Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА/GRADUATION THESIS

Построение лестничных операторов для оператора Казимира алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера

Автор/ Author
Тушавин Глеб Владимирович
Направленность (профиль) образовательной программы/Major
Математическое моделирование 2019
Квалификация/ Degree level
Магистр
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor
Трифанов Александр Игоревич, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент")
Группа/Group
R42952
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster
факультет систем управления и робототехники
Направление подготовки/ Subject area
01.04.02 Прикладная математика и информатика

Обучающийся/Student	Документ подписан Тушавин Глеб Владимирович 01.06.2021	Тушавин Глеб Владимирович
	(эл. подпись/ signature)	(Фамилия И.О./ name and surname)
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor	Документ подписан Трифанов Александр Игоревич 01.06.2021	Трифанов Александр Игоревич
	(эл. подпись/ signature)	(Фамилия И.О./ name and surname)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ / OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS

Обучающийся / Student Тушавин Глеб Владимирович
Группа/Group R42952
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster факультет систем управления и робототехники
Квалификация/ Degree level Магистр
Направление подготовки/ Subject area 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы/Major Математическое моделирование 2019
Специализация/ Specialization Математическое моделирование сложных систем
Тема ВКР/ Thesis topic Построение лестничных операторов для оператора Казимира алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Трифанов Александр Игоревич, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники, доцент (квалификационная категория "ординарный доцент")

Срок сдачи студентом законченной работы до / Deadline for submission of complete thesis 20.05.2021

Техническое задание и исходные данные к работе/ Requirements and premise for the thesis
Построить лестничные операторы для оператора Казимира образа алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера, исследовать структуру их инвариантных пространств.

Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов)/ Content of the thesis (list of key issues)
Требуется формализовать лестничные операторы для самосопряженных операторов неэквидистантного спектра,
описать процедуру построения и исследовать их геометрические свойства: коммутационные соотношения. Исследовать самосопряженные полиномы лестничных операторов на собственные числа и построить на их основании классификацию инвариантных пространств.

Перечень графического материала (с указанием обязательного материала) / List of graphic materials (with a list of required material)

Исходные материалы и пособия / Source materials and publications
[0]Miroshnichenko G.P., Kiselev A.D., Trifanov A. I., Gleim A.V., 2017, Algebraic ap-

proach to electro-optic modulation of light: exactly solvable multimode quantum model, J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 34(6), pp. 1177–1190.
[1]C. L. Williams, N. N. Pandya, B. G. Bodmann, D. J. Kouri, Coupled supersymmetry and ladder structures beyond the harmonic oscillator, Molecular Physics, DOI: 10.1080/00268976.2018.1473655
[2] S. E. Hoffmann, V. Hussin, I. Marquette, Y.-Z. Zhang, Ladder operators and coherent states for multi-step supersymmetric rational extensions of the truncated oscillator, J. Math. Phys. 60, 052105 (2019)
[3] P. Bosso, S. Das, Generalized ladder operators for the perturbed harmonic oscillator, Ann. of Phys., 396, 254-265 (2018)

Дата выдачи задания/ Objectives issued on 13.05.2021

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor	Документ подписан Трифанов Александр Игоревич 13.05.2021 (эл. подпись)		Трифанов Александр Игоревич
Задание принял к исполнению/ Objectives assumed by	Документ подписан Тушавин Глеб Владимирович 18.05.2021 (эл. подпись)		Тушавин Глеб Владимирович
Руководитель ОП/ Head of educational program	Документ подписан Попов Игорь Юрьевич 02.06.2021 (эл. подпись)		Попов Игорь Юрьевич

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

АННОТАЦИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ /
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS

Обучающийся/ Student
Тушавин Глеб Владимирович
Наименование темы ВКР / Title of the thesis
Построение лестничных операторов для оператора Казимира алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера
Наименование организации, где выполнена ВКР/ Name of organization
Университет ИТМО

ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ/
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS

1. Цель исследования / Research objective
Построить лестничные операторы для образа оператора Казимира алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера
2. Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks
Построение теории обобщенных лестничных операторов . Применение теории к образу алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера. Классификация состояний алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера. Исследование случая трехмодовой системы. Написание программы для построения состояний 5-модовой системы.
3. Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/conclusions
Было предложено определение обобщенного лестничного оператора и получены его свойства. Было сформулировано уравнение общего вида, позволяющее найти лестничные операторы для самосопряженного оператора. Полученный математический аппарат был применен к образу алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера. Был расширен стандартный коммутирующий набор операторов алгебры SU(2) при отображении Жордана-Швингера до полного в Фоковском пространстве. Были построены лестничные операторы для случая трехмодовой системы и найдены их коммутационны соотношения. Была написана программа, выполняющая построение состояний полученной классификации для 5-модовой системы.
4. Наличие публикаций по теме выпускной работы/ Have you produced any publications on the topic of the thesis

5. Наличие выступлений на конференциях по теме выпускной работы/ Have you produced any conference reports on the topic of the thesis

6. Полученные гранты, при выполнении работы/ Grants received while working on the thesis

7. Дополнительные сведения/ Additional information

Обучающийся/Student	Документ подписан Тушавин Глеб Владимирович 01.06.2021 (эл. подпись/ signature)		Тушавин Глеб Владимирович (Фамилия И.О./ name and surname)
Руководитель ВКР/ Thesis supervisor	Документ подписан Трифанов Александр Игоревич 01.06.2021 (эл. подпись/ signature)		Трифанов Александр Игоревич (Фамилия И.О./ name and surname)

1 Содержание

2 Введение

Геометрические свойства самосопряженного линейного оператора проявляются в наличии у него собственных чисел и связанных с ними состояний. Отвечающие различным состояниям инвариантные пространства под действием самосопряженного оператора в зависимости от собственного числа растягиваются, либо сжимаются, или вовсе аннигилируются.

Существуют линейные операторы, называемые лестничными [1], [3], которые своим действием переводят одно состояние самососпряженного оператора в другое, либо аннигилируют его, а их сопряженные операторы действуют в противоположном направлении. Лестничные операторы позволяют строить множество различных состояний оператора из одного известного состояния, что делает задачу построения состояний тривиально решаемой. В работе будет показано, что самосопряженные полиномы лестничных операторов находят применение в задачах классификации и позволяют своими собственными числами различать прежде неразличимые состояния, при этом коммутируя с самосопряженными операторами алгебры.

Примерами таких операторов могут быть полевые операторы рождения и уничтожения бозонов/фермионов алгебры Вейля $W(1)$ [8] [9], лестничные операторы алгебры $SU(2)$ и $SU(1,1)$ [6] и многие другие, встречающиеся в широком перечне современных работ [4] [2]. В приведенных примерах важной особенностью является то, что у самосопряженных операторов, для которых операторы являются лестничными, — эквидистантный спектр.

Однако, для самосопряженных операторов, обладающих неэквидистантным спектром до сих пор не было построено аналога таких лестничных операторов.

Одним из примеров такого оператора является оператор Казимира алгебры $SU(2)$, собственные числа которого имеют вид $j(j+1)$ для неотрицательных j. Вопрос об однозначной классификации кратных собственных чисел оператора Казимира для тензорных представлений алгебры $SU(2)$ до сих пор оставался открытым [6] [10].

Необходимость обобщения и построения общих свойств лестничных операторов для операторов, обладающих неэквидистантным спектром, очевидна и оставалась актуальной.

В настоящей работе, мы определим лестничные операторы общего вида, их свойства, сформулируем уравнение на лестничные операторы для самосопряженного оператора и применем полученный математический аппарат для анализа состояний образа алгебры $SU(2)$ при отображении Жордана-Швингера [5], которое представляет генераторы алгебры в виде бозонных полиномов многомодовой системы. Действие генераторов образа происходит в пространстве Фока, состояния которого характеризуется числами заполнения — количеством частиц на каждой из взаимодействующих мод. Фоковский базис состоит из базиса одночастичного состояния и его симметричных тензорных произведений на себя, что определяет его геометрию. Всякое действие в нем представляет из себя измение числа частиц на различных модах с растяжением/сжатием и уничтожением.

Обобщеные лестничные операторы являются естественным развитием идеи о собственных числах матрицы, позволяя описывать специфические симметрии состояний самосопряженных операторов.

Рассматриваемая задача классификации для образа алгебры $SU(2)$ при отображении Жордана-Швингера имеет прикладное значение. Разработанная коллегами в 2017 году модель квантового процесса фазовой модуляции света использует отображение Жордана-Швингера для представления образующих Гамильтониана бозонными полиномами. Модулирующая мода является микроволновой, в то время как модулируемая — оптической. Процесс состоит из поглощения фотонов микроволновой моды, увеличивающего номер моды (энергию) взаимодействующего фотона, и обратного процесса — понижение номера моды фотона и высвобождения микроволнового фотона.

Изучение и описание симметрий сформулированной модели помогут в создании различных устройств прикладного значения. Модель квантового процесса фазовой модуляии имеет широкое применение в области квантовой оптики, теории информации и квантовой криптографии, что позволяет судить об актуальности настоящего исследования.

Развитие полученного метода обобщенных лестничных операторов позволит решать целый класс сложных задач точно, а полученные результаты в применении метода к образу алгебры $SU(2)$ при отображении Жордана-Швингера показывают его простоту, эффективность и глубокий геометрический смысл.

3 Обобщенные лестничные операторы

3.1 Определение

Рассмотрим самосопряженный оператор $H = H^\dagger$. Оператор $p^\dagger$ будем называть правым лестничным оператором оператора H с функцией P (или лестничным оператором с правой функцией), если выполняются следующие коммутационные соотношения

$$[H,\, p^\dagger] = p^\dagger P, \quad \text{при} \quad [H, P] = 0, \tag{1}$$

где $P = P^\dagger$ - некоторая самосопряженная операторная функция без особенностей на спектре определения.

Левым лестничным оператором, соответственно, будем называть оператор, удовлетворяющий следующим коммутационным соотношениям

$$[H,\, p^\dagger] = P' p^\dagger, \quad \text{при} \quad [H, P'] = 0, \tag{2}$$

Рассматривая сопряженное выражение к (13), получаем коммутационные соотношения левого лестничного оператора p сопряженного оператору $(p^\dagger)^\dagger = p$ с противоположным знаком

$$[p,\, H] = Pp. \tag{3}$$

3.2 Состояния самосопряженных операторов

Под состоянием $|\psi\rangle$ самосопряженного оператора H мы будем понимать инвариантное пространство, отвечающее собственному числу ψ оператора H, иначе говоря состояние $|\psi\rangle$ есть ядро оператора $(H - \psi\hat{I})$

$$|\psi\rangle \stackrel{def.}{=} \ker(H - \psi\hat{I}) \quad \text{и} \quad H\,|\psi\rangle = \psi\,|\psi\rangle\,. \tag{4}$$

Выбирая из ядра только те элементы, норма которых единичная, мы получаем нормированное состояние, действие на которое самосопряженным оператором сводится к изменению длины состояния. В контексте собственных чисел понятие нормированного состояния и ненормированного состояния — взаимозаменяемы.

Под состоянием $|\psi, \phi\rangle$ пары коммутирующих самосопряженных операторов $[H_0, H_1] = 0$ мы будем понимать пересечение состояний $|\psi\rangle$ оператора H_0 и $|\phi\rangle$ оператора H_1. Например, можно опредлить такое состояние как ядро оператора $(H_0 - \psi\hat{I})^2 + (H_1 - \phi\hat{I})^2$.

Таким образом, можно определить размерность состояния $|\psi\rangle$ и состояния $|\phi\rangle$ относительно состояния $|\psi, \phi\rangle$, иначе говоря — число параметров в разложении

$$\begin{gathered} H_0\,|\psi,\,\phi\rangle = \psi\,|\psi,\,\phi\rangle\,, \quad H_1\,|\psi,\,\phi\rangle = \phi\,|\psi,\,\phi\rangle\,, \\ \psi \in \Psi, \quad \phi \in \Phi, \\ |\psi\rangle = \textstyle\sum_{\phi\in\Phi} \alpha^\phi\,|\psi,\,\phi\rangle \end{gathered} \tag{5}$$

и

$$|\phi\rangle = \textstyle\sum_{\psi\in\Psi} \beta^\psi\,|\psi,\,\phi\rangle\,.$$

Если все состояния набора коммутирующих самосопряженных операторов являются одномерными, то такие состояния мы будем называть чистыми. Чистые состояния образуют полный базис всего пространства, а набор операторов называется, соответственно, полным.

