

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА/GRADUATION THESIS

Моделирование барабана

Автор/ Author

Шипицын Иван Антонович

Направленность (профиль) образовательной программы/Major

Математическое моделирование 2019

Квалификация/ Degree level

Магистр

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor

Попов Игорь Юрьевич, профессор, доктор физико-математических наук, Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники, профессор (квалификационная категория "ведущий профессор")

Группа/Group

R42952

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster

факультет систем управления и робототехники

Направление подготовки/ Subject area

01.04.02 Прикладная математика и информатика

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Шипицын Иван Антонович	
01.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Шипицын Иван
Антонович

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Попов Игорь Юрьевич	
01.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Попов Игорь
Юрьевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ /
OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS**

Обучающийся / Student Шипицын Иван Антонович

Группа/Group R42952

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster факультет систем управления и робототехники

Квалификация/ Degree level Магистр

Направление подготовки/ Subject area 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) образовательной программы/Major Математическое моделирование 2019

Специализация/ Specialization Математическое моделирование сложных систем

Тема ВКР/ Thesis topic Моделирование барабана

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Попов Игорь Юрьевич, профессор, доктор физико-математических наук, Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники, профессор (квалификационная категория "ведущий профессор")

Срок сдачи студентом законченной работы до / Deadline for submission of complete thesis 20.05.2021

Техническое задание и исходные данные к работе/ Requirements and premise for the thesis

Смоделировать динамику мембраны барабана в зависимости от характера удара барабанной палочкой

Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов)/ Content of the thesis (list of key issues)

- 1) Построение модели взаимодействия барабанной палочки и мембраны барабана
- 2) Численное моделирование динамики мембраны барабана

Перечень графического материала (с указанием обязательного материала) / List of graphic materials (with a list of required material)

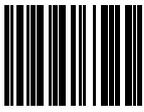
Исходные материалы и пособия / Source materials and publications

- 1) Bilbao, Stefan. (2012). Time domain simulation and sound synthesis for the snare drum. The Journal of the Acoustical Society of America. 131. 914-25. 10.1121/1.3651240.
- 2) Jin, Congrui & Davoodabadi, Ali & Li, Jianlin & Wang, Yanli & Singler, Timothy. (2017). Spherical indentation of a freestanding circular membrane revisited: Analytical solutions and experiments. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 100. 10.1016/j.jmps.2017.01.005.

Дата выдачи задания/ Objectives issued on 05.05.2021

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

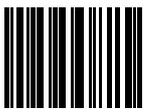
Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Попов Игорь Юрьевич	
05.05.2021	

(эл. подпись)

Попов Игорь
Юрьевич

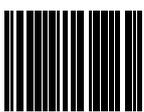
Задание принял к
исполнению/ Objectives
assumed by

Документ подписан	
Шипицын Иван Антонович	
06.05.2021	

(эл. подпись)

Шипицын Иван
Антонович

Руководитель ОП/ Head
of educational program

Документ подписан	
Попов Игорь Юрьевич	
02.06.2021	

(эл. подпись)

Попов Игорь
Юрьевич

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

АННОТАЦИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ /
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS

Обучающийся/ Student

Шипицын Иван Антонович

Наименование темы ВКР / Title of the thesis

Моделирование барабана

Наименование организации, где выполнена ВКР/ Name of organization

Университет ИТМО

ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ/
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS

1. Цель исследования / Research objective

Моделирование барабана

2. Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks

Разработка модели взаимодействия барабанной мембраны и барабанной палочки.
Численное моделирование динамики барабанной мембраны при взаимодействии с барабанной палочкой.

3. Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/conclusions

Предложена модель взаимодействия барабанной мембраны и барабанной палочки.
Численно смоделирована динамика мембраны барабана при взаимодействии с барабанной палочкой, проведены сравнительные характеристики.

4. Наличие публикаций по теме выпускной работы/ Have you produced any publications on the topic of the thesis

5. Наличие выступлений на конференциях по теме выпускной работы/ Have you produced any conference reports on the topic of the thesis

6. Полученные гранты, при выполнении работы/ Grants received while working on the thesis

7. Дополнительные сведения/ Additional information

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Шипицын Иван	

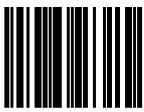
Антонович	
01.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Шипицын Иван
Антонович

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Попов Игорь Юрьевич	
01.06.2021	

(эл. подпись/ signature)

Попов Игорь
Юрьевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Оглавление

1. Введение	8
2. Строение барабана и особенности игры.....	11
2.1. Барабанная мембрана	11
2.1.1. Идеальная круглая мембрана	12
2.2. Барабанный кожух	13
2.3. Барабанная палочка.....	16
3. Анализ экспериментальных данных	19
4. Модель взаимодействия	22
5. Колебания мембраны	25
6. Свободные колебания идеальной круглой мембраны.....	30
7. Вынужденные колебания идеальной круглой мембраны.....	40
7.1. Параметры мембраны	51
7.2. Параметры палочки.....	51
7.3. Время взаимодействия.....	52
8. Результаты численного моделирования	53
9. Заключение	80
10. Список литературы	82

1. Введение

Ударные инструменты являются одними из древнейших музыкальных инструментов в мире. Они также являются одними из самых распространенных: Музыкальный словарь Гроува [1] включает себя более 1500 вхождений для барабанов. Кроме того, все новые ударные инструменты продолжают создаваться и разрабатываться и по сей день, как акустические, так и электронные.

Барабаны – технически классифицируемые в семействе перкуSSIONных инструментов как мембранофон – играли большую роль в развитии почти каждой музыкальной культуры. Самые ранние барабаны представляли собой незамысловатые конструкции из камня или дерева, водруженные над дырами в земле. Сегодня же, самым привычным для нас барабаном является натянутые на некоторый ограниченный объем с воздухом кожа животного или синтетический материал. Предполагается, что такой современный вид барабана появился примерно 6000 лет до нашей эры.

Задача моделирования барабанов вызывает живой интерес как с практической, так и с фундаментальной стороны. Многие авторы занимались изучением характера поведения мембраны барабана, а также моделированием полноценных барабанов. Рэйли в 1877 году установил [2] природу фундаментальных нот литавра, основываясь на модели идеальной круглой мембраны. Флетчером в третьей четверти двадцатого века активно изучались бас-барабаны [3]. В 1984 году Кристиан, Дэвис и Андерсон проанализировали [4] влияние нагрузки со стороны воздуха на мембрану в литаврах. На протяжении последней четверти прошлого столетия Россинг произвел [5-8] анализ и моделирование многочисленных перкуSSIONных инструментов со всего мира. Им были получены и описаны множественные краткие

характеристики различных инструментов. Также в 1999 году Раути была предложена [9] и реализована модель литавров. В частности, им были смоделированы малые барабаны с использованием модели идеально-круглой мембраны. В 2013 году Бильбао синтезировал [10] звук малого барабана, используя 3D-модель инструмента. Для описания мембраны была выбрана модель идеальной круглой мембраны, возбуждаемая точечной внешней силой.

Несмотря на обширное количество исследований и предложенных моделей, малое внимание в них уделялось взаимодействию барабана с объектом, возбуждающим колебания. По аналогии с моделями, предложенными для изучения взаимодействия молоточков со струнами фортепиано [12], некоторыми исследователями [11-14] была предложена модель груз-пружина для описания взаимодействия палочки и мембраны. В Джин [15, 16] и Бэйгли [17] изучали поведение мембраны при контакте со сферическим и цилиндрическим грузами.

Однако зачастую в предложенных моделях удар описывается как действие точечной внешней силы. И хоть такая модель очень удобна и значительно упрощает решение задачи, а также процесс вычислений, она предназначена лишь для одиночных сильных и быстрых ударов, а также опускает такие параметры, как, например, размер наконечника палочки. Ударные инструменты же позволяют получать разнообразные тембры при применении составных жестов, полноценные модели для описания которых еще не были предложены.

В настоящей работе на основе существующих экспериментальных данных предлагаются две модели для описания взаимодействия барабанной палочки с мембраной барабана. На основе предложенных моделей проводится численное моделирование динамики барабанной мембраны и анализ изменений в динамике в зависимости от таких параметров, как тип, сила, место удара.

