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.*

Перечень заданий для выполнения на практическом занятии или самостоятельной работы:

1. Найти произведение чисел $z_1 \cdot z_2$, если

а) $z_1=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

б) $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2. Найти частное чисел $\frac{z_1}{z_2}$, если

а) $z_1=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

б) $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2=5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

в) $z_1 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $z_1 = 8\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $z_2 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

3. Возвести в квадрат комплексное число $z = 2 + 3i$.

4. Возвести комплексные числа в соответствующие степени i^{10}, i^{33}, $(-i)^{21}$, $(-2i)^7$, $\left(\frac{i}{2}\right)^8$.

5. Дано комплексное число $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Найти z^6.

6. Дано комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$. Найти z^{20}.

7. Вычислить произведение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

а) $8\left(\cos 42^\circ + i\sin 42^\circ\right)\cdot 7\left(\cos 3^\circ + i\sin 3^\circ\right)$;

б) $\sqrt{2}\left(\cos 23^\circ + i\sin 23^\circ\right)\cdot\left(\cos 22^\circ + i\sin 22^\circ\right)$;

в) $\left(\cos 47^\circ + i\sin 47^\circ\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos 43^\circ + i\sin 43^\circ\right)$.

8. Возвести в соответствующую степень:

а) $\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)^5$; б) $\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)^6$; в) $\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right)^4$

Тема 6. *Корень из комплексного числа. Основная теорема алгебры многочленов.*

Перечень заданий для выполнения на практическом занятии или самостоятельной работы:

1. Найти значение: а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{-8}$; в) $\sqrt{1-i}$.

2. Найти значение корня: $\sqrt[4]{\frac{-18}{1+i\sqrt{3}}}$, $\sqrt[4]{i}$.

3. Найти произведение чисел: $e^{\pi i}$ и $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

4. Найти произведение чисел: $\sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}}$ и $e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

5. Найти частное чисел: $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$ и $e^{-\pi i}$

6. Найти частное чисел: $\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$ и $e^{-\frac{2\pi}{3}i}$.

7. Вычислить $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, если $z_1 = -1+\sqrt{3}i$, $z_2 = \frac{1}{4}\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)$

Тема 7. *Решение алгебраических уравнений, несложных рациональных уравнений и систем.*

Перечень заданий для выполнения на практическом занятии или самостоятельной работы:

1. Решить квадратное уравнение: $z^2 - 6z + 34 = 0$.
2. Найти корни уравнения $z^2 = 1+\sqrt{3}i$.
3. Разложить на множители: $4z^2 = -1$.
4. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 2x^2 - yi - 1 - \frac{3}{i}$ и $z_2 = y - 3 + x^2 i - 2i$.
5. Решить уравнение относительно действительных переменных x и y: $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$.
6. Решить квадратное уравнение $x^2 + (5-2i)x + 5(1-i) = 0$.
7. Решить уравнение $x^2 + (1-2i)x - 2i = 0$.
8. Решить уравнение с комплексными коэффициентами: $\frac{3+4i}{z} + \frac{4-i}{3+2i} = \frac{62-50i}{13}$.
9. Решить уравнение $(-2+i)^2 + \frac{2-3i}{-5+i} + zi^3 = i^{10}$.
10. Найти корни квадратного уравнения $iz^2 + (3-2i)z - 6 = 0$.
11. Найти корни уравнения $z = \sqrt{4i}$.
12. Решить уравнение $z^2 + (3+2i) - 5 + 3i = 0$ и выполнить проверку.

13. Найти комплексные корни следующих квадратных уравнений: а) $x^2-6x+13=0$; б) $2x^2+5x+6=0$; в) $x^2-2(1+i)+(2i-1)=0$.

14. Решить систему уравнений. Ответ представить в алгебраической и показательных формах, изобразить корни на чертеже.

$$\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=-1+i \\ (1+2i)z_1+(1-2i)z_2=-4+i \end{cases}$$

15. Решить систему уравнений. Найти произведение корней и представить его в тригонометрической форме.

$$\begin{cases} (1+i)z_1+(-3-2i)z_2=20+4i \\ (-1+2i)z_1+(2+5i)z_2=-19-9i \end{cases}$$

Так как темы 8-10 не представлены в школьных учебниках, считаю целесообразнее рассмотреть их отдельно в следующей главе.

Глава 3. Методика обучения решению задач с применением комплексных чисел на основе проведения курсов по выбору

§3.1. Применение комплексных чисел при решении алгебраических уравнений

Согласно разработанной программе курса, рассмотрим применение комплексных чисел при решении алгебраических уравнений для степеней выше второй. Квадратные уравнения, решение которых может быть определено в комплексных числах, рассматриваются в некоторых учебниках, описанных в § 1.2. главы 1 выпускной квалификационной работы.

Рассмотрим кубические уравнения, решение которого трудно определить методом разложения многочлена на множители.

Пусть нам дано приведенное алгебраическое уравнение третьей степени: $y^3+ay^2+by+c=0$, получить которое можно из кубического уравнения путем деления на старший коэффициент.

Делаем замену $y=x-\dfrac{a}{3}$, в уравнении исчезает член с квадратом неизвестной y. И в конечном случае исходное уравнение примет вид.

$$x^3+px+q=0 \tag{1}$$

Поиск решения будем проводить в виде

$$x=\alpha+\beta, \tag{2}$$

где α,β – неизвестные комплексные числа.

Подставляя (2) в (1) получаем:

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+p\alpha+p\beta+q=0,$$

откуда

$$\alpha^3+\beta^3+\alpha\left(3\alpha\beta+p\right)+\beta\left(3\alpha\beta+p\right)+q=0,$$

следовательно,

$$\alpha^3+\beta^3+\left(\alpha+\beta\right)\left(3\alpha\beta+p\right)+q=0. \tag{3}$$

Пусть

$$3\alpha\beta + p = 0, \tag{4}$$

тогда (3) примет вид

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q. \tag{5}$$

Переписывая (5) и возводя (4) в куб, получим систему

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q, \\ \alpha^3\beta^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Применяем теорему Виета, и получаем, что α^3, β^3 будут решениями данного квадратного уравнения:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

Поэтому

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\ \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{6}$$

Из всех возможных комбинаций α, β выбираются только те, которые удовлетворяют условию (4). Следовательно, для каждого α одно и только одно значение β. И исходное уравнение будет иметь три решения. Формулы (2), (6) называются *формулами Кардано*.

В ходе решения уравнений по формулам Кардано достаточно определить одну пару значений α_1, β_1 и решение (1) записать в виде:

$$\begin{aligned} &x_1 = \alpha_1 + \beta_1, \\ &x_2 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2 = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i\frac{\alpha_1 - \beta_1,}{2}\sqrt{3}, \\ &x_3 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\frac{\alpha_1 - \beta_1,}{2}\sqrt{3}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Пример 1. Дано уравнение $y^3 + 3y^2 - 6y + 4 = 0$. Найдите его корни, при помощи формул Кардано.

Решение. Подставляя $y = x - 1$ в исходное уравнение, получаем: $x^3 - 9x + 12 = 0$. Имеем:

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{12}{2} + \sqrt{\frac{144}{4} - \frac{9^3}{27}}} = \sqrt[3]{-6 + \sqrt{9}} = \sqrt[3]{-6 + 3} = -\sqrt[3]{3},$$

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{12}{2} - \sqrt{\frac{144}{4} - \frac{9^3}{27}}} = \sqrt[3]{-6 - \sqrt{9}} = \sqrt[3]{-6 - 3} = -\sqrt[3]{9}.$$

Поэтому

$$x_1 = -\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right),$$

$$x_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{2} \pm i \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}}{2} \sqrt{3}.$$

Отсюда

$$y_1 = -\left(1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right),$$

$$y_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} - 2}{2} \pm i \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}}{2} \sqrt{3}$$

Рассмотрим кубические уравнения с действительными коэффициентами

Пусть в уравнении (1) параметры p, q – действительные числа. В зависимости от знака выражения $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, в формулах Кардано (6) приходится вычислять квадратный корень 3 способами: из положительного, из нулевого, из отрицательного числа. Разберем подробнее каждый из этих случаев.