3.3 Свойства лестничных операторов

Рассмотрим некоторые свойства лестничных операторов. $p^\dagger$ - лестничные оператор по определению (13). Пусть самосопряженный оператор $A = A^\dagger$ коммутирует $[P,\, A] = 0$ с функцией P, тогда

$$[H, p^\dagger A] = p^\dagger A P \tag{6}$$

является лестничным оператором по определению.

Пусть теперь $p^\dagger$ является лестничным оператором двух коммутирующих самосопряженных операторов $[H_0, H_1] = 0$

$$[H_0,\, p^\dagger] = p^\dagger P_0, \quad [H_1,\, p^\dagger] = p^\dagger P_1,$$

тогда оператор $p^\dagger$ является лестничным оператором их суммы

$$[H_0 + H_1,\, p^\dagger] = p^\dagger (P_0 + P_1) \tag{7}$$

и их произведения

$$[H_0 H_1,\, p^\dagger] = p^\dagger (P_0 H_1 + H_0 P_1). \tag{8}$$

Пусть самосопряженный оператор H обладает собственным состоянием $|\psi\rangle$ отвечающим собственному числу ψ

$$H\,|\psi\rangle = \psi\,|\psi\rangle$$

. Тогда у самосопряженного оператора $H + \lambda\hat{I}$, где $\lambda\hat{I}$ — тождественный оператор с множителем из поля, состоянию $|\psi\rangle$ отвечает собственное число $\psi + \lambda$

$$(H + \lambda\hat{I})\,|\psi\rangle = (\psi + \lambda)\,|\psi\rangle \tag{9}$$

и у оператора λH состоянию $|\psi\rangle$ отвечает собственное число $\lambda\psi$

$$(\lambda H)\,|\psi\rangle = \lambda\psi\,|\psi\rangle \tag{10}$$

Коммутирующие операторы обладают общими инвариантными пространствами. Легко показать, что если для двух самоспоряженных операторов H_0, H_1 с общим прообразом верно $[H_0, H_1] = 0$ и $|\psi\rangle$ есть собственное состояние оператора

$$H_0 \left|\psi\right\rangle = \psi \left|\psi\right\rangle ,$$

то состояние $H_1 \left|\psi\right\rangle$ также является собственным для оператора H_0

$$H_0(H_1 \left|\psi\right\rangle) = H_1 H_0 \left|\psi\right\rangle = \psi H_1 \left|\psi\right\rangle , \tag{11}$$

и отвечает тому же собственному числу ψ. Оператор H_1 оказывается линейным эндоморфизмом, действующим внутри состояния $|\psi\rangle$ как оператор умножения на собственное число оператора H_1. Симметричные рассуждения верны и для состояний оператора H_1.

Пример. Пусть состояние $|\psi\rangle$ разлагается в линейную оболочку собственных состояний оператора H_1

$$\left|\psi\right\rangle = \mathbb{R} \left|\psi,\, 0\right\rangle + \mathbb{R} \left|\psi,\, \phi\right\rangle , \quad \text{где} \quad \begin{array}{c} H_1 \left|\psi,\, 0\right\rangle = 0, \\ H_1 \left|\psi,\, \phi\right\rangle = \phi \left|\psi,\, \phi\right\rangle , \end{array}$$

Оба состояния $|\psi\rangle$ и $H_1 |\psi\rangle$ являются собственными для оператора H_0, который обладает нетривиальным ядром однако состояние $|\psi\rangle$ - двумерное относительно состояний $\{|\psi,\, \phi\rangle\}_{\phi\in\Phi}$, в то время как состояние $H_1 |\psi\rangle$ — одномерное

$$H_1 \left|\psi\right\rangle = \alpha_\phi(\phi \left|\psi,\, \phi\right\rangle)$$

Пусть теперь H самосопряженный оператор обладающий собственным состоянием $|\psi\rangle$ отвечающим собственному числу ψ и $p^\dagger$ его правый лестничный оператор с функцией P. Тогда

$$Hp^\dagger \left|\psi\right\rangle = (p^\dagger H + [H,\, p^\dagger]) \left|\psi\right\rangle = p^\dagger (H + P) \left|\psi\right\rangle . \tag{12}$$

Поскольку оператор P является самосопряженным оператором и коммутирует с оператором H, то оператор P является линейным эндоморфизмом состояния $|\psi\rangle$. Оператор H внутри состояния $|\psi\rangle$ эквивалентен оператору $\psi\hat{I}$. Суммарный оператор $\psi\hat{I} + P$ в общем случае будет являться эндоморфизмом состояния $|\psi\rangle$. Однако, нетривиальным ядром оператор $\psi\hat{I}+P$ будет обладать лишь в том случае, когда оператор P обладает состоянием, отвечающим собственному числу $-\psi$.

Если функция $P = P(H)$ выражается через H, тогда мы сможем вычислить действие функции на собственном векторе оператора H. Получаем

$$Hp^{\dagger}|\psi\rangle = p^{\dagger}(H+P)|\psi\rangle = (\psi + P(\psi))p^{\dagger}|\psi\rangle\,. \tag{13}$$

Состояние $p^{\dagger}|\psi\rangle$ является собственным для оператора H и отвечает собственному числу $\psi + P(\psi)$.

Таким образом, введеные нами лестничные операторы являются обобщением известных лестничных операторов для неэквидистантного спектра. Функция P обязана быть такой, чтобы полученное состояние оператора H существовало, либо равнялось 0. В последнем случае, состояние $|\psi\rangle$ лежит в ядре оператора $p^{\dagger}$, являясь аннигилируемым состоянием оператора $p^{\dagger}$.

Найдем $[H^n,\, p^{\dagger}]$. Выразим этот коммутатор через $[H^n, p^{\dagger}]$

$$[H^n,\, p^{\dagger}] = [H,\, p^{\dagger}]H^{n-1} + H[H^{n-1}, p^{\dagger}].$$

Используя тождество Якоби, выражаем $H[H^{n-1}, p^{\dagger}] = [H^{n-1}, p^{\dagger}](H+P)$ и получаем следующее рекуррентное соотношение

$$[H^n,\, p^{\dagger}] = p^{\dagger}PH^{n-1} + [H^{n-1}, p^{\dagger}](H+P). \tag{14}$$

Найдем итоговое выражение для коммутатора $[H^n,\, p^{\dagger}]$ применяя метод математической индукции. Базой индукции будет выражение при $n=1$, иначе говоря определение лестничного оператора. Покажем, что

$$[H^n,\, p^{\dagger}] = p^{\dagger}((H+P)^n - H^n). \tag{15}$$

Для этого предположим, что (15) верно. Тогда убедимся в справедливости выражения для $n+1$

$$[H^{n+1},\, p^{\dagger}] = p^{\dagger}PH^n + [H^n, p^{\dagger}](H+P) =$$

$$= p^{\dagger}PH^n + p^{\dagger}((H+P)^n - H^n)(H+P) =$$

$$= p^\dagger((H+P)^{n+1} - H^{n+1} - PH^n + PH^n +) =$$
$$= p^\dagger((H+P)^{n+1} - H^{n+1}).$$

Полученный коммутатор позволяет получить следующее полезное выражение

$$H^n p^\dagger = p^\dagger (H+P)^n. \tag{16}$$

Аналогичное выражение можно получить для левого лестничного оператора $[H, q^\dagger] = Qq^\dagger$.

$$[H^n, q^\dagger] = QH^{n-1}q^\dagger + (H-Q)[H^{n-1}, q^\dagger],$$

снова применяем метод математической индукции и получаем

$$[H^n, q^\dagger] = (H^n - (H-Q)^n)q^\dagger \tag{17}$$

и аналогичное (16) выражение

$$q^\dagger H^n = (H-Q)^n q^\dagger. \tag{18}$$

Таким образом, лестничный оператор $p^\dagger$ является лестничным оператором произвольной степени H. Используя свойства (7) и (8) получаем, что произвольный полином от H обладает теми же лестничными операторами, что и оператор H.

Пусть функция $\hat{P} = \hat{P}(H)$ правого лестничного оператора является полиномом H степени n, тогда определен коммутатор P и лестничного оператора

$$\hat{P}(H) = \alpha_n H^n + \alpha_{n-1} H^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \hat{I}, \quad \text{где} \quad [\alpha_k, H] = 0, \quad k \in 0\bar{..}n;$$

$$[\hat{P}(H), p^\dagger] = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k [H^k, p^\dagger] = p^\dagger(\hat{P}(H+P) - \hat{P}(H)).$$

Из последнего коммутатора вытекает соответствие между левыми и правыми лестничными операторами $p^\dagger$

$$\hat{P}(H)p^\dagger = p^\dagger \hat{P}(H+P) \tag{19}$$

Пусть $p^\dagger$ - правый лестничный оператор H и $[H, p^\dagger] = p^\dagger\lambda$, где λ — элемент поля. Тогда, очевидно, что $p^\dagger$ является также левым лестничным оператором. Для оператора H^n левые лестничные операторы связаны с правыми следующим соотношением

$$H^n p^\dagger = p^\dagger (H + \lambda\hat{I})^n. \tag{20}$$

Воспользуемся тем фактом, что $[H - \lambda\hat{I}, p^\dagger] = [H, p^\dagger]$. Лестничный оператор $p^\dagger$ является лестничным и для оператора $H - \lambda\hat{I}$, что позволяет применить к нему последнюю формулу

$$(H - \lambda\hat{I})^n p^\dagger = p^\dagger H^n. \tag{21}$$

Рассматривая сопряженный оператор p получаем

$$[H^n, p] = p((H - \lambda\hat{I}) - H^n) \tag{22}$$

при

$$[H^n, p^\dagger] = p^\dagger((H + \lambda\hat{I}) - H^n).$$

3.4 Самосопряженные полиномы лестничных операторов

Пусть $p^\dagger$ — правый лестничный оператор оператора H

$$\left[H,\, p^\dagger\right] = p^\dagger P, \quad P = P^\dagger, \quad [H,\, P] = 0.$$

Рассмотрим самосопряженный оператор $p^\dagger p$. Найдем его коммутационные соотношения с оператором H

$$\left[H,\, p^\dagger p\right] = \left[H,\, p^\dagger\right] p + p^\dagger \left[H,\, p\right] = p^\dagger P p - p^\dagger P p = 0.$$

Операторы $p^\dagger p$ и H действуют над одними и теми же инвараинтными пространствами, не изменяя собственные числа друг друга. Таким образом, собственные числа оператора $p^\dagger p$ позволяют разложить произвольное состояние оператора H. Произвольное состояние $|\psi\rangle$ оператора H и состояние $|\rho\rangle$ оператора $p^\dagger p$ может быть разложено по общим состояниям $|\psi,\, \rho\rangle$ пары операторов $p^\dagger p$ и H

$$\begin{gathered} H\,|\psi,\, \rho\rangle = \psi\,|\psi,\, \rho\rangle\,, \quad p^\dagger p\,|\psi,\, \rho\rangle = \rho\,|\psi,\, \rho\rangle\,, \\ \psi \in \Psi, \quad \rho \in \mathbf{P}, \\ |\psi\rangle = \textstyle\sum_{\rho\in\mathbf{P}} \alpha^\rho\,|\psi,\, \rho\rangle \end{gathered} \tag{23}$$

и

$$|\phi\rangle = \textstyle\sum_{\psi\in\Psi} \beta^\psi\,|\psi,\, \rho\rangle\,.$$

Пусть теперь $q^\dagger$ — левый лестничный оператор оператора H

$$\left[H,\, q^\dagger\right] = Q q^\dagger, \quad Q = Q^\dagger, \quad [H,\, Q] = 0.$$

Аналогично рассмотрим самосопряженный оператор $qq^\dagger$ и найдем его коммутационные соотношения с оператором H

$$\left[H,\, qq^\dagger\right] = [H,\, q]\, q^\dagger + q\left[H,\, q^\dagger\right] = q^\dagger Q q - q^\dagger Q q = 0$$

Пусть теперь, коммутатор лестничного оператора $p^\dagger$ представим в виде

$$\left[H,\, p^\dagger\right] = p^\dagger P = Q p^\dagger.$$

Тогда оператор H коммутирует с операторами $pp^\dagger$ и $p^\dagger p$. Покажем, что $pp^\dagger$ коммутирует с P. Для этого снова рассмотрим коммутатор $\left[H,\, pp^\dagger\right]$

$$0 = \left[H,\, pp^\dagger\right] = -Ppp^\dagger + pp^\dagger P = -\left[P,\, pp^\dagger\right]$$

и аналогично для оператора $p^\dagger p$ получаем

$$0 = \left[H,\, p^\dagger p\right] = Qp^\dagger p - pp^\dagger Q = \left[Q,\, p^\dagger p\right].$$

Рассмотрим коммутатор

$$\left[p^\dagger p,\, p^\dagger\right] = p^\dagger \left[p,\, p^\dagger\right].$$

Оператор $p^\dagger$ будет являться правым лестничным для оператора $p^\dagger p$, если $\left[p^\dagger p,\, \left[p,\, p^\dagger\right]\right] = 0$.