Результаты настоящей работы были апробированы на X Конференции Молодых Ученых. На конференции был представлен доклад, а также были выпущены тезисы.

2. Строение барабана и особенности игры

2.1. Барабанная мембрана

Основным источником возбуждения звуковых волн в ударных инструментах является мембрана. По этой причине, вариации различных физических параметров барабанной мембраны приводит к получению самого разнообразного спектра звучаний. Так, многие африканские барабаны (например, джембе) используют козлиную кожу в качестве мембраны, натянутую на деревянное основание с помощью веревки в специальных узорах. Такие барабаны в зависимости от предназначения, могут быть орнаментированы различными металлическими кольцами, пластинами или погремушками по краям мембраны.



Рис. 1. Джембе

Большинство же барабанов в современной западноевропейской культуре в качестве мембраны, начиная с последней трети двадцатого века [24] используется Майлар – специальная пленка, изготавливаемая на основе полиэтилентерефталата. Данный материал в отличие от его натуральных аналогов является однородным по своей структуре, а также у него отсутствует чувствительность к влажности, что позволяет с большей простотой настраивать звучание барабанных мембран из него изготовленных. Кроме

того, данный материал является очень тонким: так, стандарт толщины для майларовых барабанных мембран – всего 0.19 мм.

В физико-математических моделях, как для музыкальных инструментов, так и для акустических систем, для представления мембран наиболее распространена модель тонкой идеальной круглой мембраны.

2.1.1. Идеальная круглая мембрана

Идеальная круглая мембрана – модель мембраны, которая характеризуется тремя параметрами: диаметром, натяжением и плотностью материала мембраны. Модель идеальной круглой пренебрегает такими явлениями, как неоднородность материала мембраны, сопротивление растяжениям. Зачастую предполагается, что идеальная круглая мембрана является жестко закрепленной по краям.

Идеальная круглая мембрана, закрепленная по краям, имеет характерные колебания, описываемые суперпозицией колебательных мод. Такие моды описываются парой значений (n, m) , где число n задает количество нодальных диаметров, а m – нодальных окружностей. На таких нодальных линиях смещение мембраны является минимальным. На рисунке 2 представлены первые 12 колебательных мод идеальной круглой мембраны.

Известно, что частоты нормальных колебаний идеальной круглой мембраны задаются формулой

$$f_{mn} = \frac{ck_{mn}}{2\pi} = \frac{j_{mn}}{2\pi a} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (1)$$

где j_{mn} – m -й ноль функции Бесселя первого рода $J_n(kr)$, k – волновое число, T – натяжение мембраны, а ρ – поверхностная плотность мембраны. В силу того, что функции Бесселя не являются периодическими функциями, т.е.

значения ее нулей не имеют некоторую фундаментальную частоту в качестве множителя, модальные частоты идеально круглой мембраны не являются гармонически созвучными.

В настоящей работе для моделирования мембраны барабана будет использоваться модель идеальной круглой мембраны.

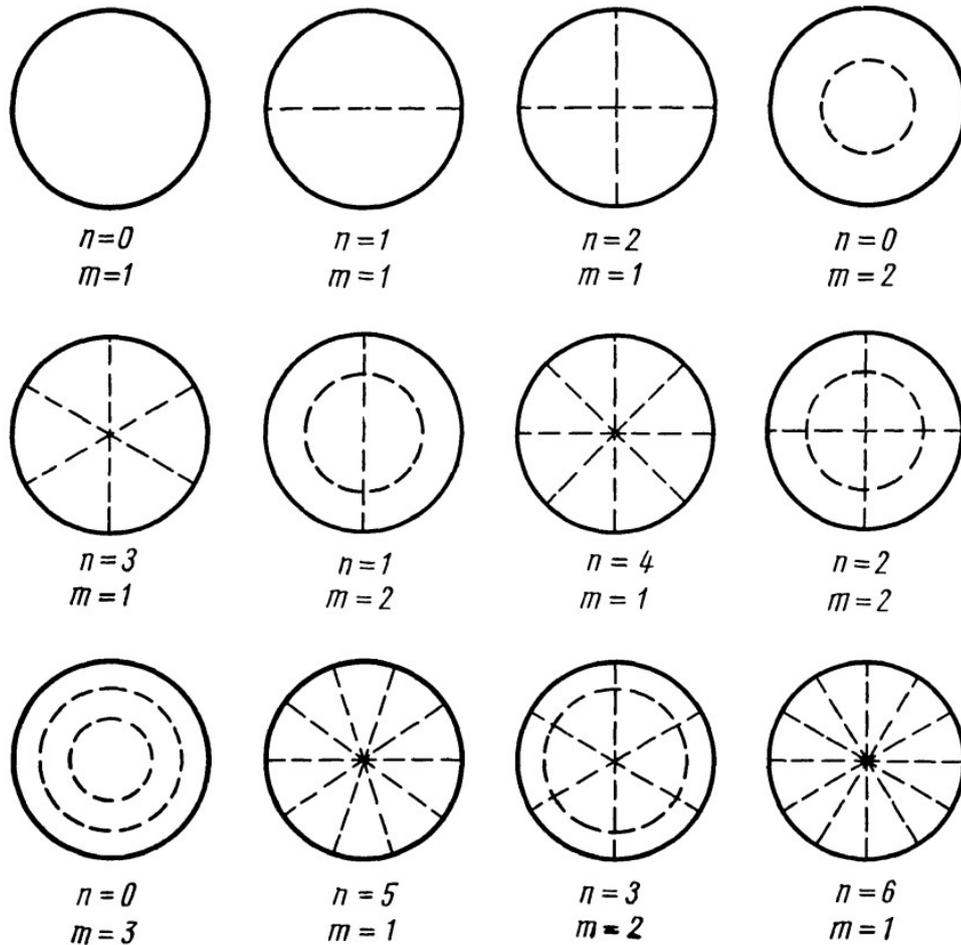


Рис. 2. Колебательные моды идеальной круглой мембраны

2.2. Барабанный кожух

Барабанный кожух является неотъемлемой частью практически всех существующих барабанов. Размер, форма, материал и наполнение кожуха могут радикально менять характер результирующего тембра барабана.

В западноевропейской культуре одной из самых распространенных форм барабанного кожуха является цилиндр, обтянутый с одной стороны мембраной. В таких барабанах, как том-том или бас-барабан, такой цилиндр ограничен с двух сторон барабанными мембранами. Малые или рабочие барабаны имеют натянутые по низу поверх второй мембраны специальные проволоки и пружинки, придающие этому инструменту особый яркий шипящий звук.

Подобные конфигурации производят усложненные спектральные формы излучаемого звука в силу того, что две барабанные мембраны могут колебаться как в одной фазе друг с другом, так и в противофазах. Подобное поведение может результировать в «расщеплении» фундаментальных тонов [7].



Рис. 3. Малый барабан Ludwig

Другой распространенной формой является котлообразная чаша – такую форму принимают литавры. Несмотря на негармоничность мод колебаний идеальной мембраны, аккуратно настроенные литавры позволяют извлекать ярковыраженные фундаментальные ноты. В частности, известно [2], что фундаментальный тон литавра исходит от моды (1, 1), а также обертона порядка чистой пятой, большой седьмой и октавы над основным тоном исходят от мод (2, 1), (3, 1) и (1, 2) соответственно. Более того, отношения частот между модами (1, 1), (3, 1), (1, 2) в литаврах имеет вид 1 к 1.5 к 2, а

моды (4, 1) и (5, 1) – отношения 2.44 и 2.90 к фундаментальной моде (1, 1) соответственно.



Рис. 4. Литавры

Кожух, как и мембрана барабана, имеет собственные моды колебания. Несмотря на то, что по величине эти колебания малы по сравнению со смещениями колеблющейся мембраны, сильная связь между кожухом и мембраной может привести к значительному вкладу мод кожуха в результирующее поведение мембраны.