1) Под $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ знаком кубичного радикала в (6) стоят действительные числа. Вещественные значения этих корней дадут действительный корень $\alpha_1 + \beta_1$. Два других корня, вычисленных по формулам (7), являются сопряженными комплексными.

2) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ В этом случае $\alpha_1+\beta_1$, поэтому $x_1=2\alpha_1$, $x_2=x_3=-\alpha_1$, в итоге получаются три действительных корня, из которых два равны между собой.

3) $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ имеет три различных действительных корня (так называемый «неприводимый случай»). Пусть

$$z=-\frac{q}{2}+i\sqrt{-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$$

(под радикалом означается арифметическое значение корня). Для числа z определим модуль r:

$$r=\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}=\sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

и аргумент φ:

$$r=\cos\varphi=-\frac{q}{2}\text{, следовательно, }\cos\varphi=-\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{p^3}{27}}.$$

Из формул Кардано (6) следует, что

$$\alpha_1=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+i\sin\frac{\varphi}{3}\right),\ \beta_1=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

Можно легко убедиться, что $\alpha_1\beta_1=-\frac{p}{3}$, отсюда по формулам (7) получаем:

$$x_1=\alpha_1+\beta_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_{2,3}=\alpha\varepsilon^{1,2}+\beta\varepsilon^{2,1}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}\right)\right)+$$

$$+\sqrt[3]{r}\left(\cos\left(-\frac{\varphi}{3}\mp\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\varphi}{3}\mp\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=-2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\mp\frac{2\pi}{3}\right)=-2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\mp\frac{2\pi}{3}\right).$$

Итак, в «неприводимом» случае получили, что все три корня уравнения вещественные и различные и могут быть найдены по формулам:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \\
x_{2,3} &= -2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} \mp \frac{2\pi}{3}\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\cos\varphi = -\frac{q}{2}\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$ (так называемое «тригонометрическое» решение).

Обратим внимание, что в этом случае, несмотря на то, что все три корня действительны, мы не смогли выразить их в радикалах от действительных чисел: в формулах (6) мы должны извлечь кубический корень из комплексного числа, а в (8) есть трансцендентные функции. Можно показать, что это вообще невозможно (то есть для уравнения с буквенными коэффициентами), хотя в конкретных примерах иногда можно представить вещественные корни кубического уравнения через радикалы от действительных чисел.

Пример 2. $x^3 - 6x + 4 = 0$. Найти решения уравнения.

Решение. Это уравнение является приведенным. Здесь $p = -6$, $q = 4$. Используем формулу (6) и получаем:

$$
\alpha = \sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2+2i}\,,
$$
$$
\beta = \sqrt[3]{-2-\sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2-2i}\,.
$$

В этом примере кубический корень извлекается точно. Например, $\alpha_1 = 1+i$, $\beta_1 = 1-i$. Подставляя в (4) убеждаемся, что данное условие выполнено. В итоге получаем такое решение:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (1+i)+(1-i) = 2, \\
x_2 &= (1+i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(1-i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1-\sqrt{3}, \\
x_3 &= (1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(1-i)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Пример 3. $x^3 - 19x + 30 = 0$. Найти решения уравнения с точностью до 4 знаков после запятой.

Решение. Применяем формулу (8) и получаем приближенные вычисления с точностью до 4 знаков после запятой:

$$p=-19,\ q=30,$$

$$\cos\varphi=-\frac{30}{2}\sqrt{\frac{27}{19^3}}\approx-0{,}9412, \text{ откуда } \varphi\approx160^\circ16',\ \frac{\varphi}{3}\approx53^\circ25',$$

$$x_1=2\sqrt{\frac{19}{2}}\cos53^\circ25'\approx3{,}002,$$

$$x_2=-2\sqrt{\frac{19}{3}}\cos113^\circ25'\approx1{,}999,$$

$$x_3=-2\sqrt{\frac{19}{2}}\cos6^\circ35'\approx-5{,}002$$

Можно легко проверить, что точными значениями решений уравнения являются целые числа 3, 2, -5.

Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0. \tag{9}$$

Опишем метод Феррари, который можно использовать для решения уравнений типа (9). Легко убедиться, что для произвольного значения параметра λ уравнение (9) можно представить в виде:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a^2}{4}+\lambda-b\right)x^2+\left(\frac{a\lambda}{2}-c\right)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}-d\right)\right]=0. \tag{10}$$

Таким образом, если возьмем любой корень λ уравнения (10), мы сможем разложить левую часть (9) на линейные множители и, таким образом, найти корни исходного уравнения. Вспомогательное кубическое уравнение (10) называется *резольвентой* [21].

Пример 4. Решить уравнение $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$.

Решение. Резольвента имеет вид:

$$\left(-\frac{2\lambda}{2}-4\right)^2-4\left(\frac{(-2)^2}{2}+\lambda-2\right)\left(\frac{\lambda^2}{4}+8\right)=0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных, получаем:

$$\lambda^3-2\lambda^3+24\lambda-48=0,$$
$$\lambda^2(\lambda-2)+24(\lambda-2)=0,$$
$$(\lambda-2)\left(\lambda^2+24\right)=0.$$

Одним из корней является $\lambda = 2$. Воспользовавшись (10), левую часть исходного уравнения запишем в виде:

$$\left(x^2 - x + 1\right)^2 - \left(x^2 - 6x + 9\right) = \left(x^2 - x + 1\right)^2 - \left(x - 3\right)^2 =$$
$$= \left(x^2 - x + 1 - x + 3\right)\left(x^2 - x + 1 + x - 3\right) = \left(x^2 - 2x + 4\right)\left(x^2 - 2\right)$$

При разложении на линейные множители, получаем следующие корни: $1 \pm i\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{2}$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. $x^3 - 5x + 1 = 0$. Решите уравнение.
2. $x^3 - 12x^2 + 45x + 54 = 0$. Решите уравнение.
3. $x^3 - 3x^2 + 12x - 36 = 0$. Решите уравнение, применяя формулу Кардано.
4. $x^3 - 6x^2 - 6x - 2 = 0$. Решите уравнение с помощью формулы Кардано.
5. $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$. Решите уравнение с помощью формулы Кардано.
6. $x^3 + 12x^2 + 36x + 32 = 0$. Решите уравнение с помощью формулы Кардано.
7. $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$. Найдите корни уравнения методом Феррари.
8. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$. Решите уравнение.
9. $y^4 - 10y^2 - 4y + 8 = 0$. Решите уравнение методом Феррари.
10. $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$. Решите уравнение методом Феррари.

§3.2. Применение комплексных чисел в решении геометрических задач

Согласно разработанной программе курса, рассмотрим применение комплексных чисел в решении планиметрических задач. Далее мы определим связь между комплексными числами и векторами на комплексной плоскости.

Рассмотрим теоретический материал, на основе которого будет раскрыта сущность использования комплексных чисел при решении планиметрических задач.

Рассмотрим два вектора на комплексной плоскости, координаты которых выражаются в виде комплексных чисел. Определим скалярное произведение вектором, угол между векторами и условия ортогональности и коллинеарности векторов.