3.5 Нахождение лестничных операторов для замкнутой системы

Пусть H - самосопряженный оператор и различные операторы $\{T_\mu^\dagger\}_{\mu=1}^n$ не коммутируют с H, образуя замкнутое множество относительно операции коммутирования с H

$$[H, T_\eta] = \sum_{\mu=1}^{n} T_\mu \alpha_\eta^\mu, \tag{24}$$

где $\alpha_\eta^\mu = \alpha_\eta^{\mu\dagger}$ - коммутирующие с H самосопряженные операторы $[H, \alpha_\eta^\mu] = 0$. Тогда будем искать такие коммутирующие с H и α_η^μ самосопряженные операторы $\sigma^\eta = \sigma^{\eta\dagger}$, что

$$[H, \sum_{\eta=1}^{n} T_\eta \sigma^\eta] = \sum_{\eta=1}^{n} T_\eta \sigma^\eta P$$

являятся правым лестничным оператором по определению и среди $\{\sigma^\eta\}$ есть хотя бы один отличный от нуля оператор. Применяя (24) к коммутатору в последнем выражении, получаем следующее уравнение

$$\sum_{\eta=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} T_\mu \alpha_\eta^\mu \sigma^\eta - \sum_{\mu=1}^{n} T_\mu \sigma^\mu P = 0.$$

что эквивалентно

$$\sum_{\mu=1}^{n} T_\mu (\sum_{\eta=1}^{n} \alpha_\eta^\mu \sigma^\eta - \sigma^\mu P) = 0. \tag{25}$$

Поскольку операторы внутри скобки операторы коммутируют между собой, можно однозначно представить выражение (25) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{pmatrix} (A - P) \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \dots \\ \sigma^n \end{pmatrix} = 0, \tag{26}$$

где $(A-P)$ это матрица следующего вида

$$A-P=\begin{pmatrix} \alpha_1^1-P, & \alpha_2^1, & \alpha_3^1, & \dots, & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2-P, & \alpha_3^2, & \dots, & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3, & \alpha_2^3, & \alpha_3^3-P, & \dots, & \alpha_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n, & \alpha_2^n, & \alpha_3^n, & \dots, & \alpha_n^n-P \end{pmatrix}.$$

Частным решением системы (26) будет решение уравнения

$$(A-P)\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \dots \\ \sigma^n \end{pmatrix}=0. \tag{27}$$

Ввиду того, что все операторы в матрице коммутируют, для нее однозначно вычисляется определитель

$$\det(A-P).$$

Этот определитель должен равняться нулю, потому что коэффициенты $\{\sigma^\eta\}$ находятся в нетривиальном ядре $\det(A-P)$ В противном случае, для оператора с тривиальным ядром возможно было бы построить обратный оператор $(A-P)^{-1}$. Домножая систему общего вида (26) справа на обратный оператор, получили бы

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \dots \\ \sigma^n \end{pmatrix}=0.$$

Все операторы $\{T_\mu^\dagger\}_{\mu=1}^n$ различны, а, следовательно, все $\{\sigma^\eta\}$ тождественно равняются нулю.

Отсюда — возникает уравнение на правые функции лестничных операторов

$$\det(A-P)\equiv 0. \tag{28}$$

Определитель

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1^1 - P, & \alpha_2^1, & \alpha_3^1, & \dots, & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2, & \alpha_2^2 - P, & \alpha_3^2, & \dots, & \alpha_n^2 \\ \alpha_1^3, & \alpha_2^3, & \alpha_3^3 - P, & \dots, & \alpha_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n, & \alpha_2^n, & \alpha_3^n, & \dots, & \alpha_n^n - P \end{pmatrix} = 0$$

является полиномом оператора P n-ой степени, а его корни — правыми функциями лестничных операторов.

Далее, подставляя полученные корни в уравнение (26), находим соответствующие им коэффициенты $\{\sigma^\eta\}$ правых лестничных операторов.

4 Алгебра Вейля W(1)

Алгебра Вейля возникает при рассмотрении классической задачи квантовой физики — квантовании гармонического осциллятора [17] [9] [18] [19]. Сопряженные операторы рождения $a^\dagger$ и уничтожения a описывают переходы между энергетическими состояниями гармонического осциллятора. Так, определенный через операторы $a^\dagger$ и a оператор числа частиц N обладает состояниями, которые отвечают целым неотрицательным числам

$$N\left|n\right\rangle = n,$$

действие на которые операторами $a^\dagger$ и a имеет следующий вид

$$\begin{aligned} a^\dagger\left|n\right\rangle &= \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle, \\ a\left|n+1\right\rangle &= \sqrt{n+1}\left|n\right\rangle, \end{aligned}$$

а состояние $\left|0\right\rangle$ аннигилируется оператором a (является ядром a) и называется вакуумным.

Операторы $a^\dagger$ и a являются примером классических лестничных операторов

$$[a^\dagger a,\, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [a^\dagger a,\, a] = -a.$$

Состояния $\{\left|n\right\rangle\}$, где n неотрицательное целое, формируют базис так называемого пространства Фока.

В случае, когда исследуемый процесс описывает взаимодействие нескольких связанных осцилляторов, представление чисел заполнения определяется, соответственно, количеством фотонов на каждой из взаимодействующих мод. Таким образом состояние фоковского пространства m взаимодействующих мод представляет из себя состояние следующего вида

$$\left|n_1,\, n_2,\, \ldots, n_m\right\rangle,$$

где n_i - собственное число оператора числа частиц соответствующей моды

$$a_i^\dagger a_i\left|n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_i,\, \ldots n_m\right\rangle = n_i\left|n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_i,\, \ldots n_m\right\rangle.$$

Бозонные операторы различных мод коммутируют, а их самосопряженные операторы числа частиц образуют полный коммутирующий набор, определяющий базис пространства Фока - базис чисел заполнения.

Взаимодействие внутри полевой системы может быть представлено как полином операторов рождения / уничтожения различных мод, всякое движение внутри такой системы представляет из себя изменение чисел заполнения.

Размерность n-частичного Фоковского пространства $(2s + 1)$ взаимодействующей моды определяется выражением

$$dimF_{n,s} = \frac{(2s+n)!}{n!(2s)!},$$

где s - либо целое неотрицательное, либо полуцелое положительное число.

Одночастичное Фоковское состояние реализует тривиальное представление исходной алгебры, в то время как n-частичное Фоковское состояние является симметричным тензорным представлением исходной алгебры соответствующей степени.

5 Отображение Жордана-Швингера

5.1 Определение

Отображение Жордана-Швингера [10][5] [12][13] позволяет описывать физические явления в релятивистской области энергии. Всякий процесс характеризуются рождением и уничтожением частиц. Квантовая теория поля является обобщением квантовой механики в случае высоких энергий, учитывающим относительность Эйнштейна (симметрию Пуанкаре). Жорданом было показано в 1935 году, что основная техника квантования поля может быть представлена с помощью отображения Жордана-Швингера. Швингер использовал это отображение в своем докладе "Об угловом моменте". Это отображение позволяет представить всякую алгебру в виде полевых операторов многомодовой системы, при этом сохраняя ее свойства. При этом одночастичное состояние многомодовой системы является образом инвариантного пространства алгебры.

Отображение Жордана-Швингера [5] связывает $n \times n$-матрицы с бозонными полиномами n-модовой системы

$$\mathfrak{L}_X : X_{ij} \to \sum_{i,j=1}^{n} X_{i,j} a_i^\dagger a_j \equiv \mathfrak{L}_X. \tag{29}$$

и сохраняет коммутационные соотношения для матриц $\mathfrak{L}_{[A,B]} = [\mathfrak{L}_A, \mathfrak{L}_B]$.

Все Фоковские состояния $|n_{-s}, n_{-s+1}, \ldots, n_s\rangle_F$ являются чистыми - все фоковские состояния одномерны, определяя тем самым размерность состояний всякого оператора. Действие бозонных полиномов в пространстве Фока сводится к умножению Фоковских состояний на числа вида $\sqrt(k)$, где k - число частиц на моде, что позволяет сузить поле коэффициентов до кольца чисел вида $\sqrt(n)$. В таком случае, коэффициенты состояний операторов будут являться корнямии из натуральных чисел. Очевидно, что норма таких состояний отлична от 1. Деление на всех коэффициентов в разложении по Фоковскому базису на их наибольший общий делитель позволяет найти состояние с минимальной нормой. Это весьма полезно при нахождении этих коэффициентов программным методом, поскольку позволяет свести вычисления к манипуляции с целыми числами, что позволяет получать точные решения задач.

Например, пусть мы нашли образ отображения Жордана самосопряженного оператора H. Тогда его нормированное состояние $|\psi\rangle$ выражается через Фоковские состояния следующим образом

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m)\,|\psi\rangle = \sqrt{\alpha_0}\,|n_{-s}, n_{-s+1}, \ldots, n_s\rangle_F + \\ + \sqrt{\alpha_1}\,|n'_{-s}, n'_{-s+1}, \ldots, n'_s\rangle_F + \ldots + \sqrt{\alpha_m}\left|n^{(m)}_{-s}, n^{(m)}_{-s+1}, \ldots, n^{(m)}_s\right\rangle_F. \quad (30)$$

Такое состояние будет обладать минимальной нормой в случае когда наибольший общий делить всех коэффициентов равен 1.

6 Алгебра SU(2)

Алгебра $SU(2)$ [10] [14] [6] определяется коммутационными соотношениями своих генераторов

$$J_1 = J_1^\dagger, \quad J_2 = J_2^\dagger, \quad J_3 = J_3^\dagger,$$
$$[J_x,\, J_y] = iJ_z,$$
$$[J_y,\, J_z] = iJ_x,$$
$$[J_z,\, J_x] = iJ_y.$$

Через них определяются лестничные операторы J_+ и J_- оператора J_z

$$J_+ = J_x + iJ_y,$$
$$J_- = J_x - iJ_y,$$
$$(J_+)^\dagger = J_-.$$

Получаем следующие коммутационные соотношения

$$[J_z,\, J_+] = J_+,$$

и

$$[J_z,\, J_-] = -J_-.$$

В пространстве представления алгебры $SU(2)$ определяется оператор Казимира J_2

$$J^2 = J_z^2 + \frac{1}{2}J_+J_- + J_-J_+. \tag{31}$$

Оператор Казимира коммутирует со всеми генераторами алгебры $SU(2)$

$$\left[J^2,\, J_x\right] = 0,$$
$$\left[J^2,\, J_y\right] = 0,$$
$$\left[J^2,\, J_z\right] = 0.$$

В алгебре $SU(2)$ определены состояния $|j,\, j_z\rangle$, действие на которых определено для всех образующих алгебры

$$J_z\left|j,\, j_z\right\rangle = j_z\left|j,\, j_z\right\rangle,$$
$$J^2\left|j,\, j_z\right\rangle = j(j+1)\left|j,\, j_z\right\rangle,$$

где собственное число j является неотрицательным целым, либо положительным полуцелым, а собственное число j_z принадлежит множеству $\{-j \geqslant j_z \geqslant j\}$ и является целым или полуцелым в зависимости от j.