Рис. 5. Рототом

В настоящей работе вкладом кожуха на динамику мембраны пренебрегается, как для упрощения вычислений, так и в силу того, что характеристики кожуха не влияют на характер взаимодействия ударным инструментом с мембраной барабана. Такая модель может соответствовать рототому – барабану, являющемуся мембраной на металлическом обруче.

2.3. Барабанная палочка

Для воспроизведения звука, по поверхности барабана производится удар. Существуют различные семейства барабанов, игра на которых подразумевает использование рук – джембе, дарбука, индийские таблы. На некоторых барабанах, таких как литавры, исполнитель чаще играет с использованием специальных колотушек или маллетов, сделанных из дерева или тростника со специальным наконечником, обычно деревянным, зачастую обтянутым войлоком, пробкой или кожей. В таких стилях музыки, как джаз и блюз, широко распространена игра специальными барабанными щеточками. Однако в современном мире наиболее распространена игра барабанными палочками.

Типичная барабанная палочка сделана из дерева - обычно дуба, гикори (светлого ореха) или клена, реже могут использоваться металл, алюминий и углеродное волокно. Состоит барабанная палочка из четырех частей:

- комеля – закругленного основания со слегка увеличенным весом, тела,
- плеча – сужающейся области палочки, и
- наконечника.

Наконечник может быть изготовлен как из того же материала, что и сама палочка, так и из нейлона или ацетала.

Наконечники барабанных палочек изготавливаются различных форм и размеров. По форме, наконечники можно классифицировать по трем основным группам:

- Цилиндрические
- Круглые
- Овальные
- Остроконечные

Различные формы наконечников позволяют исполнителю менять характер воспроизводимого инструментом звука. Так, овальные головки позволяют менять звучание изменяя прямо во время игры площадь поверхности соприкосновения палочки с поверхностью барабанной мембраны за счет регулирования угла наклона палочки к мембране. Различные формы также помогают исполнителю лучше контролировать отскок палочки от поверхности инструмента.



Рис. 6. Различные виды наконечников барабанных палочек

Материал изготовления, линейные размеры и вес барабанной палочки оказывают непосредственное влияние на два параметра: сила удара и время контакта с мембраной барабана. К сожалению, в настоящий момент не было произведено выделенных экспериментальных исследований по зависимости этих или иных параметров от характеристик используемой барабанной палочки.

В настоящей работе в целях упрощения вычислений предполагается, что удар по мембране барабана будет наноситься барабанной палочкой с наконечником идеальной круглой формы. Такие параметры палочки, как материал палочки, материал наконечника, вес, размер и длина не будут непосредственно вкладываться в величину силы удара или взаимодействия палочки с мембраной барабана.

3. Анализ экспериментальных данных

Для построения модели, описывающей процесс взаимодействия барабанной палочки с мембраной барабана, обратимся к экспериментальным данным.

В эксперименте по описанию взаимодействия барабанщика, барабанной палочки и мембраны барабана [18] производились измерения силы удара и времени взаимодействия палочки с мембраной барабана при исполнении одиночного удара.

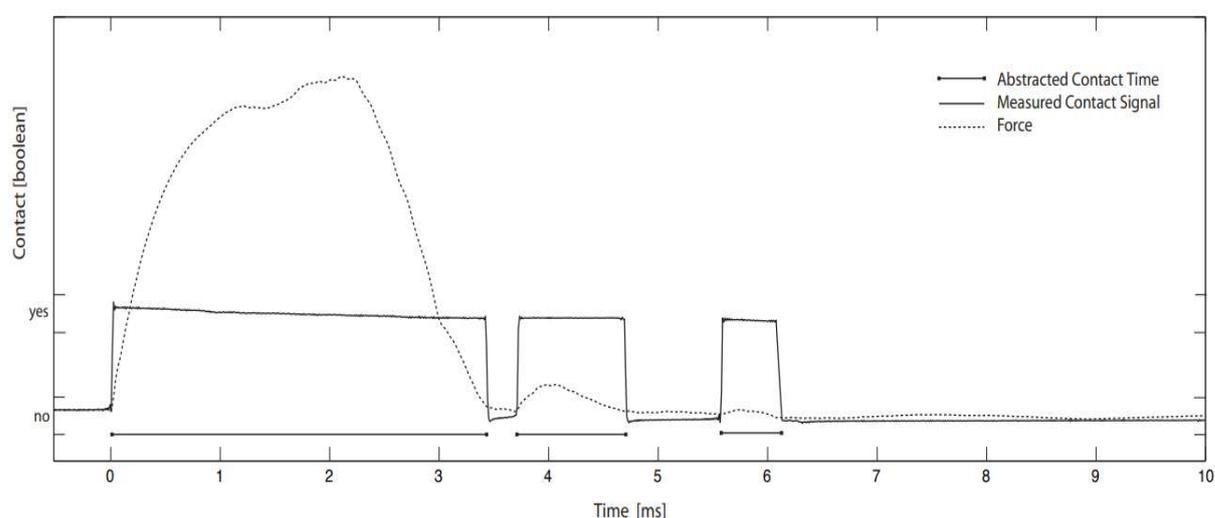


Рис. 7. Зависимость силы давления палочки на поверхность мембраны от времени контакта в центре мембраны с низким натяжением [18].

Из результатов, представленных на рисунке 7, можно видеть, что сила, оказываемая барабанной палочкой, имеет промежуток нарастания (0-1 мс на графике), величиной порядка 0.75 мс, а также промежуток спада (2-4 мс на графике), величиной также порядка 0.75 мс. Величина силы давления палочки на мембраны принимает максимальные значения на протяжении примерно 3.5 мс.

Также в рамках эксперимента удары были исполнены в трех положениях, отличных от центра:

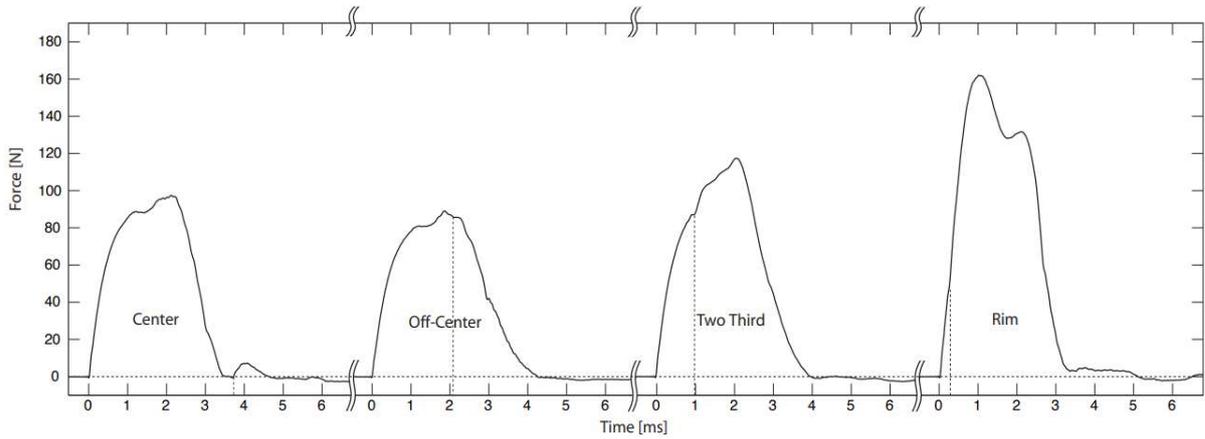


Рис. 8. Зависимость силы давления палочки на поверхность мембраны от времени контакта для четырех различных областей при низком натяжении.

Из результатов, представленных на рисунке 4, можно видеть, что все три временных параметра (время нарастания, время максимальной величины, время спада) уменьшаются с тем, как область удара удаляется от центра мембраны. Это связано с тем, что в настоящих барабанных мембранах величина натяжения меняется в большую сторону при приближении к краю мембраны. Этой же особенностью в исследовании объясняется увеличение силы удара в амплитуде при отдалении от центра.