Пусть даны два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Выразим их скалярное произведение через комплексные координаты z_1 и z_2 точек A и B соответственно. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2\right).$$

Если два вектора не берут своё начало в одной точке, то их скалярное произведение будет выглядеть следующим образом:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left((a-b)\left(\overline{c}-\overline{d}\right) + \left(\overline{a}-\overline{b}\right)(c-d)\right),$$

где a, b, c, d – комплексные координаты точек A, B, C, D соответственно.

Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены только тогда, когда $\arg z_1 = \arg z_2$, то есть $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2} = 0$.

Эти векторы будут противоположно направлены только в тех случаях, когда

$$\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\frac{z_1}{z_2} = \pm\pi.$$

Стоит заметить, что комплексные числа с аргументами $0, \pi$ – действительные числа.

Следовательно, критерием коллинеарности точек O, A, B, т.е. векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ является выполнение условия $z_1\overline{z_2} = \overline{z_1}z_2$.

Условием параллельности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будет выполнение следующего соотношения:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}},$$

где a,b,c,d – комплексные координаты точек A,B,C,D соответственно. При этом, отношение $\frac{a-b}{c-d}$ – действительное число.

Условием перпендикулярности двух векторов является выполнение следующего соотношения $\arg z_1-\arg z_2=\arg\frac{z_1}{z_2}=\pm\frac{\pi}{2}$. Так как комплексные числа с аргументами $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ чисто мнимы, то $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, когда

$$z_1\overline{z_2}=-\overline{z_1}z_2.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны, когда

$$\frac{a-b}{c-d}=-\frac{\overline{a}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{d}},$$

где a,b,c,d – комплексные координаты точек A,B,C,D соответственно. То есть отношение $\frac{a-b}{c-d}$ чисто мнимое.

Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ можно определить по одной из двух формул

$$\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a})-(\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2i|d-c|\cdot|b-a|};$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{(d-c)(\overline{b}-\overline{a})+(\overline{d}-\overline{c})(b-a)}{2i|d-c|\cdot|b-a|}.$$

Рассмотрим задачи:

- ✓ определения расстояния между двумя точками,
- ✓ деления отрезка в указанном отношении,

при этом координаты точек будут выражены комплексными числами.

Пусть даны две точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$, тогда расстояние между этими точками будет определяться по формуле:

$$AB^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}).$$

Далее рассмотрим отрезок AB, внутри которого лежит точка C. Для нахождения соотношения λ, в котором эта точка будет делить исходный отрезок, придадим точкам следующие комплексные координаты: точке A поставим в соответствие координату z_1, точке B – координату z_2, а точке C соответственно координату z_3. Следовательно,

$$z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В случае, когда $\lambda = 1$, точка C будет серединой отрезка AB, тогда соотношение примет вид:

$$z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2).$$

Если обозначить $\frac{1}{1+\lambda} = \alpha$ и $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \beta$, то получим следующее равенство

$$z_3 = z_1\alpha + z_2\beta,$$

где $\alpha + \beta = 1,\ \alpha \in R, \quad \beta \in R$.

Эти условия являются достаточными для того, чтобы три точки принадлежали одной прямой [21].

Уравнение окружности с центом в точке $O(z_0)$ и радиусом R можно получить из того, что расстояние от любой точки окружности до её центра равно R.

$$R^2 = (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}).$$

Для нахождения комплексной координаты точки пересечения секущих AB и CD единичной окружности $z\overline{z} = 1$, необходимо найти $\overline{z}$ в виде:

$$\overline{z} = \frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd},$$

где a,b,c,d – комплексные координаты точек A,B,C,D соответственно.

Если $AB \perp CD$, то

$$z = \frac{1}{2}\left(a+b+c+d\right)$$

Чтобы найти комплексную координату точки пересечения касательных к единичной окружности $z\bar{z} = 1$ в её точках A и B, нужно найти z в виде:

$$z = \frac{2ab}{a+b},$$

где a, b – комплексные координаты точек A, B соответственно.

Площадь положительно ориентированного треугольника ABC равна

$$s = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{i}{4}\left(a\left(\bar{b}-\bar{c}\right) + b\left(\bar{c}-\bar{a}\right) + c\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\right).$$

Если этот треугольник вписан в единичную окружность, то площадь будет равна

$$S = \frac{i}{4} \cdot \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ являются подобными, если согласно первому признаку подобия выполняются соотношения $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

В переводе на комплексную плоскость

$$\frac{c_1 - a_1}{c-a} = \frac{b_1 - a_1}{b-a} = \sigma,$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 – комплексные координаты точек A, B, C, A_1, B_1, C_1 соответственно, а σ – комплексное число, которое является коэффициентом подобия. Если же $|\sigma| = 1$, то эти треугольники равны.

Введём комплексное число $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, которое является одним из корней уравнения $z^3 = 1$.

Чтобы треугольник ABC был правильным, должно выполняться одно из равенств:

$$\begin{aligned} &a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \\ &a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0, \end{aligned} \qquad (11)$$

где первое равенство соответствует случаю, если треугольник ABC ориентирован положительно, а второе – если ориентирован отрицательно.

Если правильный треугольник ABC вписан в единичную окружность, то предыдущие два равенства принимают вид:

$$a + b + c = 0.$$

Комплексная координата f центроида (точка пересечения медиан) треугольника ABC находится по формуле:

$$f = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Комплексная координата p ортоцентроида (точка пересечения высот) треугольника ABC находится по формуле:

$$p = a + b + c.$$

Площадь положительно ориентированного четырёхугольника $ABCD$ можно найти по формуле:

$$s = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4i}\left((d-b)\left(\bar{c} - \bar{a} - (c-a)\left(\bar{d} - \bar{b}\right)\right)\right)$$

Если данный четырёхугольник вписан в единичную окружность, то

$$S = \frac{1}{4i} \cdot \frac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}.$$

Чтобы приступить к решению задач с правильными многоугольниками, нужно вспомнить формулу извлечения корня n-ой степени из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right);\ k = 0,1,2...,n-1.$$

Все полученные значения от z_0 до z_{n-1} имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$. Точки с комплексными координатами $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ являются вершинами правильного n-угольника, который вписан в окружность радиус $\sqrt[n]{r}$ с центром в нулевой точке O.

Вершина правильного многоугольника соответствуют комплексные числа

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{2} + i\sin\frac{2\pi k}{2}, k = 0,1,2,...,n-1$$

Далее будут рассмотрены классические теоремы, которые могут помочь в решении планиметрических задач с помощью комплексных чисел.

«Теорема Ньютона. *В описанном около окружности четырёхугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности»*[11].

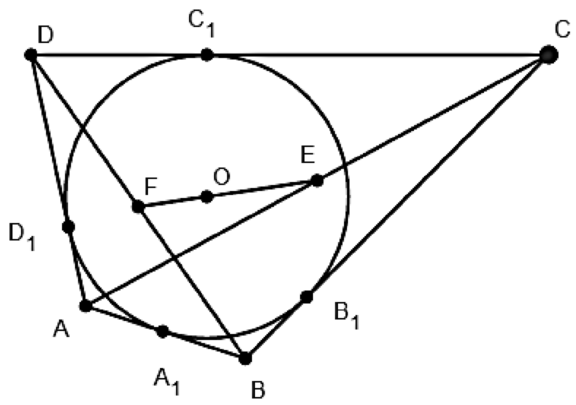

Рисунок 1.