Действие лестничных операторов определено для таких состояний

$$J_+ \left|j,\, j_z\right\rangle = \sqrt{(j-j_z)(j+j_z+1)}\left|j,\, j_z+1\right\rangle,$$
$$J_- \left|j,\, j_z+1\right\rangle = \sqrt{(j-j_z)(j+j_z+1)}\left|j,\, j_z\right\rangle$$

а состояния $\left|j,\, j_z=j\right\rangle$ и $\left|j,\, j_z=-j\right\rangle$ являются аннигилируемыми для лестничных операторов J_+ и J_- соответственно

$$J_+ \left|j,\, j_z=j\right\rangle = 0,$$
$$J_- \left|j,\, j_z=-j\right\rangle = 0.$$

Иначе говоря

$$\ker J_+ = \left|j,\, j_z=j\right\rangle,$$
$$\ker J_- = \left|j,\, j_z=-j\right\rangle.$$

Тензорные представления группы $SU(2)$ раскладываются на неприводимые представления, однако, в рамках алгебры $SU(2)$ построить однозначную классификацию кратных состояний оператора J^2 не удается — любое разделение оказывается искусственным, с произволом выбора. Реализуя алгебру $SU(2)$ в пространстве Фока, мы решим эту задачу, опираясь на геометрические свойства пространства - на его симметрии. Языком, описывающим такие симметрии, как раз и будут лестничные операторы.

Оператор J_+ является правым лестничным оператором оператора J_+J_-

$$[J_+J_-,\, J_+] = J_+ 2J_z,$$

а, следовательно, верно следующее

$$[(J_+J_-)^k,\, J_+] = J_+\left((J_+J_-+2J_z)^k - (J_+J_-)^k\right) =$$
$$= ((\hat{j}-J_z)(\hat{j}+J_z+1)+2J_z)^k - \left((\hat{j}-J_z)(\hat{j}+J_z+1)\right)^k.$$

Преобразуем и получаем итоговое выражение

$$[(J_+J_-)^k,\ J_+] = \\ = J_+\left(\Big((\hat{j}-J_z+1)(\hat{j}+J_z)\Big)^k - \Big((\hat{j}-J_z)(\hat{j}+J_z+1)\Big)^k\right). \quad (32)$$

Оператор J_+ является левым лестничным оператором оператора J_+J_-

$$[J_+J_-,\ J_+] = 2(J_z-1)J_+,$$

соответственно, получаем

$$[(J_+J_-)^k,\ J_+] = \\ = \left(\Big((\hat{j}-J_z)(\hat{j}+J_z+1)\Big)^k - \Big(\hat{j}^2+\hat{j}+(J_z-1)(J_z+2)\Big)^k\right) J_+. \quad (33)$$

6.1 Образ генераторов неприводимого представления группы $SU(2)$ при отображении Жордана-Швингера

Применяя отображение Жордана-Швингера к генераторам алгебры $SU(2)$ в каноническом базисе, мы получаем

$$\begin{gathered}J_z = \sum_{\mu=-s}^{s} \mu a_\mu^\dagger a_\mu, \\ J_+ = (J_-)^\dagger = \sum_{\mu=-s}^{\mu=s-1} \sqrt{(s+\mu+1)(s-\mu)} a_{\mu+1}^\dagger a_\mu, \\ \mathfrak{L}_E = \sum_{\mu=-s}^{s} a_\mu^\dagger a_\mu = \sum_{\mu=-s}^{s} N_\mu \equiv N,\end{gathered} \tag{34}$$

где целое число s - номер старшей моды, операторы $a_\mu, \quad a_\mu^\dagger$ - бозонные операторы соответствующих мод, операторы $J_z, \quad J_+, \quad J_-$ подчиняются коммутационным соотношениям (**??**), а образом единичного оператора E является оператор общего числа частиц N.

Оператор E коммутирует с любыми операторами, а, следовательно, его образ — оператор N коммутирует с генераторами $SU(2)$ и оператором Казимира J^2, тем самым дополняя набор коммутирующих операторов. Таким образом, собственное число n оператора N уточняет классификацию состояний $|j, j_z\rangle_J$, позволяя различать кратные j по числу частиц состояния

$$\begin{gathered}N\,|n; \quad j, j_z\rangle_{NJ} = n\,|n; \quad j, j_z\rangle_{NJ}\,, \\ J^2\,|n; \quad j, j_z\rangle_{NJ} = j(j+1)\,|n; \quad j, j_z\rangle_{NJ}\,, \\ J_z\,|n; \quad j, j_z\rangle_{NJ} = j_z\,|n; \quad j, j_z\rangle_{NJ}\,; \\ [J^2, J_z] = [J^2, N] = [J_z, N] = 0.\end{gathered} \tag{35}$$

Все фоковские состояния являются собственными состояниями оператора J_z, а одночастичные состояния

$$J^2\,|0, 0, \dots, n_i = 1, \dots 0\rangle_F = s(s+1)\,|0, 0, \dots, n_i = 1, \dots 0\rangle_F$$

относятся к собственному состоянию оператора J^2 с собственным числом

$s(s+1)$, тем самым являсь тривиальным представлением исходной алгебры.

Наибольшее возможное собственное число оператора J^2 при n частицах - $ns(ns+1)$. Оно реализуется для аннигилируемого состояния $|n,0,\dots 0\rangle_F$ оператора J_-, для $|0,\dots n\rangle_F$ оператора J_+ и для состояний, полученных применением лестничных операторов к аннигилируемым состояниям. При этом, состояние $|n,0,\dots 0\rangle_F$ отвечает собственному числу $-ns$ оператора J_z и является для него одномерным, как и состояние $|n-1,1,0,\dots 0\rangle_F$ отвечающее собственному числу $-ns+1$ оператора J^2.

Таким образом, не существует состояния в n-частичном состоянии, которое бы отвечало собственному числу $(ns-1)ns$ оператора Казимира J^2. Не все состояния $|n;\quad j,j_z\rangle_{NJ}$ одномерны - собственных чисел операторов N, J^2, J_z оказывается недостаточным для построения полной классификации состояний системы.

7 Лестничные операторы оператора Казимира алгебры $SU(2)$ при отображении Жордана-Швингера

7.1 Коммутирующий набор

Пусть s - неотрицательное целое.

Рассмотрим следующий набор коммутирующих с оператором J_z операторов $\{p_k^\dagger\}_{k=0}^s$ и $\{m_k^\dagger\}_{k=1}^s$. Определим их следующим образом

$$\begin{aligned} p_0^\dagger &= 2a_0^\dagger, \\ p_k^\dagger &= \frac{1}{\prod_{i=1}^k \sqrt{(s+i)(s-i+1)}} \left(a_{-k}^\dagger J_+^k + a_k^\dagger J_-^k \right), \\ m_k^\dagger &= \frac{1}{\prod_{i=1}^k \sqrt{(s+i)(s-i+1)}} \left(a_{-k}^\dagger J_+^k - a_k^\dagger J_-^k \right). \end{aligned} \tag{36}$$

Все операторы из наборов $\{p_k^\dagger\}_{k=0}^s$ и $\{m_k^\dagger\}_{k=1}^s$ являются классическими лестничными операторами оператора общего числа частиц N

$$[N, p_k^\dagger] = p_k^\dagger,$$

$$[N, m_k^\dagger] = m_k^\dagger.$$

Как было показано в предыдущих разделах, для различных степеней μ оператора N эти операторы будут являться как правыми лестничными

$$\begin{gathered} [N^\mu, p_k^\dagger] = p_k^\dagger((N+\hat{I})^\mu - N^\mu), \\ \text{или} \quad N^\mu p_k^\dagger = p_k^\dagger (N+\hat{I})^\mu; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} [N - I^\mu, p_k^\dagger] = p_k^\dagger((N+\hat{I})^\mu - N^\mu), \\ \text{или} \quad (N-\hat{I})^\mu p_k^\dagger = p_k^\dagger N^\mu; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} [N^\mu, m_k^\dagger] = m_k^\dagger((N+\hat{I})^\mu - N^\mu), \\ \text{или} \quad N^\mu m_k^\dagger = m_k^\dagger (N+\hat{I})^\mu; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} [N - I^\mu, m_k^\dagger] = m_k^\dagger((N+\hat{I})^\mu - N^\mu), \\ \text{или} \quad (N-\hat{I})^\mu m_k^\dagger = m_k^\dagger N^\mu; \end{gathered}$$

так и левыми лестничными

$$[N^\mu, p_k^\dagger] = (N^\mu - (N - \hat{I})^\mu) p_k^\dagger,$$

$$[N^\mu, m_k^\dagger] = (N^\mu - (N - \hat{I})^\mu) m_k^\dagger.$$

Также, поскольку собственные числа оператора числа частиц N являются множеством неотрицательных целых чисел, то любой оператор вида $N + \lambda\hat{I}$, где λ вещественное нецелое число, будет обладать тривиальным ядром. Покажем, что для обратного оператора $(N + \lambda\hat{I})^{-1}$ операторы $p_k^\dagger$ и $m_k^\dagger$ также будут лестничными, а, соответственно, и для степеней $(N+\lambda\hat{I})^{-\mu}$ тоже. Чтобы найти коммутационные соотношения, рассмотрим следующий коммутатор

$$0 = \left[\hat{I},\, p_k^\dagger\right] = \left[\frac{N + \lambda\hat{I}}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right].$$

Преобразуем и получаем следующее тождество

$$p^\dagger \frac{1}{N + \lambda\hat{I}} + (N + \lambda\hat{I}) \left[\frac{1}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right] = 0.$$

Воспользуемся тождеством Якоби и получим перестановочные соотношения для оператора $N + \lambda\hat{I}$ и коммутатора $\left[\frac{1}{N+\lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right]$

$$\left[N + \lambda\hat{I},\, \left[\frac{1}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right]\right] = \left[\frac{1}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right]$$

или

$$(N + \lambda\hat{I}) \left[\frac{1}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right] = \left[\frac{1}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right] (N + (\lambda + 1)\hat{I})$$

Оператор $(N + \lambda\hat{I} + I)$ обладает тривиальным ядром, учитывая это, получаем

$$\left[\frac{1}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right] = -p^\dagger \frac{1}{(N + \lambda\hat{I})(N + (\lambda + 1)\hat{I})}$$

Раскладывая дробь на простейшие получаем конечное выражение

$$\left[\frac{1}{N + \lambda\hat{I}},\, p_k^\dagger\right] = p^\dagger \left(\frac{1}{N + (\lambda + 1)\hat{I}} - \frac{1}{N + \lambda\hat{I}}\right). \tag{37}$$

Аналогичным построением можно найти связанный левый лестничный оператор. Для $m_k^\dagger$ все выкладки идентичны

$$\left[\frac{1}{N+\lambda\hat{I}}, m_k^\dagger\right] = m^\dagger\left(\frac{1}{N+(\lambda+1)\hat{I}} - \frac{1}{N+\lambda\hat{I}}\right). \tag{38}$$

Теперь воспользуемся тем фактом, что линейная комбинация с коэффициентами из коммутирующих с N операторов лестничных операторов с одинаковыми функциями вновь будет лестничным оператором той же функции. Таким образом, определены коммутационные соотношения для произвольной линейной комбинации лестничных операторов и произвольной разложимой в ряд функции оператора N.