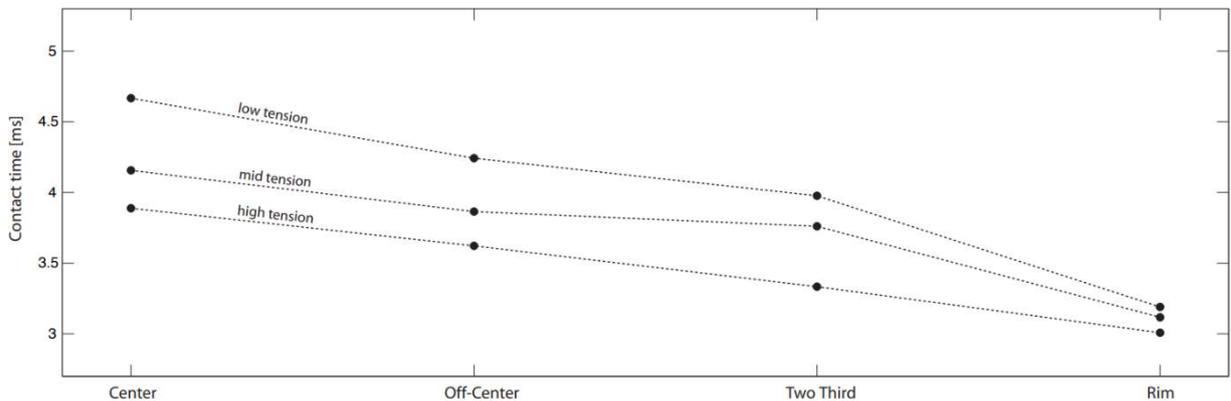


Рис. 9. Сравнение времени контакта палочки с мембраной при разных величинах натяжения для четырех различных областей.

Изучая зависимость времени взаимодействия от натяжения мембраны, исследование обнаружило, что с увеличением натяжения мембраны, продолжительность контакта с палочкой уменьшалась. При этом на рисунке 6

можно видеть, что время взаимодействия палочки с мембраной уменьшается линейно по мере отдаления от центра мембраны.

Исследование также включало в себя использование различных барабанных палочек. В результате было обнаружено, что использование палочки того же материала с большим диаметром наконечника той же формы увеличивает амплитуду силы удара, и в следствии амплитуду результирующего звука. Изменений во в

Даль [19] в своем исследовании характера звука том-тома в зависимости от силы удара, а также амплитуды палочки, установила зависимость времени контакта палочки с мембраной барабана от силы наносимого удара (Результаты представлены на рисунке 10).

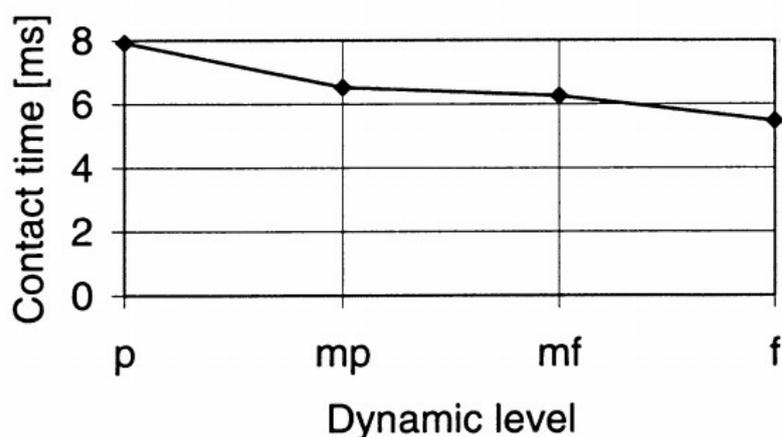


Рис. 10. Зависимость времени контакта палочки и мембраны от силы удара (p – piano – слабый удар, f – forte – сильный удар).

Оба исследования заключили, что при увеличении силы удара, наблюдаются следующие явления:

- Увеличение амплитуды результирующего звука барабана
- Усиление интенсивности колебательных мод, возбуждаемых при более слабом ударе в ту же область
- Уменьшение времени взаимодействия палочки и мембраны

4. Модель взаимодействия

Опишем теперь модель, представляющую взаимодействие мембраны и барабанной палочки.

Пусть идеальная круглая мембрана вступает в контакт с твердым телом в форме полусферы, оказывающим на нее некоторое давление P_0 , в произвольной точке мембраны. Будем считать, что область контакта мембраны и твердого тела представляет собой окружность радиуса c такую, что $c < R$.

Выберем теперь оси координат так, чтобы ось абсцисс лежала на прямой, соединяющей точки центра окружностей мембраны и области соприкосновения Γ_i , и положим центр координат O в точке центра мембраны.

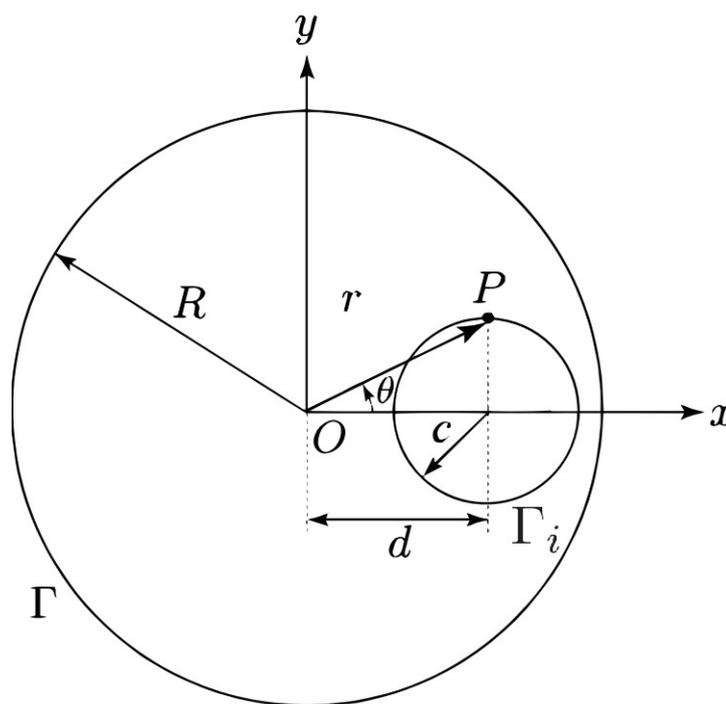


Рис. 11. Схематическое изображение идеально-круглой мембраны в контакте со сферическим твердым телом

В соответствии с результатами, описанными в предыдущей главе, взаимодействие палочки и мембраны можно представить следующими двумя моделями.

Первая модель представляет взаимодействие палочки и мембраны как ступенчатую функцию.

В начальный момент времени – момент контакта палочки с мембраной, – некоторой области мембраны передается некоторый импульс P_0 . На протяжении некоторого времени T_1 (порядка 1 мс), мембрана совершает свободные колебания. По прошествии времени T_1 , на мембрану в области контакта Γ_i начинает действовать постоянная внешняя сила

$$F(r, \theta) = P_0 \quad (2)$$

и продолжает непрерывно действовать до окончания контакта палочки и мембраны. Будем называть такую модель «ступенчатой».

Такая модель подходит для описания ударов, в которых исполнитель оказывает дополнительное давление на палочку, тем самым продлевая время контакта палочки с мембраной барабана. Такая модель требует меньше вычислений в силу отсутствия зависимости величины внешней силы от времени.

Вторая модель представляет взаимодействие палочки и мембраны с помощью тригонометрической функции от времени. В начальный момент времени – момент контакта палочки с мембраной, – некоторой области мембраны передается некоторый импульс P_0 . В этот же момент на мембрану начинает действовать внешняя сила, выразить которую можно как

$$F(r, \theta, t) = P_0 \sin(qt) \quad (3)$$

где

$$q = \frac{\pi}{T} \quad (4)$$

где T – время взаимодействия палочки и мембраны. Выбор величины T производится на основе величины натяжения мембраны, амплитуды и силы удара, характеристик палочки, таких как вес, материал наконечника, а также отдаления от центра. Для каждого набора таких параметров, данная величина может быть экспериментально определена. Например [18], для деревянной палочки весом 53 г, с деревянным наконечником диаметра 8 мм, при натяжении мембраны 2500 Н/м, время взаимодействия барабанной палочки и мембраны при ударе в центральную область будет равно 5 мс, в то время как при ударе в крайнюю область – 4 мс. Для удобства же будем считать, что при рассмотрении идеальной мембраны, время взаимодействия между центральной и краевой областью одинаково. Будем называть такую модель «тригонометрической».