Доказательство: пусть вокруг четырёхугольника $ABCD$ (рис. 1) описана единичная окружность. A_1, B_1, C_1, D_1 – точки касания окружности его сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Следовательно, вершины четырёхугольника будут иметь координаты:

$$a = \frac{2a_1d_1}{a_1+d_1},\ b = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},\ c = \frac{2b_1c_1}{b_1+c_1},\ d = \frac{2c_1d_1}{c_1+d_1}$$

Точки F и E - середины диагоналей AC и BD соответственно.

$$E = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{a_1d_1}{a_1+d_1} + \frac{b_1c_1}{b_1+c_1},\ F = \frac{1}{2}(b+d) = \frac{a_1b_1}{a_1+b_1} + \frac{c_1d_1}{c_1+d_1},$$

тогда

$$\frac{e}{f} = \frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}.$$

Так как

$$\bar{a} = \frac{1}{a},\ \bar{b} = \frac{1}{b},\ \bar{c} = \frac{1}{c},\ \bar{d} = \frac{1}{d}.$$

$$\frac{e}{f} = \frac{\overline{e}}{\overline{f}}.$$

Следовательно, точки O, E, F коллинеарны.

Что и требовалось доказать.

«Теорема Симсона. *Ортогональные проекции точки, лежащей на описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие его стороны, коллинеарны»* [11].

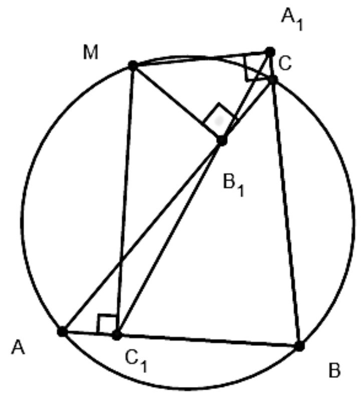

Рисунок 2.

Доказательство: пусть дана единичная окружность с центром в точке O и треугольник ABC (рис. 2), который вписан в эту окружность. Точки A_1, B_1, C_1 – проекции точки M окружности на прямые BC, AC, AB соответственно. Запишем координаты точек:

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b + c + m - \frac{bc}{m}\right)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(a + c + m - \frac{ac}{m}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(a + b + m - \frac{ab}{m}\right)$$

Следовательно,

$$\frac{a_1 - c_1}{b_1 - c_1} = \left(c - a + \frac{ab - bc}{m}\right) \div \left(c - b + \frac{ab - ac}{m}\right) = \frac{(c-a)(m-b)}{(c-b)(m-a)} = \frac{\overline{a_1} - \overline{c_1}}{\overline{b_1} - \overline{c_1}}.$$

Из этого можно сделать вывод, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны. Содержащая их прямая является прямой Симсона точки M относительно вписанного треугольника ABC.

Что и требовалось доказать.

«Справедливо и обратное утверждение: *если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки на прямые, содержащие стороны треугольника, коллинеарны, то эта точка принадлежит окружности, описанной около данного треугольника*».

«Теорема Паскаля. *Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой»* [11].

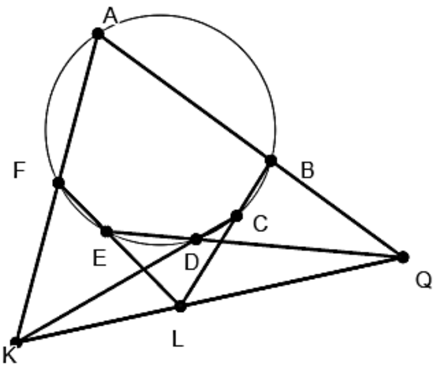

Рисунок 3.

Доказательство: шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 3) вписан в окружность. Пусть $AF \cap DC = K$, $BC \cap FE = L$, $AB \cap ED = Q$. Если мы в качестве центра окружности возьмем начало, а её радиус за единицу длины, то можно найти комплексные координаты точек пересечения секущих к данной окружности.

$$\bar{q} = \frac{a+b-(d+e)}{ab-de}$$

$$\bar{l} = \frac{b+c-(e+f)}{bc-ef}$$

$$\bar{k} = \frac{c+d-(f+a)}{cd-fa}$$

Найдём значение разности $\bar{q}-\bar{l}$ и $\bar{l}-\bar{k}$, а затем разделим первое на второе:

$$\bar{q}-\bar{l} = \frac{(b-e)(bc-cd+de-ef+fa-ad)}{(ab-de)(bc-ef)}$$

$$\bar{l}-\bar{k}=\frac{(c-f)(cd-de+ef-fa+ab-bc)}{(bc-ef)(cd-af)}$$

$$\frac{\bar{q}-\bar{l}}{\bar{l}-\bar{k}}=\frac{(b-e)(cd-fa)}{(f-c)(ab-dc)}.$$

Так как числа $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{e},\bar{f}$ равны, соответственно, $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{d},\frac{1}{e},\frac{1}{f}$, то проверка показывает, что последнее выражение равно своему сопряжённому. Следовательно, точки K,L,Q коллинеарны.

Рассмотрим примеры решения задач планиметрии с использованием комплексных чисел.

№1. Дан параллелограмм $ABCD$, в плоскости которого имеется точка N. Докажите, что если $NA^2+ND^2=NB^2+ND^2$, то $ABCD$ – прямоугольник.

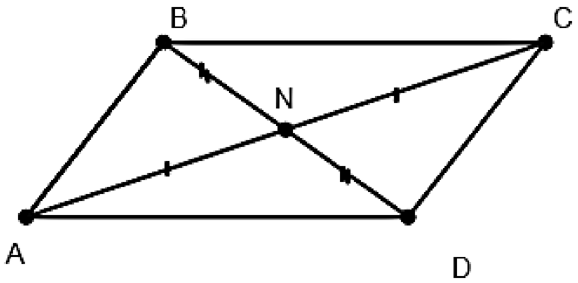

Рисунок 4.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм (рис. 4)

$$NA^2+ND^2=NB^2+ND^2$$

Доказать: $ABCD$ – прямоугольник.

Доказательство: пусть N – центр параллелограмма, тогда если A,B,C,D имеют комплексные координаты a,b,c,d, то $a=-c, b=-d,$ так как диагонали делятся пополам (относительно центра N). Согласно приведенным выше формулам, определим расстояние между точками и найдем сумму квадратов этих расстояний.

$$NA^2=(n-a)(\bar{n}-\bar{a}).$$

$$NC^2=(n-c)(\bar{n}-\bar{c}).$$

$$NA^2+NC^2=(n-a)(n-\bar{a})+(n-\bar{c})(\bar{n}-\bar{c})=(n-a)(\bar{n}-\bar{a})+(n+a)(\bar{n}+\bar{a})=$$

$$=n\bar{n}-\cancel{a\bar{n}}-\cancel{n\bar{a}}+a\bar{a}+n\bar{n}+\cancel{a\bar{n}}+\cancel{n\bar{a}}+a\bar{a}=2(n\bar{n}+a\bar{a}).$$

Аналогично, запишем соотношения для отрезков NB и ND. В результате получим, что

$$\left.\begin{array}{l} NB^2=(n-b)\left(\bar n-\bar b\right)\\ ND^2=(n-d)\left(\bar n-\bar d\right)\end{array}\right|\Rightarrow NB^2+NC^2=2\left(n\bar n+d\bar d\right).$$

Тогда подставив найденные соотношения в условие задачи получим

$$\cancel{2}\left(\cancel{n\bar n}+a\bar a\right)=\cancel{2}\left(\cancel{n\bar n}-d\bar d\right).$$

$a\bar a=d\bar d\Rightarrow$ т.к. N – центр параллелограмма $\Rightarrow AN=ND\Rightarrow AC=BD\Rightarrow$ диагонали равны, то $ABCD$ – прямоугольник.

Что и требовалось доказать.

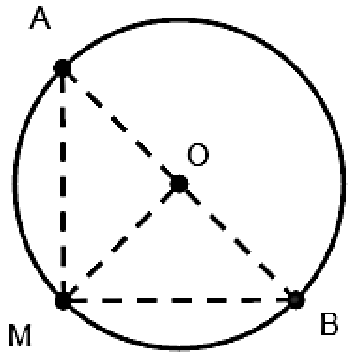

Рисунок 5.