7.2 Замкнутый набор

Операторы $p_k^\dagger$ и $m_k^\dagger$ образуют замкнутое множество относительно действия оператора Казимира J^2

$$
\begin{gathered}
[J^2,\, p_0^\dagger] = s(s+1)p_0^\dagger + 2s(s+1)p_1^\dagger, \\
[J^2,\, p_k^\dagger] = ((s+k+1)(s-k) - k(k-1))p_k^\dagger + (s+k+1)(s-k)p_{k+1}^\dagger + \\
+p^\dagger((\hat{j}+J_z+1)(\hat{j}-J_z) - k(k-1)) + \\
+2k(m_k^\dagger + m_{k-1}^\dagger)J_z,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
[J^2,\, m_k^\dagger] = ((s+k+1)(s-k) - k(k-1))m_k^\dagger + (s+k+1)(s-k)m_{k+1}^\dagger + \\
+m^\dagger((\hat{j}+J_z+1)(\hat{j}-J_z) - k(k-1)) + \\
+2k(p_k^\dagger + p_{k-1}^\dagger)J_z,
\end{gathered}
\tag{39}
$$

где оператор $\hat{j}$ определен как

$$
\hat{j} = \frac{1}{2}(\sqrt{\hat{I} + 4J^2} - \hat{I}). \tag{40}
$$

Приведем доказательство формулы (39). Для этого рассмотрим коммутатор

$$
\begin{gathered}
[J^2, p_k^\dagger] = \frac{1}{\prod_{i=1}^k \sqrt{(s+i)(s-i+1)}}[J^2, a_{-k}^\dagger J_+^k + a_k^\dagger J_-^k] = \\
= \frac{1}{\prod_{i=1}^k \sqrt{(s+i)(s-i+1)}}([J_-J_+, a_{-k}^\dagger J_+^k] + [J_-J_+, a_k^\dagger J_-^k]) = \\
= \frac{1}{\prod_{i=1}^k \sqrt{(s+i)(s-i+1)}}([J_-J_+, a_{-k}^\dagger]J_+^k + a_{-k}^\dagger[J_-J_+, J_+^k] + \\
+[J_-J_+, a_k^\dagger]J_-^k + a_k^\dagger[J_-J_+, J_-^k]).
\end{gathered}
$$

Оператор Казимира представим в следующем виде $J^2 = J_z^2 + J_z + J_-J_+$, а операторы коммутируют с J_z, таким образом коммутатор упрощается до коммутационных соотношений с оператором J^2. Также оператор $J^2 = \hat{j}(\hat{j} + \hat{I})$, что позволяет выразить $J_-J_+ = (\hat{j} - J_z)(\hat{j} + J_z + 1)$. Найдем коммутационные соотношения $[J_-J_+, a_k^\dagger]$ и $[J_-J_+, J_-^k]$

$$
[J_-J_+, J_-^k] = J_-[J_+, J_-^k] = 2kJ_-^kJ_z - k(k-1)J_-^k,
$$

$$
[J_-J_+, J_+^k] = [J_-, J_+^k]J_- = -2kJ_-^{k-1}J_z - k(k-1)J_-^{k-1},
$$

$$[J_-J_+, a_k^\dagger] = [J_-, a_k^\dagger]J_+ + J_-[J_+, a_k^\dagger] =$$
$$= \sqrt{(s+k)(s-k+1)}a_{k-1}^\dagger J_+ + \sqrt{(s+k+1)(s-k)}a_{k+1}^\dagger J_-.$$

Отсюда

$$[J_-J_+, a_{-k}^\dagger J_+^k] = a_{-k}^\dagger J_+^k(s(s+1) - 2k^2 - 2kJ_z) +$$
$$+\sqrt{(s+k+1)(s-k)}a_{-k-1}^\dagger J_+^{k+1} + \sqrt{(s+k)(s-k+1)}a_{-k+1}^\dagger J_+^{k-1}.$$

Найдем правые функции лестничных операторов из уравнения (26). Воспользуемся симметрией состояний J_z относительно ядра. Нам достаточно построить лестничные операторы только в области, где $J_z \equiv 0$. Полученные операторы не будут являться лестничными на всем Фоковском пространстве (для различных состояний оператора J_z), но по действию будут совпадать внутри ядра J_z с действующими на всем пространстве лестничными операторами оператора Казимира J^2. Получив различные состояния оператора Казимира J^2 внутри ядра J_z, мы сможем продолжить их за пределы ядра, используя лестничные операторы $J_\pm$ алгебры $SU(2)$. Тем самым получаем различные неприводимые представления.

Лестничные операторы являются линейными эндоморфизмами, следовательно, размерность их образа не превышает размерность их прообраза. Соответственно, лестничный оператор переводит одномерное состояние в одномерное, либо аннигилирует его. Фоковские одночастичные состояния относятся к неприводимому представлению алгебры $SU(2)$ отвечающим собственному числу $s(s+1)$ оператора Казимира J^2

$$J^2 \left|0,\, 0,\, \ldots,\, n_k = 1,\, \ldots, 0\right\rangle = s(s+1) \left|0,\, 0,\, \ldots,\, n_k = 1,\, \ldots, 0\right\rangle$$

и оператор J_z обладает одномерным ядром

$$J_z \left|0,\, 0,\, \ldots,\, n_0 = 1,\, \ldots, 0\right\rangle = 0.$$

Действуя на это ядро различными комбинациями лестничных операторов оператора Казимира, получаем различные одномерные состояния операторов Казимира J^2 и общего числа частиц N, лежащие внутри ядра J_z.

Заменим в (39) оператор J_z на тождественный ноль и получим следующие соотношения, верные внутри ядра J_z

$$
\begin{gathered}
[J^2,\, p_0^\dagger] = s(s+1)p_0^\dagger + 2s(s+1)p_1^\dagger, \\
[J^2,\, p_k^\dagger] = ((s+k+1)(s-k) - k(k-1))p_k^\dagger + (s+k+1)(s-k)p_{k+1}^\dagger + \\
+ p_{k-1}^\dagger((\hat{j}+1)\hat{j} - k(k-1)), \\
[J^2,\, m_k^\dagger] = ((s+k+1)(s-k) - k(k-1))m_k^\dagger + (s+k+1)(s-k)m_{k+1}^\dagger + \\
+ m_{k-1}^\dagger((\hat{j}+1)\hat{j} - k(k-1)),
\end{gathered}
\tag{41}
$$

Следуя общим соображениям, описанным в разделе "Нахождение лестничных операторов для замкнутой системы", построим матрицу $A - P$. Матрица A, описывающая исходные коммутационные соотношения, в этом случае будет блочной

$$
A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},
$$

состоящей из двух трехдиагональных матриц P размерности $\dim P = s+1$

$$
P = \begin{pmatrix}
s(s+1) & \hat{j}(\hat{j}+1), & 0, & \dots & 0 & 0 \\
2s(s+1) & s(s+1)-4 & (\hat{j}-1)(\hat{j}+2) & \dots & 0 & 0 \\
0 & (s-1)(s+2) & s(s+1)-8 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -s^2+5s-2 & \hat{j}(\hat{j}+1)-s^2+s \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2s & -s^2+s
\end{pmatrix}
$$

и матрицы M размерности $\dim M = s$

$$
M = \begin{pmatrix}
s(s+1)-4 & (\hat{j}-1)(\hat{j}+2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\
(s-1)(s+2) & s(s+1)-8 & (\hat{j}-2)(\hat{j}+3) & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -s^2+5s-2 & \hat{j}(\hat{j}+1)-s^2+s \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2s & -s^2+s
\end{pmatrix}
$$

Выбор коэффициентов при $\{p_k^\dagger\}_{k=0}^s$ и $\{m_k^\dagger\}_{k=1}^s$ позволяет привести ее к симметричному виду, отсюда получаем, что матрицы P и M обладают различными собственными числами, которые выражаются через оператор $\hat{j}$. След матриц P и M равен сумме их собственных чисел.

Матрице A соответствует следующий набор собственных чисел

$$\{\theta(\theta + 2\hat{j} + 1)\hat{I}\}_{\theta=-s}^{s},$$

причем матрице P отвечают θ той же четности, что и s, а матрице M — все остальные.

Матрица M получается из матрицы P вычеркиванием первой строки и столбца. Будем искать коэффициенты рекуррентно, начиная с σ_s. Для матриц P и M уравнения на лестничный оператор будут практически идентичны, что позволяет получить общий для них результат. Будем искать решение следующего уравнения

$$\left(P - \theta(\theta + 2\hat{j} + 1)\hat{I}\right) \begin{pmatrix} \sigma_0^\theta \\ \sigma_1^\theta \\ \vdots \\ \sigma_s^\theta = \hat{I} \end{pmatrix} = 0.$$

Коэффициент σ_{s-1}^θ находится при $\sigma_s^\theta = \hat{I}$ из уравнения последней строки

$$\sigma_{s-1}^\theta = \hat{j}\frac{\theta}{s} + \frac{\theta^2 + \theta + s^2 - s}{2s}, \tag{42}$$

Рассмотрим строку k.

$$\begin{gathered}(s-k)(s+k+1)\sigma_{k-1}^\theta + \\ +((s-k)(s+k+1) - k(k-1) - \theta(\theta + 2\hat{j} + 1))\sigma_k^\theta + \\ +(\hat{j} - k)(\hat{j} + k + 1)\sigma_{k+1}^\theta = 0.\end{gathered}$$

Выразим σ_{k-1}^θ через σ_k^θ и σ_{k+1}^θ

$$\begin{multlined}\sigma_{k-1}^\theta = \frac{\theta^2 + \theta + k^2 + k}{(s+k)(s-k+1)}\sigma_k^\theta + \hat{j}\frac{2\theta\sigma_k^\theta}{(s+k)(s-k+1)} - \\ - \sigma_k^\theta - \frac{(\hat{j} + k + 1)(\hat{j} - k)}{(s+k)(s-k+1)}\sigma_{k+1}^\theta. \end{multlined} \tag{43}$$

Видно, что в общем случае σ_k^θ оказывается полиномом оператора $\hat{j}$ степени $(s-k)$.

Обозначим полученные лестничные операторы как $\{\tau_\theta^\dagger\}_{\theta=-s}^{s}$

$$\begin{gathered}\tau_\theta^\dagger = \sum_{k=0}^{s} p_k^\dagger \sigma_k^\theta, \quad \text{для} \quad \theta \quad \text{четности} \quad \text{s}, \\ \text{и} \\ \tau_\theta^\dagger = \sum_{k=1}^{s} m_k^\dagger \sigma_k^\theta, \quad \text{для остальных} \quad \theta.\end{gathered} \tag{44}$$

Лестничные операторы имеют следующие коммутационные соотношения с оператором Казимира J^2

$$[J^2,\, \tau_\theta^\dagger] = \tau_\theta^\dagger \theta(\theta + 2\hat{j} + 1). \tag{45}$$

Аналогично получаются сопряженные операторы $\{\tau_\theta\}_{\theta=-s}^{s}$

$$\begin{gathered}\tau_\theta = \sum_{k=0}^{s} \sigma_k^\theta p_k, \quad \text{для} \quad \theta \quad \text{четности} \quad \text{s}, \\ \text{и} \\ \tau_\theta = \sum_{k=1}^{s} \sigma_k^\theta m_k, \quad \text{для остальных} \quad \theta.\end{gathered} \tag{46}$$

и их коммутационные соотношения с оператором Казимира J^2

$$[J^2,\, \tau_\theta] = -\theta(\theta + 2\hat{j} + 1)\tau_\theta. \tag{47}$$

7.3 Коммутационные соотношения между полиномами оператора Казимира и лестничными операторами

Поскольку оператор Казимира J^2 представим в виде полинома $J^2 = \hat{j}(\hat{j}+1)$ оператора $\hat{j}$, область определения которого совпадает со всей областью определения оператора Казимира J^2 и его действие происходит в тех же инвариантных пространствах, мы можем найти коммутационные соотношения оператора $\hat{j}$ с лестничными операторами $\{\tau_\theta^\dagger\}$ из решения уравнения

$$\begin{gathered}[\hat{j},\, \tau_\theta^\dagger] = \tau_\theta^\dagger\; X,\\ [\hat{j}^2,\, \tau_\theta^\dagger] = \tau_\theta^\dagger\; X(X+2\hat{j}),\\ [J^2,\, \tau_\theta^\dagger] = [\hat{j}(\hat{j}+1),\, \tau_\theta^\dagger]\end{gathered} \tag{48}$$

Зная коммутационные соотношения оператора $\hat{j}$ с лестничными операторами, мы можем без труда вычислить коммутационные соотношения лестничных операторов $\tau_\theta^\dagger$ с оператором $\hat{j}$.

$$[j,\, \tau_\theta^\dagger] = \theta\tau_\theta^\dagger,$$

Пользуясь этим, мы можем вычислить левые функции лестничных операторов

$$[J^2,\, \tau_\theta^\dagger] = \theta(-\theta+2\hat{j}+1)\tau_\theta^\dagger = \theta(\theta+2\hat{j}+1) = X(X+2\hat{j}+1) \tag{49}$$

, Откуда $X = \theta\hat{I}$. Левые и правые функции лестничных операторов оператора $\hat{j}$ совпадают, поскольку $[\hat{j},\, \theta\hat{I}] = 0$

$$[\hat{j},\, \tau_\theta^\dagger] = \theta\tau_\theta^\dagger = \tau_\theta^\dagger\theta. \tag{50}$$

Воспользуемся симметрией коммутационных соотношений. Для сопряженных лестничных операторов $\{\tau_\theta\}$ получаем

$$\begin{gathered}[N,\, \tau_\theta] = -\tau_\theta,\\ [J^2,\, \tau_\theta] = -\tau_\theta\theta(-\theta+2\hat{j}+1) = \theta(\theta+2\hat{j}+1)\tau_\theta,\\ [\hat{j},\, \tau_\theta] = -\theta\tau_\theta = -\tau_\theta\theta.\end{gathered} \tag{51}$$