Преимуществом такой модели является более равномерное распределение воздействия внешней силы по времени, приближенного к соответствующим экспериментальным данным. В то же время такая модель непригодна для моделирования более сложных жестов, во время которых исполнитель может увеличивать продолжительность контакта палочки с мембраной. Кроме того, данный подход увеличивает количество вычислений.

5. Колебания мембраны

Мембраной в математической физике называется не оказывающая сопротивления сдвигам и изгибам тонкая, плоская пленка.

Пусть мембрана натянута на некоторый плоский контур Γ и совершает колебания. Рассмотрим такие колебания мембраны, смещение при которых будет перпендикулярным к плоскости этой мембраны – поперечные колебания.

Положим, что ds - малый элемент на дуге выбранного контура, проходящий через некоторую точку $M(x, y)$ выбранной на поверхности рассматриваемой мембраны. На такой элемент действует натяжение, положим Tds . При этом вектор натяжения T будет лежать, в результате отсутствия сопротивления сдвигам и сгибам, в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны, а также будет перпендикулярным к выбранному элементу. В силу тех же причин, величина вектора натяжения T не зависит от направления элемента поверхности ds , что означает, что вектор $T = T(x, y, z, t)$ будет являться функцией лишь от x, y, t

Рассмотрим малые колебания такой мембраны с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$. Пусть функция $u = u(x, y, t)$ определяет отклонение точек мембраны от плоскости (x, y) в момент времени t . Рассмотрим нормаль N к поверхности мембраны с набором проекций, образующих острый угол с поверхностью u :

$$\left\{ -\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1 \right\}$$

Направляющие косинусы для такой нормали задаются формулами

$$\cos \alpha = -\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \quad \cos \beta = -\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$$

Рассмотрим проекцию $T_h(x, y, z, t)$ вектора натяжения на плоскость (x, y) . Заметим, что при произвольной ориентации элементарной дуги ds угол γ' , образованный между вектором натяжения T и плоскостью (x, y) не будет превосходить по величине угол γ между осью z и нормалью к поверхности мембраны в выбранной точке. Отсюда следует, что

$$\cos \psi' \geq \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \quad (10)$$

В силу малости рассматриваемых колебаний будем пренебрегать квадратами производных первого порядка функции u :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cong 1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cong 1 \quad (11)$$

Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cong 1 \quad (12)$$

Но тогда

$$\cos \psi' \cong 1, \quad (13)$$

и выражение для проекции вектора натяжения

$$T_h(x, y, z, t) = T \cos \psi' \cong T(x, y, z, t), \quad (14)$$

т.е. величина проекции вектора натяжения в любой момент времени равна его абсолютной величине. Вертикальная составляющая вектора натяжения при этом будет равна

$$T_u = T \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (15)$$

Выберем теперь на поверхности рассматриваемой мембраны такой элемент площади, что его проекция на плоскость (x, y) будет представлять собой прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат.

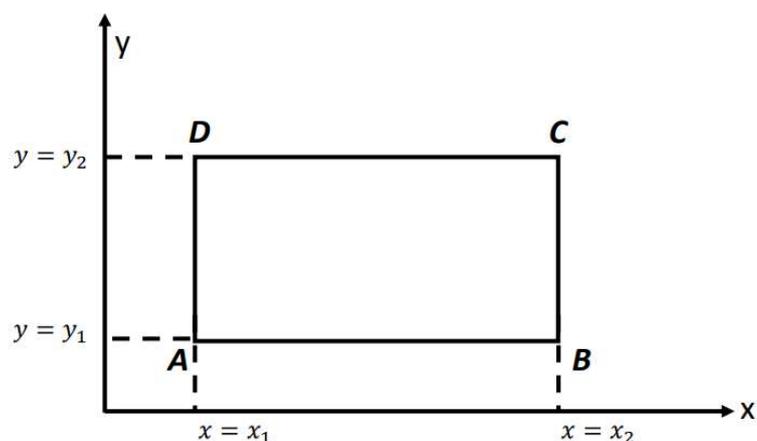


Рис. 12. Проекция на плоскость (x, y)

На такой элемент поверхности будет действовать сила натяжения

$$T^* = \oint_{ABCD} T ds \quad (16)$$

Так как проекция T^* вдоль осей x, y не имеет перемещения, и потому для соответствующих интегралов получим

$$\begin{aligned} T_x^* &= \int_B^C T(x_2, y, t) dy - \int_A^D T(x_1, y, t) dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\} dy = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
T_y^* &= \int_A^B T(x, y_2, t) dy - \int_C^D T(x, y_1, t) dy = \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\} dy = 0
\end{aligned}
\tag{18}$$

Тогда применяя теорему о среднем вкупе с фактом, что прямоугольник ABCD является произвольным

$$\left. \begin{aligned}
T(x, y_1, t) &= T(x, y_2, t) \\
T(x_1, y, t) &= T(x_2, y, t)
\end{aligned} \right\}
\tag{19}$$

Таким образом мы получили, что величина натяжения T не зависит от (x, y) .

Вычислим теперь площадь малого элемента мембрана в выбранный момент времени:

$$\iint \frac{dx dy}{\cos \psi} = \iint \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy \cong \iint dx dy
\tag{20}$$

Полученный результата означает, что в процессе колебаний мембраны не происходит растяжений, т.е. изменениями площади поверхности мембраны можно пренебречь. Но тогда по закону Гуку можно утверждать, что величина натяжения T не зависит от времени. Иными словами, величина натяжения T является для рассматриваемой мембраны постоянной.

$$T(x, y, z, t) = T_0 = const .
\tag{21}$$

Получим теперь уравнение колебаний такой мембраны. Для этого будем использовать теорему о приращении количества движения.

Пусть S_1 - проекция некоторого произвольного участка мембраны на плоскость (x, y) , а C_1 - граница этого участка. Приравняем количественное изменение движения импульса вертикальных составляющих внешних сил, плотность которых равна $F(x, y_1, t)$, и сил натяжения для получения уравнения колебаний мембраны:

$$\begin{aligned} \iint_S [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] \rho(x, y) dx dy = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{C_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n} ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} F dx dy dt \end{aligned} \quad (22)$$

Потребуем, чтобы функция $u = u(x, y, t)$ имела непрерывные вторые производные. Тогда применяя теорему Остроградского [21] преобразуем контурный интеграл в поверхностный:

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{S_1} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy \quad (23)$$

Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} [\rho(x, y) u_{tt} - T_0 (u_{xx} + u_{yy}) - F(x, y, t)] dx dy dt = 0 \quad (24)$$

Для вычисления этого интеграла снова воспользуемся теоремой о среднем. Учитывая, что выбор поверхности интегрирования S_1 и временного отрезка (t_1, t_2) , можно сказать, что выражение в квадратных скобках тождественно нулю. Тогда уравнение колебаний мембраны в дифференциальной форме принимает вид

$$\rho(x, y) u_{tt} = T_0 (u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t) \quad (25)$$

Полагая, что мембрана является однородной, т.е. $\rho(x, y) = \text{const} = \rho$, получим

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + F(x, y, t) \quad (26)$$

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho} > 0 \quad (27)$$

6. Свободные колебания идеальной круглой мембраны

Рассмотрим полученное ранее уравнение колебаний мембраны в дифференциальном представлении

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + F(x, y, t) \quad (28)$$

Перепишем уравнение с использованием оператора Лапласа

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} = \Delta u + F(x, y, t) \quad (29)$$

Будем полагать, что плотность внешних сил $F(x, y, t)$ равна нулю, а также для мембраны заданы некоторые начальные условия

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, 0) &= f_1(r, \theta) \\ u_t(r, \theta, 0) &= f_2(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

В настоящей задаче рассматриваемая мембрана является ограниченной, а также жестко закрепленной по краям барабанного кожуха, потому на уравнение (29) наложим соответствующее граничное условие:

$$u(r_0, \theta, t) = 0 \quad (31)$$

Таким образом, мы получили уравнение о свободных колебаниях круглой мембраны. Для удобства будем решать его в полярных координатах (r, θ) . Для этого воспользуемся тем, что оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (32)$$

Тогда уравнение (29) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} \quad (33)$$

Уравнение (31) является линейным и однородным. В силу этого, его решение представимо в виде сумм частных решений.