№2. Дана окружность, относительно центра которой, симметрично расположены точки A и B. Докажите, что для любой точки M этой окружности значение суммы MA^2+MB^2 – величина постоянная.

Дано: $\omega(0;r)$, AB – диаметр.

Доказать, что $MA^2+MB^2=const$.

Доказательство: Пусть O –центр окружности, точки A,B,M будут иметь соответственно комплексные координаты a,b,m.

Так как AB – диаметр, то $a=-b$ или $b=-a$ и $\bar b=-\bar a$. Определим расстояние между точками A,B,M:

$$MA^2=(m-a)\left(\bar m-\bar a\right)=m\bar m-m\bar a-a\bar m+a\bar a$$

$$MB^2=(m-b)\left(\bar m-\bar b\right)=m\bar m-m\bar b-b\bar m+b\bar b=m\bar m+m\bar a+a\bar m+a\bar a.$$

Тогда

$$MA^2+MB^2=m\bar m-\cancel{m\bar a}-\cancel{a\bar m}+a\bar a+m\bar m+\cancel{m\bar a}+\cancel{a\bar m}+a\bar a=$$

$$=2m\bar m+2a\bar a=2\left(m\bar m+a\bar a\right)=\left|\begin{array}{l} m\bar m=|m|^2=r^2\\ a\bar a=|\bar a|^2=r^2\end{array}\right|=4r^2\Rightarrow$$

сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до концов диаметра не зависит от расположения точки M на $\omega(0;r)$.

Что и требовалось доказать.

№3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали пересекаются в точке O, что угол AOB равен $60°$. Докажите, что середины отрезков OA, OD, BC являются вершинами правильного треугольника.

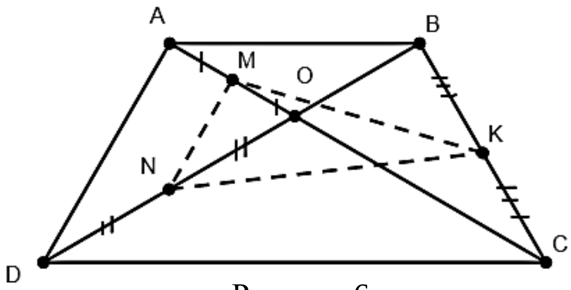

Рисунок 6

Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

$BD = AC$, $\angle AOB = 60°$

$AM = MO$, $DN = NO$, $BK = KC$

Доказать: $\triangle MNK$ – равносторонний.

Доказательство: Пусть O – начальная точка, вершинам A, B, C, D, M, N, K – поставим соответственно комплексные числа a, b, c, d, m, n, k. Т.к. $ABCD$ – равнобедренная трапеция $\Rightarrow AO = OB,\ DO = OC$ и

$$\frac{CO}{AO} = \frac{DO}{OB} = \lambda, \text{ (}\lambda - \text{коэффициент подобия)} \tag{12}$$

Так как $\angle AOB = 60° = \dfrac{\pi}{3}$, то главный аргумент числа $b = \dfrac{\pi}{3}$; $AO = OB$ (т.к. трапеция равнобедренная) $\Rightarrow |a| = |b|$. Тогда если $\alpha = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$, то число $b = |b|\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ [запись комплексного числа в тригонометрической форме], тогда можно записать: $b = \alpha a$.

Из (13) $\Rightarrow CO = \lambda AO$, т.е. $c = \lambda a$. Аналогично, $DO = \lambda OB \Rightarrow d = \lambda b = \lambda\alpha a$.

Так как

$$MO = AM \Rightarrow m = \frac{1}{2}a,$$

$$DN = NO \Rightarrow n = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\alpha\lambda a,$$

$$BK = KC \Rightarrow k = \frac{1}{2}(b+c) = \frac{1}{2}(\alpha a + \lambda a) = \frac{1}{2}\alpha a + \frac{1}{2}\lambda a.$$

Введем комплексное число

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} =$$
$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\overline{\alpha}.$$

Из условия (12). $\Rightarrow MNK$ – равносторонний, если $m + \varepsilon n + k\varepsilon^2 = 0$ (или любая другая перестановка комплексных чисел).

$$\varepsilon^2 = \left(-\overline{\alpha}\right)^2 = \overline{\alpha}^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} =$$
$$= -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\alpha.$$

Подставим в уравнение:

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\alpha\lambda\left(-\overline{\alpha}\right) - \alpha\left(\frac{1}{2}\alpha a + \frac{1}{2}\lambda a\right) = 0.$$

После преобразования получим

$$1 - \lambda\alpha\overline{\alpha} - \alpha^2 - \alpha\lambda = 0,$$

$$\alpha^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\overline{\alpha},$$

$$1 - \lambda\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha} - \alpha\lambda = 0,$$
$$1 + \overline{\alpha} - \lambda\alpha\left(\overline{\alpha} + 1\right) = 0,$$
$$\left(1 + \overline{\alpha}\right)\left(1 - \lambda\alpha\right) = 0,$$
$$1 - \lambda\alpha = 0.$$

Из последнего равенства следует, что тождество не выполняется.

Рассмотрим уравнение: $n + m\varepsilon + k\varepsilon^2 = 0$.

$$\frac{1}{2}\lambda\alpha a-\frac{1}{2}\overline{\alpha}a-\alpha\left(\frac{1}{2}a\alpha+\frac{1}{2}a\lambda\right)=0,$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\lambda\alpha a}-\frac{1}{2}\overline{\alpha}a+\frac{1}{2}a\alpha^{2}-\cancel{\frac{1}{2}\lambda\alpha a}=0,$$

$$\alpha^{2}=-\overline{\alpha},$$

$$-\frac{1}{2}\overline{\alpha}a+\frac{1}{2}\overline{\alpha}a=0,$$

$0=0$ (верно) $\Rightarrow \triangle MNK$ – равносторонний.

Что и требовалось доказать.

№4. В правильном треугольнике ABC на прямой BC отмечена точка D, а на прямой AB – точка E так, что $AE=BD$, $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AE}\right)=60^{\circ}$. Докажите, что $EC=ED$.

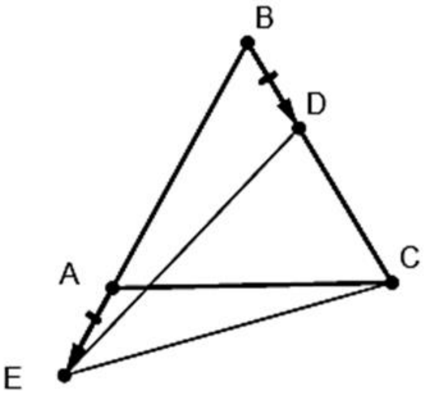

Рисунок 7

Дано: $\triangle ABC$ — равносторонний; $AE=BD$; (рис. 7), $\varphi=\left(\overline{BD};\overline{AE}\right)=60^{\circ}$.

Доказать: $ED=CE$.

Доказательство: пусть точка B – начальная точка, тогда соответствующее комплексное число $b=0$. Пусть $BC=1$, тогда $|c|=1$, и $c=1$. Запишем комплексное число a, соответствующее вершине A в тригонометрической форме:

$$\varphi=60^{\circ}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow a=|a|\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},$$

т.к. $|a|=|c|$, $\triangle ABC$ — равносторонний. Таким образом, $a=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\alpha$.

$$BD=\lambda BC\Rightarrow d=\lambda c=\lambda.$$

$$BE=BA+AE\Rightarrow e=a+\lambda a=$$

$$=a(1+\lambda)=\alpha(1+\lambda)=\alpha+\alpha\lambda=\alpha+\alpha d,$$

т.к. $AE=BD$.