7.4 Коммутационные соотношения между обратными полиномам оператора Казимира и лестничными операторами

Оператор $(2\hat{j} + \hat{I})$ обладает тривиальным ядром, найдем коммутационные соотношения обратного оператора $\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}}$ с лестничным $\theta\tau_\theta^\dagger$ $[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger]$ Для этого, рассмотрим следующий коммутатор

$$\left[\frac{2\hat{j}+\hat{I}}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right] = \left[2\hat{j}+\hat{I},\, \tau_\theta^\dagger\right]\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}} + (2\hat{j}+\hat{I})\left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right] = 0. \qquad (52)$$

Воспользуемся тождеством Якоби

$$\left[2\hat{j}+\hat{I},\, \left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right]\right] + \left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \left[\tau_\theta^\dagger,\, 2\hat{j}+\hat{I}\right]\right] + \left[\tau_\theta^\dagger,\, \left[2\hat{j}+\hat{I},\, \frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}}\right]\right] = 0$$

и получим интересующее нас выражение

$$(2\hat{j}+\hat{I})\left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right] = \left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right](2\hat{j}+(1+2\theta)\hat{I}).$$

Подставим полученное в (52) и выразим коммутатор $\left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right]$

$$-2\theta\tau_\theta^\dagger\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}} = \left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right](2\hat{j}+(1+2\theta)\hat{I}).$$

Оператор $2\hat{j}+(1+2\theta)\hat{I}$ обладает тривиальным ядром — домножаем справа на обратный оператор и получаем

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right] = \tau_\theta^\dagger\frac{-2\theta}{(2\hat{j}+1)(2\hat{j}+1+2\theta)}. \qquad (53)$$

Разложим дробь на простые

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}},\, \tau_\theta^\dagger\right] = \tau_\theta^\dagger\left(\frac{1}{2\hat{j}+(1+2\theta)\hat{I}} - \frac{1}{2\hat{j}+\hat{I}}\right). \qquad (54)$$

Коммутационные соотношения операторов вида $\frac{1}{2\hat{j}+(2k\theta+1)\hat{I}}$, где k неотрицательное, находятся схожим образом. Получаем следующее выражение общего вида

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}},\,\tau_\theta^\dagger\right]=\tau_\theta^\dagger\left(\frac{1}{2\hat{j}+(1+2(k+1))\theta\hat{I}}-\frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}\right). \tag{55}$$

Имеет место так же аналогичное выражение с левой функцией лестничного оператора

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}},\,\tau_\theta^\dagger\right]=\left(\frac{1}{2\hat{j}+(1+2(k+1))\theta\hat{I}}-\frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}\right)\tau_\theta^\dagger. \tag{56}$$

Видно, что такие операторы воспроизводятся в коммутационных соотношениях, а, следовательно, любая их степень $\left(\frac{1}{2\hat{j}+(2k\theta+1)\hat{I}}\right)^n$ будет обладать правым лестничным оператором $\tau_\theta^\dagger$

$$\begin{gathered}\left[\left(\tfrac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}\right)^n,\,\tau_\theta^\dagger\right]=\\ =\tau_\theta^\dagger\left(\left(\tfrac{1}{2\hat{j}+(1+2(k+1))\theta\hat{I}}-\tfrac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}+\tfrac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}\right)^n-\left(\tfrac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}\right)^n\right)=\\ =\tau_\theta^\dagger\left(\left(\tfrac{1}{2\hat{j}+(1+2(k+1))\theta\hat{I}}\right)^n-\left(\tfrac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}\right)^n\right).\end{gathered}$$

Для произвольной функции оператора $\hat{j}$, которую мы можем разложить по функциям $\{\hat{j}^k\}_{k=0}^n$ и $\{\left(\frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\theta\hat{I}}\right)^k\}_{k=0}^n$, мы можем найти коммутационные соотношения с любым из лестничных операторов $\{\tau_\theta\}$ или $\{\tau_\theta^\dagger\}$.

7.5 Аннигилируемые состояния лестничных операторов оператора Казимира

Геометрия фоковского пространства позволяет исследовать вопрос об аннигилируемых состояниях построенных для оператора Казимира $\hat{j}(\hat{j}+1)$ лестничных операторов $\{\tau_\theta^\dagger\}_{\theta=-s}^s$ и сопряженных им лестничных операторов $\{\tau_\theta\}_{\theta=-s}^s$. Иначе говоря, найти такие состояния, которые однозначно находятся в соответствующих ядрах лестничных операторов.

Будем исследовать состояния операторов $\hat{j}$ и N лежащих в ядре оператора J_z

$$|n,\, j,\, ,j_z = 0\rangle\,,$$

При заданном числе частиц n (собственном числе оператора N), собственные числа оператора $\hat{j}$ находятся в пределах $0 \leqslant j \leqslant ns$.

Действие операторов внутри ядра J_z можно изобразить следующей схемой для $\omega = 1 \dots s$

$$\begin{gathered}
\tau_\omega^\dagger\,|n,\, j\rangle \Rightarrow |n+1,\, j+\omega\rangle\,,\\
\tau_\omega\,|n+1,\, j+\omega,\rangle \Rightarrow |n,\, j\rangle\,,\\
\text{и}\\
\tau_{-\omega}^\dagger\,|n,\, j+\omega,\rangle \Rightarrow |n+1,\, j\rangle\,,\\
\tau_{-\omega}\,|n+1,\, j,\rangle \Rightarrow |n,\, j+\omega\rangle\,.
\end{gathered} \tag{57}$$

Операторы $\tau_\omega^\dagger$ обладают тривиальным ядром, если ω той же четности, что и s. Если ω отличается четностью от s, тогда все одночастичное состояние лежит в ядре $\tau_\omega^\dagger$. Это связано с антисимметричным определением оператора $\tau_\omega^\dagger$ для ω отличной от s четности.

Операторы τ_ω будут аннигилировать все состояния $j < \omega$ и вакуумное состояние $n = 0$, таким образом реализуя ω различных представлений алгебры. Сама алгебра пары операторов представляет из себя деформацию алгебры Вейля $W(1)$, о чем можно судить по аннигилируемым состояниям. Ее различные представления определяются числом $r_\theta = j(\mod \omega)$ и собственными числами самосопряженных операторов

$$\tau_\omega^\dagger \tau_\omega$$

.

Операторы $\tau_{-\omega}^\dagger$ аннигилируют все состояния $j < \omega$, а операторы $\tau_{-\omega}$ аннигилируют все состояния $j > ns - \omega$ и вакуумное состояние $n = 0$. Таким образом, можно говорить, что операторы $\tau_{-\omega}^\dagger$ и $\tau_{-\omega}$ представляют деформацию алгебры $SU(2)$, где представления различаются числом $r_\theta = j(\mod \omega)$ и собственными числами самосопряженных операторов

$$L_z^\omega = [\tau_{-\omega}^\dagger, \tau_{-\omega}],$$

$$L_\omega^2 = (L_z^\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\tau_{-\omega}^\dagger \tau_{-\omega} + \tau_{-\omega}\tau_{-\omega}^\dagger.\right)$$

Операторы $\tau_0^\dagger$ и τ_0 не изменяют собственные числа оператора Казимира J^2

$$\begin{aligned} \tau_0^\dagger \left|n,\, j\right\rangle &\Rightarrow \left|n+1,\, j\right\rangle, \\ \tau_0 \left|n+1,\, j,\right\rangle &\Rightarrow \left|n,\, j\right\rangle, \end{aligned} \tag{58}$$

коммутируя с ним.

Поскольку лестничные операторы являются линейными эндоморфизмами, размерность образа состояния не будет превышать размерность самого состояния. Таким образом, применяя к одночастичному состоянию

$$\left|n=1,\, j=s,\, j_z=0\right\rangle \equiv \left|n_{-s}=0,\, n_{-s+1}=0,\, \ldots,\, n_0=1,\, \ldots, n_s=0,\,\right\rangle$$

построенные операторы $\{\tau_\theta\}_{\theta=-s}^s$, мы получим $(s+1)$ различное одномерное состояние для двухчастичного случая

$$\begin{gathered} \left|n=2,\, j=0,\, j_z=0\right\rangle, \\ \left|n=2,\, j=2,\, j_z=0\right\rangle, \\ \left|n=2,\, j=4,\, j_z=0\right\rangle, \\ \vdots \\ \left|n=2,\, j=2s-2,\, j_z=0\right\rangle, \\ \left|n=2,\, j=2s,\, j_z=0\right\rangle. \end{gathered}$$

Далее, действуя на них операторами $\{\tau_\theta\}_{\theta=-s}^{s}$, получим различные одномерные состояния в пространстве $n = 3$, в том числе и кратные j. Их и будут различать собственные числа построенных нами самосопряженных операторов.

8 Случай трех мод

В случае трех взаимодействующих мод задача классификации не стоит — все подпространства ядра J_z одномерны, а набор коммутирующих операторов J^2, J_z, N является полным, однако, применение техники лестничных операторов хорошо может быть проиллюстрированно на этом примере.

Для случая трех мод генераторы алгебры $SU(2)$ представляются следующим образом

$$\begin{gathered} J_z = \sum_{\mu=-1}^{1} \mu a_\mu^\dagger a_\mu, \\ J_+ = (J_-)^\dagger = \sum_{\mu=-1}^{\mu=0} \sqrt{(\mu+2)(1-\mu)} a_{\mu+1}^\dagger a_\mu, \\ \mathfrak{L}_E = \sum_{\mu=-1}^{1} a_\mu^\dagger a_\mu = \sum_{\mu=-1}^{1} N_\mu \equiv N, \end{gathered} \tag{59}$$

Рассмотрим следующие операторы

$$p_0^\dagger = 2a_0^\dagger, \quad \sqrt{2} p_1^\dagger = a_1^\dagger J_- + a_{-1}^\dagger J_+. \tag{60}$$

Операторы $p_0^\dagger$ и $p_1^\dagger$ коммутируют с оператором J_z и являются классическими лестничными операторами оператора N.

Оператор $m_1^\dagger$ аннигилирует ядро J_z, это тривиально проверяется, если рассмотреть действие оператора $m_1^\dagger$ на произвольное Фоковское состояние $|n_{-1} = m, n_0 = k, n_1 = m\rangle$. Однако, вне ядра J_z оператор $m_1^\dagger$ действует нетривиально, что важно в построении лестничных операторов на всем пространстве Фока. Нам же достаточно построить их только на ядре, чтобы получить различные состояния оператора $\hat{j}$ и восстановить отвечающие им инвариантные пространства действием лестничных операторов J_+ и J_- алгебры $SU(2)$

Найдем коммутационные соотношения операторов $p_0^\dagger$ и $p_1^\dagger$ с оператором Казимира J^2

$$\begin{gathered} [J^2, p_0^\dagger] = 2p_0^\dagger + 4p_1^\dagger, \\ [J^2, p_1^\dagger] = p_0^\dagger J_- J_+ = p_0^\dagger (\hat{j} - J_z)(\hat{j} + J_z + 1). \end{gathered}$$

Нам не требуется получать лестничный оператор для всего пространства Фока, а достаточно рассмотреть его в ядре J_z. Положим $J_z \equiv 0$ и перепишем коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [J^2, p_0^\dagger] &= 2p_0^\dagger + 4p_1^\dagger, \\ [J^2, p_1^\dagger] &= p_0^\dagger \hat{j}(\hat{j}+1). \end{aligned} \tag{61}$$

Решением уравнения на правые функции лестничных операторов будут операторы $-2\hat{j}$ и $2(\hat{j}+1)$.