Для решения уравнения (31) воспользуемся методом разделения переменных: рассмотрим вспомогательную задачу о нахождении решения уравнения (31), где функция $u(r, \theta, t)$ выражается при помощи произведения функции только от переменных r, θ и функции только от переменного времени t :

$$u(r, \theta, t) = v(r, \theta)T(t) \quad (34)$$

Граничное условие в этом случае принимает вид

$$u(R, \theta, t) = v(R, \theta)T(t) = 0 \quad (35)$$

Равенство (33) накладывает дополнительное условие на функцию $v(r, \theta)$:

$$v(R, \theta) = 0 \quad (36)$$

В противном случае, $T(t) = 0$, и $u(r, \theta, t) = 0$, соответственно, что противоречит начальным условиям (30).

Подставим такую функцию в исходное уравнение (33):

$$T(t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} \right) + T(t) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta)}{\partial \theta^2} = v(r, \theta) \frac{1}{a^2} \frac{\partial T^2(t)}{\partial t^2} \quad (37)$$

Разделим в полученном уравнении переменные:

$$\frac{T^2(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta)}{\partial \theta^2}}{v(r, \theta)} = const = -\lambda, \quad \lambda > 0 \quad (38)$$

Данные равенства дают следующие уравнения:

$$T'''(t) + a^2 \lambda T = 0, \quad (39)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta)}{\partial \theta^2} + \lambda v(r, \theta) = 0 \quad (40)$$

Константа λ в уравнении (32) выбрана со знаком минус потому, что при любом ее значении большем или равном нулю, уравнение (40) имеет только тривиальное решение [23], что противоречит начальным условиям (30).

Уравнение (39) является стандартным, и имеет решение

$$T = C_1 \cos(a\lambda T) + C_2 \sin(a\lambda T) \quad (41)$$

Так как $v(r, \theta)$ необходимо являться функцией однозначной и дифференцируемой, то в силу цикличности переменного θ , от функции $v(r, \theta)$ необходимо потребовать 2π -периодичность. Таким образом, уравнение (34) имеет следующий набор налагаемых на нее условий:

$$v(r, \theta) = 0 \quad (42)$$

$$v(r, \theta) = v(r, \theta + 2\pi) \quad (43)$$

$$v(0, \theta) < \infty \quad (44)$$

Для решения этой задачи, снова воспользуемся методом разделения переменных. Тогда

$$v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (45)$$

Подставляя такую функцию в уравнение (34), получим

$$r\Theta(\theta) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \Theta''(\theta)R(r) + \lambda r^2 = 0 \quad (46)$$

Разделим получившееся уравнение на $R(r)\Theta(\theta)$, и рассмотрим соответствующие уравнения для каждой из функций:

$$\Theta'' + \mu^2 \Theta = 0 \quad (47)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (48)$$

Уравнения (42-44) принимают следующий вид:

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi); \quad \Theta'(\theta) = \Theta'(\theta + 2\pi); \quad (49)$$

$$R(r_0) = 0 \quad (50)$$

Рассмотрим уравнение (47). Оно имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие условия периодичности (49) только тогда, когда коэффициент μ^2 является целым числом - n^2 . В таком случае, решения принимают вид

$$\Theta(\theta) = D_{1n} \cos(n\theta) + D_{2n} \sin(n\theta) \quad (51)$$

Рассмотрим теперь уравнение (48). Заметим, что точка $r = 0$ является для данного уравнения особой. Однако, для особых точек достаточно [20] наложить требование ограниченности как граничное условие

$$|R(0)| < \infty \quad (52)$$

Решим задачу о собственных значениях для функции $R(r)$. Введем новую переменную x :

$$x = \sqrt{\lambda} r \quad (53)$$

Также обозначим исходную функцию от новой переменной функцией $y(x)$:

$$R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = y(x) \quad (54)$$

Подставляя данные замены в уравнение (48) получим уравнение цилиндрических функций относительно функции $y(x)$ порядка n :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (55)$$

Граничные условия, преобразованные для функции $y(x)$, принимают вид

$$y(x_0) = 0, \quad x_0 = \sqrt{\lambda} r_0 \quad (56)$$

$$|y(0)| < \infty \quad (58)$$

Уравнение цилиндрических функций имеет общее решение [22] вида

$$y(x) = d_1 J_n(x) + d_2 N_n(x) \quad (57)$$

Здесь $J_n(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка n , $N_n(x)$ - функция Неймана порядка n .

Заметим, что функции Неймана являются бесконечными в точке $x = 0$. Тогда, из граничного условия (51) получаем

$$d_2 = 0 \quad (58)$$

Для удовлетворения граничного условия (50),

$$J_n(\sqrt{\lambda} r_0) = 0 \quad (59)$$

Пусть $\mu_m^{(n)}$ - n -й корень уравнения $J_n(x) = 0$. Тогда собственное значение принимает вид

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2. \quad (60)$$

Такому собственному значению соответствует собственная функция

$$R_{n,m}(r) = y(\sqrt{\lambda} r) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \quad (61)$$

Отметим, что данные собственные функции являются ортогональными с весом r :

$$\int_0^{r_0} r J_n \left(\frac{\mu_m^{(n_1)}}{r_0} r \right) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n_2)}}{r_0} r \right) dr = 0, \quad n_1 \neq n_2. \quad (62)$$

Норма этих функций равна

$$\int_0^{r_0} r J_n^2 \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) dr = \frac{r_0^2}{2} \left[J_n' \left(\mu_m^{(n)} \right) \right]^2, \quad (63)$$

и для $n = 0$

$$\int_0^{r_0} r J_0^2 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r \right) dr = \frac{r_0^2}{2} \left[J_1' \left(\mu_m^{(0)} \right) \right]^2 \quad (64)$$

Подставляя полученные результаты (51) и (61) в (40), для каждого собственного значения $\lambda_{n,m}$ существуют две собственные функции

$$v^c = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) \cos(n\theta) \quad (65)$$

$$v^s = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right) \sin(n\theta) \quad (66)$$

Рассмотрим функцию v^c . Аналогично функциям $R_{n,m}(r)$, данные собственные функции ортогональны с весом r , и норма этих функций выражается как

$$\begin{aligned}
& \int_0^{r_0} J_{n_1} \left(\frac{\mu_{m_1}^{(n_1)}}{r_0} r \right) J_{n_2} \left(\frac{\mu_{m_2}^{(n_2)}}{r_0} r \right) r dr \int_0^{2\pi} \cos n_1 \theta \cos n_2 \theta d\theta = \\
& = \begin{cases} 0 & \text{при } n_1 \neq n_2, \\ 0 & \text{при } n_1 = n_2, \quad m_1 \neq m_2, \\ \frac{r_0^2}{2} \left[J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2 \pi & \text{при } n_1 = n_2 = n \neq 0 \text{ и } m_1 = m_2 = m \\ \frac{r_0^2}{2} \left[J_0'(\mu_m^{(n)}) \right]^2 2\pi & \text{при } n_1 = n_2 = 0 \text{ и } m_1 = m_2 = m \end{cases} \quad (67)
\end{aligned}$$

Вычисления для собственной функции v^s аналогичны.

Выражение для нормы линейной комбинации собственных функций

$$v_{n,m}(r, \theta) = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) (A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta) \quad (68)$$

можно выразить как

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} v_{n,m}(r, \theta) dr d\theta = \frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2 \quad (69)$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 1, & n \neq 0 \end{cases} \quad (70)$$

Таким образом, решение задачи о свободных колебаниях круглой представляется функцией

$$\begin{aligned}
u(r, \theta, t) = & \sum_{n,m=0}^{\infty} v_{n,m}^c(r, \theta) \left(A_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + B_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t \right) + \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} v_{n,m}^s(r, \theta) \left(C_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + D_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t \right)
\end{aligned} \quad (71)$$

Найдем коэффициенты $A_{n,m}, B_{n,m}, C_{n,m}, D_{n,m}$. Для этого подставим формулу (71) в начальные условия (30).