Так как c – действительное число, то d – действительное число $\Rightarrow d=\overline{d}$.

Найдем длины отрезков EC и ED:

$$EC^2=(e-c)(\bar{e}-\bar{c})=(e-1)(\bar{e}-1),$$

$$ED^2=(e-d)(\bar{e}-\bar{d})=(e-d)(\bar{e}-d).$$

$$(e-d)(\bar{e}-d)=(e-1)(\bar{e}-1),$$

$$\cancel{e\bar{e}}-ed-d\bar{e}+d^2=\cancel{e\bar{e}}-e-\bar{e}+1,$$

$$d^2-1-ed+e-d\bar{e}+\bar{e}=0,$$

$$(d-1)(d+1)-e(d-1)-\bar{e}(d-1)=0,$$

$$(d-1)(d+1-e-\bar{e})=0 \quad d\neq 1 \text{ (т.к. } D\in BC\text{)}.$$

$$d+1-e-\bar{e}=0,$$

$$d+1-\alpha-\alpha d-\left(\overline{\alpha+\alpha d}\right)=0,$$

$$d(1-\alpha)+(1-\alpha)-\bar{\alpha}(1+\bar{d})=0,$$

$$(1-\alpha)(1+d)-\bar{\alpha}(1+d)=0,$$

$$(1+d)(1-\alpha-\bar{\alpha})=0,$$

$$1+d\neq 0 \text{ или } 1-\alpha-\bar{\alpha}=0,$$

$$1-\cos\frac{\pi}{3}-\cancel{i\sin\frac{\pi}{3}}-\cos\frac{\pi}{3}+\cancel{i\sin\frac{\pi}{3}}=0,$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow.\ ED^2=EC^2\Rightarrow ED=EC.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Дан треугольник, в котором проведены медианы. Нужно доказать, что сумма их квадратов равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

2. Точки M и N – середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $|AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2=|AC|^2+|BD|^2+4|MN|^2$.

3. На единичной окружности $z\bar{z}=1$ проведены две секущие AB и CD. Найти координату точки их пересечения, если лежащие на этой окружности точки A, B, C, D, имеют соответственно комплексные координаты a,b,c,d.

4. Хорды AB и PQ окружности пересекаются в точке C. Найти множество точек M пересечения прямых AP и BQ, если точки A, B, C постоянны, а точки P и Q пробегают данную окружность.

5. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого принадлежат касательным в вершинах треугольника ABC к его описанной окружности, гомотетичен треугольнику с вершинами в основаниях $A_2B_2C_2$: высот треугольника ABC.

6. Доказать, что сумма квадратов диагоналей четырехугольника $ABCD$ равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, где K, L, M, N – середины сторон AD, AB, BC, CD, соответственно.

7. Найти комплексную координату точки пересечения касательных в точках $A(a)$ и $B(b)$ единичной окружности $z\bar{z}=1$.

8. Около окружности описан квадрат $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – ортогональные проекции его вершин A, B, C, D соответственно на произвольную касательную к окружности. Доказать, что $|AA_1|\cdot|CC_1|=|BB_1|\cdot|DD_1|$.

9. Найти множество центров окружностей, проходящих через данную точку $M(z)$ ортогонально данной окружности $z\bar{z}+\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}+\alpha_0=0$.

§3.3. Применение комплексных чисел в тригонометрии

Рассмотрим вопросы возможности применения комплексных чисел в тригонометрии. Особое внимание уделим доказательствам некоторых тригонометрических тождеств, познакомимся с новым классом функций, не включенных в школьный курс математики, и приведем с доказательством формулу Эйлера и перечислим ее следствия.

Так как обучающиеся знакомы с понятием числовой последовательности, то им можно дать понятие функциональной последовательности, а следовательно, рассмотреть функциональные ряды, в частности степенные ряды.

Используя разложение показательной функции e^z, тригонометрических функций $\cos z, \sin z$, зависящих от комплексных переменных, в степенные ряды можно доказать справедливость следующих формул, которые учащимся 11 классов можно привести без доказательств:

$$\left(e^z\right)' = e^z. \tag{13}$$

$$\left(\cos z\right)' = -\sin z. \tag{14}$$

$$\left(\sin z\right)' = \cos z. \tag{15}$$

$$\cos\left(-z\right) = \cos z. \tag{16}$$

$$\sin\left(-z\right) = -\sin z. \tag{17}$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \tag{18}$$

Последняя приведенная формула называется формулой Эйлера. Из (19) путем замены iz на $-iz$ и используя (17) и (18), можно получить

$$e^{-iz} = \cos\left(-z\right) + i\sin\left(-z\right) = \cos z - i\sin z \tag{19}$$

Складывая равенства (19) и (20) и деля на 2, получаем, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{20}$$

Аналогично выводится равенство

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{21}$$

Формулы (21) и (22) устанавливают связь между показательной и тригонометрическими функциями в комплексной области.

Из формулы (19), представив комплексное число z в алгебраической форме, вытекает, что

$$e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y).$$

При $z=2\pi i$ получаем, что $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$. Значит, для любого z имеем:

$$e^{z+2\pi i}=e^{z}\cdot e^{2\pi i}=e^{z}.$$

Таким образом, показательная функция имеет в комплексной области период $2\pi i$.

Связь между показательной и тригонометрическими функциями позволяет просто доказывать различные тождества справедливые для тригонометрических функций.

Пример 1. Используя понятие комплексного числа, доказать тождества

$$\cos 3x=\cos^{3}x-3\cos x\sin^{2}x,$$

$$\sin 3x=3\cos^{2}x\sin x-\sin^{3}x.$$

Доказательство: возводя равенство $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ в куб, получаем, что, с одной стороны,

$$e^{3xi}=\cos^{3}x+3i\cos^{2}x\sin x-3\cos x\sin^{2}x-i\sin^{3}x=$$
$$=\left(\cos^{3}x-3\cos x\sin^{2}x\right)+i\left(3\cos^{2}x\sin x-\sin^{3}x\right),$$

с другой стороны, $e^{3xi}=\cos 3x+i\sin 3x$.

Сопоставив правые части полученных равенств, имеем:

$$\cos 3x=\cos^{3}x-3\cos x\sin^{2}x,$$

$$\sin 3x=3\cos^{2}x\sin x-\sin^{3}x.$$

Точно так же можно получить общие формулы для $\cos nx$ и $\sin nx$, выражающие их в виде многочленов от $\cos x$ и $\sin x$.

Чтобы вывести общие формулы и доказать тождество, надо использовать бином Ньютона.

С одной стороны, возведем равенство $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ в $n-$*ую* степень:

$$e^{nxi} = \left(\cos x + i\sin x\right)^n = \cos nx + i\sin nx\,.$$

С другой стороны, с помощью бинома Ньютона:

$$\left(\cos x + i\sin x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\cos x\right)^{n-k} \cdot \left(i\sin x\right)^k,$$

где C_n^k − биноминальные коэффициенты. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$.