Воспользуемся алгоритмом нахождения коэффициентов начиная с $\sigma_{s=1} = 1$. Обозначим операторы $\tau_{-1}^\dagger$ и $\tau_1^\dagger$. Они будут иметь следующие коммутационные соотношения с оператором Казимира

$$\begin{aligned} [J^2, \tau_{-1}^\dagger] &= -\tau_{-1}^\dagger 2\hat{j}, \\ [J^2, \tau_1^\dagger] &= \tau_1^\dagger 2(\hat{j}+1) \end{aligned} \tag{62}$$

и выражаются через операторы $p_0^\dagger$ и $p_1^\dagger$ следующим образом

$$\begin{aligned} \tau_{-1}^\dagger &= p_0^\dagger \hat{j} - 2p_1^\dagger, \\ \tau_1^\dagger &= p_0^\dagger(\hat{j}+1) + 2p_1^\dagger. \end{aligned} \tag{63}$$

Без труда находятся их коммутационные соотношения для оператора $\hat{j}$

$$\begin{aligned} [\hat{j}, \tau_{-1}^\dagger] &= -\tau_{-1}^\dagger, \\ [\hat{j}, \tau_1^\dagger] &= \tau_1^\dagger \end{aligned} \tag{64}$$

и для

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\hat{I}}, \tau_1^\dagger\right] = \tau_1^\dagger\left(\frac{1}{2\hat{j}+(3+2k)\hat{I}} - \frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\hat{I}}\right), \tag{65}$$

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}-(1+2k)\hat{I}}, \tau_{-1}^\dagger\right] = \tau_{-1}^\dagger\left(\frac{1}{2\hat{j}-(3+2k)\hat{I}} - \frac{1}{2\hat{j}-(1+2k)\hat{I}}\right), \tag{66}$$

и аналогичное выражение с левыми функциями

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\hat{I}}, \tau_1^\dagger\right] = \left(\frac{1}{2\hat{j}+(3+2k)\hat{I}} - \frac{1}{2\hat{j}+(1+2k)\hat{I}}\right)\tau_1^\dagger, \tag{67}$$

$$\left[\frac{1}{2\hat{j}-(1+2k)\hat{I}}, \tau_{-1}^\dagger\right] = \left(\frac{1}{2\hat{j}-(3+2k)\hat{I}} - \frac{1}{2\hat{j}-(1+2k)\hat{I}}\right)\tau_{-1}^\dagger. \tag{68}$$

Из соотношения Якоби также получаем, что коммутатор $[\tau_1^\dagger,\, \tau_{-1}^\dagger]$ является лестничным для оператора $\hat{j}$

$$[\hat{j},\, [\tau_1^\dagger,\, \tau_{-1}^\dagger]] = 2[\tau_1^\dagger,\, \tau_{-1}^\dagger].$$

Теперь снова рассмотрим операторы $p_0^\dagger$ и $p_1^\dagger$.

Оператор $p_0^\dagger$ можно представить как

$$p_0^\dagger = \left(\tau_1^\dagger + \tau_{-1}^\dagger\right) \frac{1}{2\hat{j}+1},$$

а, следовательно, найти его коммутатор с оператором $\hat{j}$. Получаем

$$[\hat{j},\, p_0^\dagger] = (p_0^\dagger + 4p_1^\dagger)\frac{1}{2\hat{j}+1}, \tag{69}$$

.

Аналогично находим коммутационные соотношения для оператора $p_1^\dagger$. Оператор $p_1^\dagger$ можно представить как

$$p_1^\dagger = \frac{1}{4}\left((\tau_1^\dagger - \tau_{-1}^\dagger) - (\tau_1^\dagger + \tau_{-1}^\dagger)\frac{1}{2\hat{j}+1}\right),$$

откуда находим его коммутационные соотношения с оператором $\hat{j}$

$$[\hat{j},\, p_1^\dagger] = (p_0^\dagger J^2 - p_1^\dagger)\frac{1}{2\hat{j}+1}. \tag{70}$$

Используя

полученные в данном разделе коммутационные соотношения мы можем найти левые функции лестничных операторов. Получаем

$$\begin{aligned} \left[\hat{j},\, \tau_{-1}^\dagger\right] &= -\tau_{-1}^\dagger, & \left[\hat{j}\, \tau_1^\dagger\right] &= \tau_1^\dagger, \\ \left[J^2,\, \tau_{-1}^\dagger\right] &= -2(\hat{j}+1)\tau_{-1}^\dagger, & \left[J^2\, \tau_1^\dagger\right] &= 2\hat{j}\tau_1^\dagger. \end{aligned} \tag{71}$$

Тогда оператор $p_0^\dagger$ и $p_1^\dagger$ можно выразить иначе — через левые функции. Оператор $p_0^\dagger$ можно представить как

$$p_0^\dagger = \frac{1}{2\hat{j}+3}\tau_1^\dagger + \frac{1}{2\hat{j}-1}\tau_{-1}^\dagger,$$

а оператор $p_1^\dagger$ как

$$p_1^\dagger = \frac{1}{4}\left((\tau_1^\dagger - \tau_{-1}^\dagger) - \frac{1}{2\hat{j}+3}\tau_1^\dagger + \frac{1}{2\hat{j}-1}\tau_{-1}^\dagger\right).$$

Теперь найдем коммутационные соотношения операторов $p_0^\dagger$ и $p_1^\dagger$. Получаем следующее выражение. Пусть $N_0 = a_0^\dagger a$ - оператор числа частиц нулевой моды, тогда

$$[p_0,\, p_0^\dagger] = 4, \tag{72}$$

$$[p_0,\, p_1^\dagger] = 2(N - N_0), \tag{73}$$

$$[p_1,\, p_0^\dagger] = -2(N - N_0), \tag{74}$$

$$[p_1,\, p_1^\dagger] = 2J_z^2 - (2+\sqrt{2})(N - N_0), \tag{75}$$

.

Теперь мы можем вычислить коммутаторы лестничных операторов $\tau_\theta^\dagger$. Вычислим коммутатор $[\tau_1,\, \tau_1^\dagger]$

$$[\tau_1,\, \tau_1^\dagger] = \left[\tau_1,\, p_0^\dagger(\hat{j}+1) + 2p_1^\dagger\right] = \left[\tau_1,\, p_0^\dagger\right](\hat{j}+1) + p_0^\dagger\left[\tau_1,\, (\hat{j}+1)\right] + \left[\tau_1,\, 2p_1^\dagger\right] =$$

$$= \left[(\hat{j}+1)p_0 + 2p_1,\, p_0^\dagger\right](\hat{j}+1) - p_0^\dagger((\hat{j}+1)p_0 + 2p_1) + \left[(\hat{j}+1)p_0 + 2p_1,\, 2p_1^\dagger\right] =$$

$$= (p_0^\dagger + 4p_1^\dagger)\frac{1}{2\hat{j}+1}p_0(\hat{j}+1) + 4(\hat{j}+1)^2 - 4(N - N_0)(\hat{j}+1) -$$

$$-p_0^\dagger((\hat{j}+1)p_0 + 2p_1) + 2(p_0^\dagger J^2 - p_1^\dagger)\frac{1}{2\hat{j}+1}p_0 + 4(\hat{j}+1)(N - N_0) + 8J^2 - 4(2+\sqrt{2})(N - N_0).$$

Приводим подобные и получаем

$$= (p_0^\dagger + 4p_1^\dagger)\frac{1}{2\hat{j}+1}p_0(\hat{j}+1) + 4(\hat{j}+1)^2 -$$

$$-p_0^\dagger((\hat{j}+1)p_0 + 2p_1) + 2(p_0^\dagger J^2 - p_1^\dagger)\frac{1}{2\hat{j}+1}p_0 + 8J^2 - 4(2+\sqrt{2})(N - N_0)$$

Упрощая

данное выражение можно получить коммутационные соотношения для лестничных операторов, далее, выбирая для них операторный множитель, приводим коммутационные соотношения к каноническим.

Определим через операторы τ новые лестничные операторы, которые будут иметь канонические коммутационные соотношения

$$A^{\dagger} = \tau_1^{\dagger} \frac{1}{2\sqrt{\hat{j}+1}} \frac{1}{\sqrt{(N+1)+\hat{j}+1+1}} \frac{\sqrt{2(\hat{j}+1)+1}}{\sqrt{2(\hat{j}+1)-1}}, \tag{76}$$

$$L_{+} = \tau_{-1}^{\dagger} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\hat{j}+1}} \frac{\sqrt{2(\hat{j}+1)-1}}{\sqrt{2(\hat{j}+1)+1}}. \tag{77}$$

Так, операторы A и $A^{\dagger}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Вейля $W(1)$

$$[A,\, A^{\dagger}] = \hat{I},$$

а их самосопряженный оператор $A^{\dagger}A$ имеет те же собственные числа, что и оператор $\hat{j}$. Действие на состояние $|n,\, j\, j_z\rangle$ определяется формулой

$$A^{\dagger}A\,|n,\, j\, j_z\rangle = j\,|n,\, j\, j_z\rangle\,.$$

Через операторы $L_{\pm}$ определяются операторы L_z и L^2

$$L_z = \frac{1}{2}[L_{+},\, L_{-}],$$

$$L^2 = L_z^2 + L_z + L_{-}L_{+}.$$

Их действие на состояния определено

$$L_z\,|n,\, j\, j_z\rangle = \left(\frac{n-j}{2} - \frac{n+j}{4}\right)|n,\, j\, j_z\rangle\,,$$

$$L^2\,|n,\, j\, j_z\rangle = \frac{n+j}{4}\left(\frac{n+j}{4}+1\right)|n,\, j\, j_z\rangle\,.$$

Операторы $A^{\dagger}A$, L_z и L_2 - образуют полный коммутирующий набор и могут быть использованы для классификации состояний такой системы наравне с N_{-1}, N_0, N_1 и J^2, J_z, N.

9 Состояния пятимодой системы

Вычисления в данном разделе были проведены при помощи программы, написанной на языке $JAVA$. Исходный код программы опубликован в сети интернет.

В программе было реализовано действие произвольного бозонного оператора на Фоковское состояние заданной размерности. Фоковские состояния описываются массивом заданной длинны. Смешанные состояния представляют из себя объект класса ArrayList<> от пар состояния и множителя с реализованными для них базовыми операциями — сложением и умножением на число с последующим приведением подобных. Для смешанных состояний реализована операция нормализации по наибольшему общему делителю. Все операторы реализованы через бозонные операторы. Само поле вещественных чисел сужено до кольца корней из натуральных чисел вместе с обратными по сложению.

Такое построение позволяет найти точный вид коэфициентов, а операция нормирования приобретает тривиальный вид и сводится к делению на сумму подкоренных коэффициентов.

Ядро оператора J_z для одночастичного состояния одномерно и состоит из Фоковского состояния следующего вида

$$J_z \left|0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0\right\rangle_F = 0.$$

$$J^2 \left|0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0\right\rangle_F = 2 * 3 \left|0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0\right\rangle_F .$$

Подействуем на него лестничными операторами и разделим его коэффициенты на их наибольший общий делитель. Получаем

$$\begin{aligned}
\tau_{-2}^{\dagger}\,|0,\,0,\,1,\,0,\,0\rangle_F &\Rightarrow \quad |0,\,0,\,2,\,0,\,0\rangle_F - \sqrt{2}\,|0,\,1,\,0,\,1,\,0\rangle_F + \sqrt{2}\,|1,\,0,\,0,\,0,\,1\rangle_F \\
\tau_{-1}^{\dagger}\,|0,\,0,\,1,\,0,\,0\rangle_F &= 0 \\
\tau_{0}^{\dagger}\,|0,\,0,\,1,\,0,\,0\rangle_F &\Rightarrow \quad \sqrt{2}\,|0,\,0,\,2,\,0,\,0\rangle_F - |0,\,1,\,0,\,1,\,0\rangle_F - 2\,|1,\,0,\,0,\,0,\,1\rangle_F \\
\tau_{1}^{\dagger}\,|0,\,0,\,1,\,0,\,0\rangle_F &= 0 \\
\tau_{2}^{\dagger}\,|0,\,0,\,1,\,0,\,0\rangle_F &\Rightarrow \quad 3\sqrt{2}\,|0,\,0,\,2,\,0,\,0\rangle_F + 4\,|0,\,1,\,0,\,1,\,0\rangle_F + |1,\,0,\,0,\,0,\,1\rangle_F
\end{aligned}$$