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_{n,m} v_{n,m}^c + C_{n,m} v_{n,m}^s) = f_1(r, \theta) \quad (72)$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (B_{n,m} v_{n,m}^c + D_{n,m} v_{n,m}^s) \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} = f_2(r, \theta) \quad (73)$$

Рассмотрим равенство (67). Так как при $t=0$ синусы обращаются в нуль, получим

$$\begin{aligned}
f_1(r, \theta) = & \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \right) \cos n\theta + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \right) \sin n\theta.
\end{aligned} \quad (74)$$

Такой ряд является рядом Фурье периодической функции $f_1(r, \theta)$ на интервале $(0, 2\pi)$. Тогда множители при тригонометрических функциях должны являться коэффициентами Фурье. Для коэффициентов Фурье же выполняются равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(r, \theta) d\theta = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(r, \theta) \cos n\theta d\theta = \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(r, \varphi) \sin n\theta d\theta = \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right)$$

В то же время, эти равенства являются разложениям некоторой функции в ряд по функциям Бесселя первого порядка на промежутке $(0, r_0)$:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \quad (75)$$

Коэффициенты $b_{n,m}$ такого разложения имеют вид [24]

$$b_{n,m} = \frac{\int_0^{r_0} r f(r) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) dr}{\frac{r_0^2}{2} \left[J_n' \left(\mu_m^{(n)} \right) \right]^2} \quad (76)$$

Применяя полученные соотношения, получим выражения для коэффициентов $A_{n,m}, C_{n,m}$

$$A_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f_1(r, \theta) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \cos n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n' \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r_0 \right) \right]^2} \quad (77)$$

Аналогично получим выражение для $C_{n,m}$

$$C_{n,m} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f_2(r, \theta) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \sin n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n' \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r_0 \right) \right]^2} \quad (78)$$

Для коэффициентов аналогично $B_{n,m}, C_{n,m}$ получим

$$B_{n.m} = \frac{A_{n.m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \quad (79)$$

$$D_{n.m} = \frac{C_{n.m}}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}} \quad (80)$$

7. Вынужденные колебания идеальной круглой мембраны

Рассмотрим теперь задачу о вынужденных колебаниях конечной мембраны. Эта задача соответствует второму этапу предлагаемой модели.

Данная задача описывается следующим образом: пусть на закрепленную по краям мембрану радиуса R действует некоторая внешняя сила. Запишем это в виде системы уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(r, \theta, t) \quad (81)$$

$$u(R, \theta, t) = 0 \quad (82)$$

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta, 0) &= f_1(r, \theta) \\ u_t(r, \theta, 0) &= f_2(r, \theta) \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Здесь $f(r, \theta, t)$ обозначает величину внешнюю силу, рассчитанной на единицу площади мембраны.

Воспользуемся принципом суперпозиции [20] для дифференциальных уравнений в частных производных, и будем искать решение задачи (81)-(83) в виде суммы решений двух подзадач: задачи о свободных колебаниях мембраны с заданными начальными условиями, и о вынужденных колебаниях мембраны под действием внешней силы с нулевыми условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r, \theta, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v(r, \theta, t)}{\partial t^2} \\ v(R, \theta, t) = 0 \\ v(r, \theta, 0) = f_1(r, \theta) \\ v_i(r, \theta, 0) = f_2(r, \theta) \end{array} \right\} \quad (84)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial t^2} + f(r, \theta, t) \\ w(R, \theta, t) = 0 \\ w(r, \theta, 0) = 0 \\ w_i(r, \theta, 0) = 0 \end{array} \right\} \quad (85)$$

$$u(R, \theta, t) = v(R, \theta, t) + w(R, \theta, t) \quad (86)$$

Решение системы уравнений (84) уже было получено, и представлено формулой (71).

Рассмотрим систему уравнений (85). Будем искать решения для функции $w(R, \theta, t)$ в виде ряда по собственным функциям задачи (84):

$$\begin{aligned} w(R, \theta, t) = & \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) J_n \left(\frac{\mu_n^m}{R} r \right) \cos(n\theta) + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^s(t) J_n \left(\frac{\mu_n^m}{R} r \right) \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (87)$$

Данное действие возможно в силу того, что набор собственных функций $J_n \left(\frac{\mu_n^m}{R} r \right) \cos(n\theta)$, $J_n \left(\frac{\mu_n^m}{R} r \right) \sin(n\theta)$ является ортогональным, и тем самым формирует базис задачи в круге. Согласно теореме Стеклова [20], всякая непрерывная функция $F(r, \theta)$ с непрерывными первыми и вторыми производными, удовлетворяющая граничным условиям задачи, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$F(r, \theta) = \sum_{n,m} \left(A_{n,m} \bar{v}_{n,m}(r, \theta) + B_{n,m} \bar{\bar{v}}_{n,m}(r, \theta) \right)$$

по собственным функциям задачи о собственных значениях для круга.

Разложим также по данному базису функцию внешней силы:

$$f(r, \theta, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_n^c(t) J_n\left(\frac{\mu_n^m}{R} r\right) \cos(n\theta) + f_n^s(t) J_n\left(\frac{\mu_n^m}{R} r\right) \sin(n\theta) \quad (88)$$

где

$$f_{n,m}^c(r, \theta, t) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f(r, \theta, t) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \cos n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2} \quad (89)$$

$$f_{n,m}^s(r, \theta, t) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} f(r, \theta, t) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \sin n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2} \quad (90)$$

Рассмотрим слагаемое $\sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) J_n\left(\frac{\mu_n^m}{R} r\right) \cos(n\theta)$ в выражении (87). Введем

обозначение

$$S(r, \theta) = J_n\left(\frac{\mu_n^m}{R} r\right) \cos(n\theta) \quad (91)$$

Подставим полученные для данного слагаемого выражения в уравнение (85).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) S(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) S(r, \theta)}{\partial \theta^2} = \\ & = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) S(r, \theta)}{\partial t^2} + \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m}^c(t) S(r, \theta) \end{aligned} \quad (92)$$

Сгруппируем по производным $w_{n,m}^c(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S(r,\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S(r,\theta)}{\partial \theta^2} \right) = \\ = \frac{1}{a^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^{''c}(t) S(r,\theta) + \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m}^c(t) S(r,\theta) \end{aligned} \quad (93)$$

Заметим, что функция $S(r,\theta)$ является решением для рассмотренного ранее уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r,\theta)}{\partial \theta^2} + \lambda v(r,\theta) = 0 \quad (94)$$

Учитывая это, уравнение (93) принимает вид

$$- \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) \lambda_{n,m} S(r,\theta) = \frac{1}{a^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^{''c}(t) S(r,\theta) + \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m}^c(t) S(r,\theta) \quad (95)$$

где

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{\mu_n^m}{r_0} \right)^2 \quad (96)$$

Зафиксируем переменные n, m и вынесем общие множители:

$$\left(w_{n,m}^c(t) \lambda_{n,m} + \frac{1}{a^2} w_{n,m}^{''c}(t) + f_{n,m}^c(t) \right) S(r,\theta) = 0 \quad (97)$$

Уравнение (27) должно выполняться для произвольных r, θ , поэтому для его решения будем решать обычное линейное дифференциальное уравнение второй степени вида

$$\frac{1}{a^2} w_{n,m}^{''c}(t) + \lambda_{n,m} w_{n,m}^c(t) + f_{n,m}^c(t) = 0 \quad (98)$$

Рассмотрим функцию $f_m^c(t)$. Ее вид дан формулой (89). В настоящей задаче подынтегральная функция $f(r, \theta, t)$ представляется двумя способами: как некоторая постоянная, и как некоторая тригонометрическая функция с постоянным множителем. Рассмотрим оба случая по отдельности.