Получаем:

$$\left(\cos x + i\sin x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\cos x\right)^{n-k} \cdot \left(i\sin x\right)^k = C_n^0 \cos^n x \cdot \left(i\sin x\right)^0 +$$

$$+C_n^1 \cdot \cos^{n-1} x \cdot \left(i\sin x\right) + \ldots + C_n^{n-2} \cdot \cos^2 x \cdot \left(i\sin\right)^{n-2} + C_n^{n-1} \cdot \cos x \cdot \left(i\sin\right)^{n-1} +$$

$$+C_n^n \cdot \cos^0 x \cdot \left(i\sin\right)^n = \cos^n x + \left(n\cos^{n-1} x \cdot \sin x\right)i - \ldots + \frac{n\left(n-1\right)}{2}\cos^2 x\sin^{n-2} x +$$

$$+\left(n\cos x\sin^{n-1} x\right)i - \sin^n x = \cos^n x - \ldots + \frac{n\left(n-1\right)}{2}\cos^2 x\sin^{n-2} x - \sin^n x +$$

$$+\left(n\cos^{n-1} x \cdot \sin x - \ldots + n\cos x\sin^{n-1} x\right)i\,\cdot$$

Тогда приравнивая правые части, получаем:

$$\cos nx + i\sin nx = \cos^n x - \ldots + \frac{n\left(n-1\right)}{2}\cos^2 x\sin^{n-2} x - \sin^n x +$$

$$+\left(n\cos^{n-1} x \cdot \sin x - \ldots + n\cos x\sin^{n-1} x\right)i\,\cdot$$

Отсюда следует, что:

$$\cos nx = \cos^n x - \ldots + \frac{n\left(n-1\right)}{2}\cos^2 x\sin^{n-2} x - \sin^n x$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \cdot \sin x - \ldots + n\cos x\sin^{n-1} x$$

Пример 2. Докажем формулу Муавра

$$\left(\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Доказательство: действительно, поскольку $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, то

$$\left(\rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Убедимся в справедливости формулы

$$\cos\left(z+t\right) = \cos z\cos t - \sin z\sin t\,.$$

Доказательство: воспользуемся следствием из формулы Эйлера

$$\cos(z+t)=\frac{e^{i(z+t)}+e^{-i(z+t)}}{2}=\frac{e^{iz}e^{it}+e^{-iz}e^{-it}}{2}=$$

$$=\frac{(\cos z+i\sin z)(\cos t+i\sin t)+(\cos z-i\sin z)(\cos t-i\sin t)}{2}=$$

$$=\frac{(\cos z\cos t-\sin z\sin t)+i(\sin z\cos t+\cos z\sin t)}{2}+$$

$$=\frac{(\cos z\cos t-\sin z\sin t)-i(\sin z\cos t+\cos z\sin t)}{2}=\cos z\cos t-\sin z\sin t,$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Докажем, что $\cos^2 z+\sin^2 z=1$.

Доказательство: заменим в формуле для $\cos(z+t)$, доказанной в примере 3, значение t на $-t$. Получим:

$$\cos(z-t)=\cos(z+(-t))=\cos z\cos(-t)-\sin z\sin(-t).$$

В силу четности $\cos z$ и нечетности $\sin z$, используя формулы (16) и (17) найдем:

$$\cos(z-t)=\cos z\cos t+\sin z\sin t,$$

тем самым попутно выведена формула для косинуса разности аргументов. Положим в полученной формуле $t=z$. Тогда $\cos(z-z)=\cos 0=1$, следовательно, требуемое равенство получено.

Рассмотрим новый класс функций, называемый гиперболическими функциями.

$$chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}, \qquad shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2},$$

$$cthz=\frac{chz}{shz}=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}, \qquad thz=\frac{shz}{chz}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}.$$

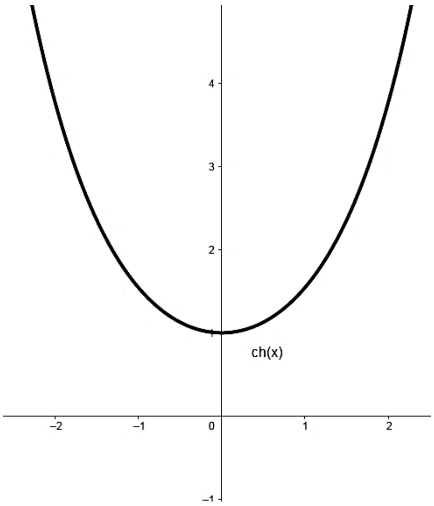

Рисунок 8

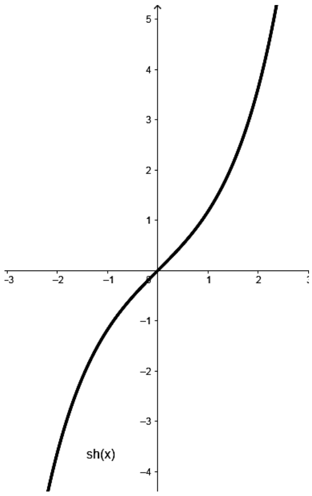

Рисунок 9

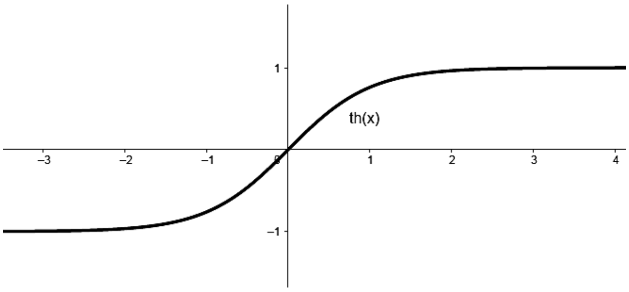

Рисунок 10

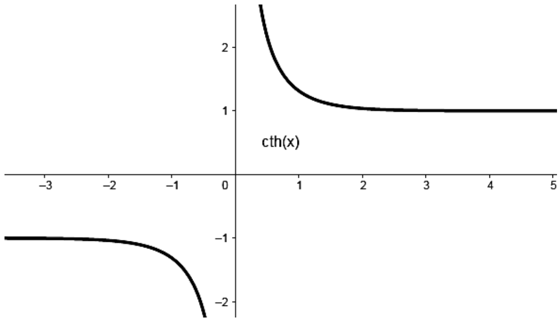

Рисунок 11

На рисунках 8-10 представлены графики гиперболических функций: косинус, синус, тангенс и котангенс.

Функции chz и shz определены на всей комплексной плоскости, а thz и $cthz$ там, где соответственно chz или shz не обращались в нуль [23].

Покажем, что

$$\cos(iz) = chz, \quad \sin(iz) = shz, \quad ch(iz) = \cos z \quad sh(iz) = i\sin z \tag{22}$$

Воспользуемся формулами Эйлера

$$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = chz,$$

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = ishz.$$

Таким образом, первые две формулы установлены. Применим их для проверки остальных. Заменим в доказанных формулах z на iz. Получим:

$$\cos(i(iz)) = chz, \ \sin(i(iz)) = ish(iz).$$

Но $i(iz) = -z$, и тогда в силу четности косинуса и нечетности синуса найдем:

$$ch(iz) = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x ch(y) - i \sin x sh(y).$$

Пример 5. Выделим действительную и мнимую части функции $w = \cos z$ в комплексной области.

Решение. Пусть $z = x + iy$, где x и y действительные числа. Имеем:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x ch(y) - i \sin x sh(y).$$

Это и есть искомое разложение.

Кроме основного тригонометрического тождества: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, существует и основное гиперболическое тождество:

$$ch^2 z - sh^2 z = 1.$$

Приведем его доказательство:

$$ch^2 z - sh^2 z = (chz + shz)(chz - shz) = e^z \cdot e^{-z} = 1$$

Основное тригонометрическое тождество следует из основного гиперболического тождества при учете связи тригонометрических и гиперболических функций с помощью формул (23).