Повторяя процесс будем получать следующие состояния

n	j	$\|\rangle$
3	0	$\sqrt(2)[0,0,3,0,0] - \sqrt{3}[0,1,1,1,0] - 2\sqrt{3}[1,0,1,0,1] + 3[1,0,0,2,0] + 3[0,2,0,0,1]$
3	2	$\sqrt{3}[0,0,3,0,0] - \sqrt(2)[0,1,1,1,0] + \sqrt(2)[1,0,1,0,1]$
3	3	$-[1,0,0,2,0] + [0,2,0,0,1]$
3	4	$6\sqrt{6}[0,0,3,0,0] + 2[0,1,1,1,0] - 16[1,0,1,0,1] - 7\sqrt{3}[1,0,0,2,0] - 7\sqrt{3}[0,2,0,0,1]$
3	6	$3\sqrt{2}[0,0,3,0,0] + 4\sqrt{3}[0,1,1,1,0] + \sqrt{3}[1,0,1,0,1] + 2[1,0,0,2,0] + 2[0,2,0,0,1]$

4 0 $$\sqrt{3}[0,0,4,0,0]-2[0,1,2,1,0]+2[1,0,2,0,1]+ \\ +2\sqrt{2}[0,2,0,2,0]-2\sqrt{2}[1,1,0,1,1]+2\sqrt{2}[2,0,0,0,2]$$

4 2 $$2\sqrt{2}[0,0,4,0,0]-\sqrt{6}[0,1,2,1,0]-2\sqrt{6}[1,0,2,0,1]+3[1,0,1,2,0]+3[0,2,1,0,1]$$

4 2 $$2\sqrt{3}[0,0,4,0,0]-3[0,1,2,1,0]+2\sqrt{2}[0,2,0,2,0]+\sqrt{2}[1,1,0,1,1]-4\sqrt{2}[2,0,0,0,2]$$

4 2 $$-3\sqrt{3}[1,0,1,2,0]+2[1,1,0,1,1]+4[0,2,0,2,0]-3\sqrt{3}[0,2,1,0,1]+ \\ +6\sqrt{2}[1,0,2,0,1]-8[2,0,0,0,2]$$

4 2 $$24\sqrt{6}[0,0,4,0,0]-36\sqrt{2}[0,1,2,1,0]-42\sqrt{2}[1,0,2,0,1]+21\sqrt{3}[1,0,1,2,0]+ \\ +21\sqrt{3}[0,2,1,0,1]+20[0,2,0,2,0]+10[1,1,0,1,1]-40[2,0,0,0,2]$$

4 4 $$-2\sqrt{3}[1,0,1,2,0]+6[1,1,0,1,1]+5[0,2,0,2,0]- \\ -2[0,2,1,0,1]-3\sqrt{2}[1,0,2,0,1]+4[2,0,0,0,2]$$

4 4 $$6[0,0,4,0,0]-2[0,1,2,1,0]+7[1,0,2,0,1]-8\sqrt{2}[0,2,0,2,0]+ \\ +3\sqrt{2}[1,1,0,1,1]+2\sqrt{2}[2,0,0,0,2]$$

4 4 $$12\sqrt{6}[0,0,4,0,0]-4\sqrt{2}[0,1,2,1,0]-7\sqrt{2}[1,0,2,0,1]-14[1,0,1,2,0]-14[0,2,1,0,1]+ \\ +3[0,2,0,2,0]+54[1,1,0,1,1]+36[2,0,0,0,2]$$

4 4 $$90[0,0,4,0,0]-30[0,1,2,1,0]+129[1,0,2,0,1]+8\sqrt{6}[1,0,1,2,0]+8\sqrt{6}[0,2,1,0,1]- \\ -140\sqrt{2}[0,2,0,2,0]+21\sqrt{2}[1,1,0,1,1]+14\sqrt{2}[2,0,0,0,2]$$

4 5 $$-[1,0,1,2,0]+[0,2,1,0,1]$$

4 6 $$6\sqrt{6}[0,0,4,0,0]9\sqrt{2}[0,1,2,1,0]-9\sqrt{2}[1,0,2,0,1]-7[1,0,1,2,0]- \\ -7[0,2,1,0,1]-4[0,2,0,2,0]-17[1,1,0,1,1]-4[2,0,0,0,2]$$

4 8 $$6\sqrt{6}[0,0,4,0,0]+24\sqrt{2}[0,1,2,1,0]+6\sqrt{2}[1,0,2,0,1]+8[1,0,1,2,0]+ \\ +8[0,2,1,0,1]+16[0,2,0,2,0]+8[1,1,0,1,1]+[2,0,0,0,2]$$

Уже для $n = 4$ наглядно видно, что благодаря лестничным операторам получаются различные представления алгебры $SU(2)$. Каждый из При этом, видно как происходит действие лестничных операторов в пространстве Фока.

9.1 Случай четного числа мод

Для построения лестничных операторов в случае четного числа мод (когда s — полуцелое) нельзя воспользоваться симметрией пространства относительно ядра J_z. Ядро J_z тривиально для подпространства нечетного общего числа частиц n.

Поэтому, для построения лестничных операторов следует рассмотреть следующие наборы операторов $\{p_k^\dagger\}_{k=\frac{1}{2}}^s$ и $\{m_k^\dagger\}_{k=\frac{1}{2}}^s$

$$\begin{array}{ll} p_{\frac{1}{2}}^\dagger = a_{\frac{1}{2}}^\dagger + a_{-\frac{1}{2}}^\dagger J_+, & p_k^\dagger = a_k^\dagger J_-^{k-\frac{1}{2}} + a_{-k} J_+^{k+\frac{1}{2}}, \\ m_{\frac{1}{2}}^\dagger = a_{\frac{1}{2}}^\dagger - a_{-\frac{1}{2}}^\dagger J_+, & m_k^\dagger = a_k^\dagger J_-^{k-\frac{1}{2}} - a_{-k} J_+^{k+\frac{1}{2}}. \end{array} \tag{78}$$

Операторы $\{p_k^\dagger\}_{k=\frac{1}{2}}^s$ и $\{m_k^\dagger\}_{k=\frac{1}{2}}^s$ являются лестничными для оператора числа частиц

$$\left[N,\, p_k^\dagger\right] = p_k^\dagger,$$

$$\left[N,\, m_k^\dagger\right] = m_k^\dagger,$$

и оператора J_z

$$\left[J_z,\, p_k^\dagger\right] = \frac{1}{2} p_k^\dagger,$$

$$\left[J_z,\, m_k^\dagger\right] = \frac{1}{2} m_k^\dagger.$$

Данные операторы образуют замкнутый набор относительно коммутации с оператором J^2, а, следовательно, для оператора J^2 можно найти лестничные операторы $\{\tau_\theta^\dagger\}_{\theta=-s}^s$, которые будут иметь следующие коммутационные соотношения с образующими алгебры $SU(2)$

$$\left[N,\, \tau_\theta^\dagger\right] = p_k^\dagger,$$

$$\left[J_z,\, \tau_\theta^\dagger\right] = \frac{1}{2} \tau_\theta^\dagger,$$

$$\left[J^2,\, \tau_\theta^\dagger\right] = \tau_\theta^\dagger \theta(\theta + 2\hat{j} + I).$$

По аналогии с нечетным числом мод можно провести исследование аннигилируемых состояний. Существуют естественные ограничения на собственные числа операторов N, J_z и J^2. Так для их общего состояния

$$|n,\, j,\, j_z\rangle$$

выполняются соотношения между их собственными числами

$$0 \leq n, \quad 0 \leq j \leq ns, \qquad 0 \leq j_z \leq j \leq ns.$$

Отсюда, можно судить, что операторы $\{\tau_\theta^\dagger\}_{\theta=\frac{1}{2}}^{s}$ являются бозонными операторами рождения / уничтожения, а операторы $\{\tau_\theta^\dagger\}_{\theta=-s}^{\frac{-1}{2}}$ — лестничными операторы алгебры $SU(2)$.

10 Выводы

Сформулированный в работе математический аппарат лестничных операторов позволяет изучать симметрии состояний самосопряженных операторов. Благодаря свойствам лестничных операторов, становится возможным вычислять нетривиальные коммутационные соотношения, находить состояния и разбивать их по собственным числам самосопряженных полиномов. Лестничные операторы найдут широкое применение в задачах на поиск спектра и канонического базиса алгебры.

Нами был подробно рассмотрен случай трех взаимодействующих мод, были построены лестничные операторы и показано их действие. Несмотря на сужение задачи до рассмотрения ядра оператора, был получен достаточно общий результат, а сам метод вычисления лестничных операторов внутри ядра представляет неподдельный интерес, ведь, имея аналогии в классической линейной алгебре, мы можем предполагать, что частное решение внутри ядра может быть распространено на все пространство при помощи определенных преобразований.

В

работе были представленны результаты компьютерного моделирования состояний пятимодовой системы, чтобы показать различные состояния с кратными собственными числами стандартной классификации, показать их геометрические отношения друг с другом и наглядно показать результаты данной работы.

Дальнейшей работой в этом направлении может быть как и исследование свойств обобщенных лестничных операторов, так и нахождение такого решения для образа алгебры $SU(2)$ при отображении Жордана-Швингера, который бы позволил сходу получать канонические коммутационные соотношения. Задача состоит в поиске коммутирующей функции общего вида. Для предложенного решения требуется найти коммутационные соотношения лестничных операторов в общем случае произвольного числа взаимодействующих мод, однако, построенный аппарат сильно упрощает эту задачу, позволяя вычислять перестановочные соотношения разложимых по лестничным операторам функций.

11 Литература и источники

[1] C. L. Williams, N. N. Pandya, B. G. Bodmann, D. J. Kouri, Coupled supersymmetry and ladder structures beyond the harmonic oscillator, Molecular Physics, DOI: 10.1080/00268976.2018.1473655

[2] S. E. Hoffmann, V. Hussin, I. Marquette, Y.-Z. Zhang, Ladder operators and coherent states for multi-step supersymmetric rational extensions of the truncated oscillator, J. Math. Phys. 60, 052105 (2019)

[3] P. Bosso, S. Das, Generalized ladder operators for the perturbed harmonic oscillator, Ann. of Phys., 396, 254-265 (2018)

[4] K. Aouda, N. Kanda, S. Naka, H. Toyoda, Ladder Operators in Repulsive Harmonic Oscillator with Application to the Schwinger Effect, Phys. Rev. D, 102, 025002 (2020)

[5] Miroshnichenko G. P., Kiselev A. D., Trifanov A. I., Gleim A. V., 2017, Algebraic approach to electro-optic modulation of light: exactly solvable multimode quantum model, *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. **34**(6), pp. 1177–1190.

[6] Gelfand I. D., Shapiro Z., Ya., Minlos R., A., 1963, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications*, The Pergamon Press, Oxford.

[7] P.A.M. Dirac, 1958, *The principles of quantum mechanics*, The Clarendon Press, Oxford.

[8] Perelomov A.M., 1986, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer, Berlin.

[9] Weyl H., Robertson H.P., 1950, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover Publications, New York.

[10] Biedenharn L. C., Louck J. D., 1984, *Angular momentum in quantum physics*, Cambridge univerisity press, Cambridge.

[11] Tushavin G.V., Trifanov A.I., Trifanova E.S., Shipitsyn I.A.. (2019). Structure of invariant subspaces of the rotation group image under the Jordan mapping. 216-220. 10.1109/DD46733.2019.9016524.

[12] J. Capmany and C. Fernández-Pousa, "Quantum modelling of electro-optic modulators," Laser Photon. Rev. 5, 750–772 (2011)

[13] J. Capmany and C. R. Fernández-Pousa, "Quantum model for electro-optical phase modulation," J. Opt. Soc. Am. B 27, A119–A129 (2010)

[14] A. R. Edmonds Angular momentum in quantum mechanics. Princeton, New Jersey, Princeton university press. 1957.

[15] D, J, Thouless, The quantum mechanics of many-body systems (1961).

[16] Parlett, B.N. The Symmetric Eigenvalue Problem. Prentice Hall, Inc. (1980)

[17] Люиселл У. Излучение и шумы в квантовой электронике 1971, 403 с.

[18] Dirac P. A. M., Ann. Inst. H. Poincare, 11, 15 (1949) Вторичное квантование.

[19] Jordan P., Z. Physik, 94, 531 (1935) Взаимосвязь симметричных и линейных групп с задачей многих тел.

[20] Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. (London), A183, 284 (1945). Унитарные представления группы Лоренца.

[21] Боголюбов Н. Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В., Новый метод в теории сверхпроводимости (1958).

[22] Кириллов А. А., Элементы теории представлений (1978).

Исходные коды программы доступны для скачивания по ссылке https://drive.google.com/file/d/1KVxBU9l33Ffm2fErJASvQtHPwSG3vfKA/view?usp=sharing