Пример 6. Докажите тождество:

$$sh(2z) = 2sh(z)ch(z).$$

Доказательство.

$$2sh(z)ch(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)\left(e^z + e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2z} - e^{-2z}\right) =$$
$$= sh(2z).$$

Пример 7. Докажите тождество:

$$ch(2z) = ch^2 z + sh^2 z$$

Доказательство.

$$ch^2 z + sh^2 z = \frac{\left(e^z + e^{-z}\right)^2}{4} + \frac{\left(e^z - e^{-z}\right)^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\left(e^z + e^{-z}\right)^2 + \left(e^z - e^{-z}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(2e^{2z} + 2e^{-2z}\right) = ch2z.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. По формуле Эйлера найдите алгебраическую форму числа $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$.
2. Докажите, что $tgz \cdot ctgz = 1$.
3. Выведите формулу для $\cos 5x$, $\sin 5x$.
4. Найдите действительную и мнимую часть числа $\sin(1+i)$.
5. Докажите справедливость равенства: $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z$.

Заключение

Основываясь на результатах, полученных в данной работе, мы приходим к выводу о том, что изучение методики проведения курса по выбору «Комплексные числа» в классах естественно-математического профиля в школьном курсе математики исключительно важно. Само изучение раздела математики, посвященного комплексным числам, имеет глубокое значение, как для образовательного процесса, так и для воспитания школьников. Исследование комплексного числа способствует интеллектуальному формированию детей и в особенности развитию логического мышления, так как в процессе решения задач ребята приобретают навык связного, последовательного мышления, а также учатся рассуждать, делать выводы и обосновывать свои суждения. В ходе решения задач школьники приобретают навык работать по плану, экономно выбирать средства для достижения цели, последовательно обосновывать и анализировать свои действия.

Можно отметит, что глубокое изучение обучающимися алгебры комплексных чисел представляет собой не только один из наиболее эффективных методов решения задач, но и несет исключительное методологическое значение. При этом единственной проблемой для учителя математики является подбор метода, который был бы наиболее эффективным для решения данной конкретной задачи. Как следствие — отсутствие необходимости утверждать преимущества того или иного метода. Рассмотрение методов как таковых, без применения к конкретной задаче, говорит о равнозначности каждого из них для решения задач, предполагаемых в ходе изучения комплексного числа.

В данной дипломной работе были решены задачи:

1) выявлена роль курсов по выбору в системе профильного обучения в классах естественно-математического профиля;

2) подобран и изучен необходимый математический материал по данной теме;

3) проанализирована методическую литературу и школьные учебники, с целью выявить место и роль комплексных чисел в курсе математики средней школы;

4)разработана программа и содержание курса по выбору «Комплексные числа»;

5) разработаны методические рекомендации по изучению данного курса по выбору.

Нами подобран и структурирован материал по применению комплексных чисел; определена роль комплексных чисел в курсе математики профильных классов средней школы; подобрано содержание теории и задач, используемых на курсах по математике; разработаны методические рекомендации по преподаванию курсов по выбору в классах естественно-математического профиля в средней школе.

Нами предполагается не только возможность широкого внедрения разработанного курса в общеобразовательных учреждениях наряду с классической программой преподавания математики, но и дальнейшее более детальное изучение возможного применения метода комплексных чисел в различные области преподавания математики в средней школе.

В качестве основных результатов исследования выступают:

1) выделение основных методов и приемов рассмотрения комплексных чисел в школьном курсе математики;

2) разработка системы заданий, способствующих всестороннему усвоению теории комплексных чисел;

3)приведены методические рекомендации для учителей по проведению элективного курса в профильных классах средней школы.

Также на основе проделанной работы можно сделать вывод о том, что предполагаемая нами гипотеза исследования оказалась верной и курсы по выбору по математике на тему «Комплексные числа» в классах естественно-математического профиля приводят к росту уровня подготовленности учащихся по математике, повышают уровень их математической культуры, образованности и общей эрудиции. Более того, благодаря связи теории комплексных чисел со всеми областями математического знания, нами предполагается возможность исследовать весь начальный курс математики с помощью предлагаемого метода. Кроме этого затрагивается материал и более углубленного характера, который не встретишь в школьных учебниках. Например, это решение уравнений третьей и четвертой степеней; а так же выясняются и конкретизируются математические понятия: расстояние между двумя точками, прямая, параллельность и перпендикулярность, коллинеарность трех точек, треугольник, окружность и многое другое.

Таким образом, делаем вывод, что мы достигли цели, которую поставили во введении работы.

Список использованных источников

1. Хинчин, А. Я. Педагогические статьи / А. Я. Хинчин. – Москва: Академия педагогических наук РСФСР, 1963. – 204 с.

2. Демидов, В. П. Методика преподавания математики: пособие для студентов педагогических институтов / В. П. Демидом, Г. И. Саранцев – Саранск: Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева – 1976. – 192 с.

3. Немов, Р. С. Психология. Психология образования: Книга 2: учебник для студентов высших учебных заведений / Р. С. Немов – Москва: Владос, 1995. – 469 с.

4. Поспелов, Н. Н. Формирование мыслительных операций у старшеклассников / Н. Н. Поспелов, И. Н. Поспелов. – Москва: Педагогика, 1989. – 157 с.

5. Подласый, И. П. Педагогика: учебное пособие для вузов / И. П. Подласый. – Москва: Владос-пресс, 2004. – 365 с.

6. Немов, Р. С. Психология. Общие основы психологии: книга 1: учебник для студентов высших учебных заведений / Р. С. Немов – Москва: Владос, 2003. – 688 с.

7. Крутецкий, В. А. Психология: учебник для учащихся педагогических училищ / А. В. Крутецкий. – Москва: Просвещение, 1980. – 352 с.

8. Метельский, Н. В. Дидактика математики: лекции по общим вопросам для математических факультетов ВУЗов / Н. В. Метельский – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982. – 256 с.

9. Крутецкий, В. А. Психология обучения и воспитания школьников: книга для учителей и классных руководителей / В. А. Крутецкий. – Москва: Просвещение, 1976. – 303 с.

10. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика/ Ю. М. Коляги, Л. В. Оганесян, В. Я. Санинский, и др. – Москва: Просвещение, 1980. – 368 с.

11. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – Москва: Мнемозина, 2014. – 312 с.

12. Алгебра и начала математического анализа.11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников и др. – Москва: Просвещение, 2009. – 464 с.

13. Алгебра и начала математического анализа.11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева и др. – Москва: Мнемозина, 2010. – 336 с.

14. Алгебра и начала математического анализа: 10 класс: в 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, Л. О. Денищева, Л. И. Звавич и др.; под ред. А. Г. Мордковича. – Москва: Мнемозина, 2011. – 343 с.

15. Башмаков, М. И. Задачи по математике. Алгебра и анализ / М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой; под ред. К. Фаддеева. – Москва: Наука, 1982. − 192 с.

16. Киселев, А. П. Алгебра: в 2 ч. Ч. II / А. П. Киселев. – Москва: Физматлит, 2005. – 248 с.

17. Краснокутская, Н. В. Элективные курсы как средство построения индивидуальных образовательных программ ФГБОУ ВПО «Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет», г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

18. Ермаков, Д. С. Элективные курсы: требования к разработке и оценка результатов обучения /Д. С. Ермаков, Т. И. Рыбкина // Профильная школа, 2004. – №3. –С. 6-11.

19. Ермаков, Д. С. Элективные учебные курсы для профильного обучения / Д. С. Ермаков, Г. Д. Петрова // Народное образование, 2004. – №2. – С.114-119.

20. Федеральный компонент государственный компонент государственного образовательного стандарта. – Москва, 2004 г.

21. Золотых, Н. Ю. Комплексные числа: учебное пособие / Н. Ю. Золотых. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2007 – 56 с.

22. Понарин, Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов / Я. П. Понарин – Москва: МЦНМО, 2004. – 160 с.

23. Посицельская, Л. Н. Теория функций комплексноой переменной в задачах и упражнениях / Л. Н. Посицельская. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 136 с.