Пусть

$$f_m^c(t) = f_m^c \sin(qt) \quad (99)$$

где

$$f_{n,m}^c = P_0 \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) \cos n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2} \quad (100)$$

$$P_0 = \text{const}, \quad q = \text{const}.$$

Тем самым получим уравнение

$$\frac{1}{a^2} w_{n,m}^{nc}(t) + \lambda_{n,m} w_{n,m}^c(t) + f_{n,m}^c \sin(t) = 0 \quad (101)$$

Для того, чтобы решить уравнение (101), рассмотрим сначала дифференциальное уравнение для нахождения общего решения.

$$\frac{1}{a^2} w_{n,m}^{nc}(t) + \lambda_{n,m} w_{n,m}^c(t) = 0 \quad (102)$$

Будем искать решение данного уравнения в виде

$$w_{n,m}^c(t) = e^{\mu t} \quad (103)$$

Подставляя такую замену в уравнение (101), получим

$$\frac{\mu^2}{a^2} e^{\mu t} + \lambda_{n,m} e^{\mu t} = 0 \quad (104)$$

Т.к. уравнение (104) должно выполняться для произвольного конечного μ , то получаем

$$\frac{\mu^2}{a^2} + \lambda_{n,m} = 0 \quad (105)$$

Отсюда,

$$\mu = \pm ia\sqrt{\lambda_{n,m}} \quad (106)$$

И тогда общее решение принимает вид

$$w_{n,m}^c(t) = c_1 e^{-ia\sqrt{\lambda_{n,m}}t} + c_2 e^{ia\sqrt{\lambda_{n,m}}t} \quad (107)$$

Применяя формулу Эйлера и преобразовывая константы, получим

$$w_{n,m}^c(t) = c_1 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) + c_2 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) \quad (108)$$

Найдем теперь частное решение уравнения (28). Используя метод неопределенных коэффициентов, будем искать решение уравнения

$$\frac{1}{a^2} \tilde{w}_{n,m}^c(t) + \lambda_{n,m} \tilde{w}_{n,m}^c(t) = -f_{n,m}^c \sin(qt) \quad (109)$$

в виде

$$\tilde{w}_{n,m}^c(t) = b_1 \cos(qt) + b_2 \sin(qt) \quad (110)$$

Вычислим необходимые производные:

$$\frac{d^2 \tilde{w}_{n,m}^c(t)}{dt^2} = -q^2 (b_1 \cos(qt) + b_2 \sin(qt)) \quad (111)$$

Подставим предполагаемое решение $\tilde{w}_{n,m}^c(t)$ в уравнение (98):

$$\begin{aligned} -\frac{q^2}{a^2} (b_1 \cos(qt) + b_2 \sin(qt)) + \\ + \lambda_{n,m} (b_1 \cos(qt) + b_2 \sin(qt)) = -f_{n,m}^c \sin(qt) \end{aligned} \quad (112)$$

Приравняем коэффициенты при функциях $\cos(qt)$ с каждой стороны уравнения:

$$-\frac{q^2}{a^2}b_1 + \lambda_{n,m}b_1 = 0 \quad (113)$$

Аналогично, для $\sin(qt)$

$$-\frac{q^2}{a^2}b_2 + \lambda_{n,m}b_2 = -f_{n,m}^c \sin(qt) \quad (114)$$

Откуда

$$b_1 = 0 \quad (115)$$

$$b_2 = -\frac{a^2 f_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \quad (116)$$

и

$$\tilde{w}_{n,m}^c(t) = -\frac{a^2 f_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \sin(qt) \quad (117)$$

Тогда решением уравнения (31) является

$$w_{n,m}^c(t) = c_1 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) + c_2 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) - \frac{a^2 f_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \sin(qt) \quad (118)$$

Найдем теперь константы c_1, c_2 из начальных условий, определенных в (15):

$$0 = c_1 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}0) + c_2 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}0) - \frac{a^2 f_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \sin(q0) \quad (119)$$

Откуда

$$c_2 = 0 \quad (120)$$

Вычислим производную $w_{n,m}^c(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dw_{n,m}^c(t)}{dt} &= c_1 a \sqrt{\lambda_{n,m}} \cos(a \sqrt{\lambda_{n,m}} t) - \\ &\quad - c_2 a \sqrt{\lambda_{n,m}} \sin(a \sqrt{\lambda_{n,m}} t) - \frac{a^2 f_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \cos(qt) \end{aligned} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 a \sqrt{\lambda_{n,m}} \cos(a \sqrt{\lambda_{n,m}} 0) - c_2 a \sqrt{\lambda_{n,m}} \sin(a \sqrt{\lambda_{n,m}} 0) - \\ &\quad - \frac{a^2 q f_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \cos(q0) \end{aligned} \quad (122)$$

$$c_1 = \frac{a q f_{n,m}^c}{(a^2 \lambda_{n,m} - q^2) \sqrt{\lambda_{n,m}}} \quad (123)$$

Окончательно, получим

$$w_{n,m}^c(t) = \frac{a f_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \left(\frac{q}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \sin(a \sqrt{\lambda_{n,m}} t) - a \sin(qt) \right) \quad (124)$$

Решение для слагаемого $\sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^s(t) J_n\left(\frac{\mu_n^m}{R} r\right) \sin(n\theta)$ в (17) выводится

аналогично, и имеет вид

$$w_{n,m}^s(t) = \frac{a f_{n,m}^s}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \left(\frac{q}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \sin(a \sqrt{\lambda_{n,m}} t) - a \sin(qt) \right) \quad (125)$$

где

$$f_{n,m}^s = P_0 \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \sin n\theta r dr d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2} \varepsilon_n \left[J_n'(\mu_m^{(n)}) \right]^2} \quad (126)$$

Подставляя выражения (125, 126) в (77), окончательно получим решение исходной задачи (71)

$$\begin{aligned}
u(r, \theta, t) = & \sum_{n,m=0}^{\infty} v_{n,m}^c(r, \theta) \left(A_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + B_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + \right. \\
& \left. + \frac{af_{n,m}^c}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \left(\frac{q}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t) - a \sin(qt) \right) \right) + \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} v_{n,m}^s(r, \theta) \left(C_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + D_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + \right. \\
& \left. + \frac{af_{n,m}^s}{a^2 \lambda_{n,m} - q^2} \left(\frac{q}{\sqrt{\lambda_{n,m}}} \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}} t) - a \sin(qt) \right) \right)
\end{aligned}
\tag{127}$$

Рассмотрим теперь для слагаемого $\sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^c(t) J_n\left(\frac{\mu_n^m}{R} r\right) \cos(n\theta)$ в выражении (87) случай, когда функция внешней силы $f(r, \theta, t)$ представима в виде

$$f_m^c(t) = f_m^c \tag{128}$$

где $f_{n,m}^c$ определяется формулой (90).

Решим теперь обычное линейное дифференциальное уравнение второй степени вида

$$\frac{1}{a^2} w_{n,m}^{''c}(t) + \lambda_{n,m} w_{n,m}^c(t) + f_{n,m}^c = 0 \tag{129}$$

Решением соответствующего однородного уравнения будет иметь тот же вид, что и в первом случае:

$$\frac{1}{a^2} w_{n,m}^{''c}(t) + \lambda_{n,m} w_{n,m}^c(t) = 0 \tag{130}$$

и его решением будет

$$w_{n,m}^c(t) = c_1 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) + c_2 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) \quad (131)$$

Найдем теперь частное решение уравнения (129). Используя метод неопределенных коэффициентов, будем искать решение уравнения

$$\frac{1}{a^2} \tilde{w}_{n,m}^{nc}(t) + \lambda_{n,m} \tilde{w}_{n,m}^c(t) = -f_{n,m}^c \quad (132)$$

в виде

$$\tilde{w}_{n,m}^c(t) = b_1 \quad (133)$$

Подставим предполагаемое решение в уравнение:

$$\lambda_{n,m} b_1 = -f_{n,m}^c \quad (134)$$

Откуда

$$\tilde{w}_{n,m}^c(t) = -\frac{f_{n,m}^c}{\lambda_{n,m}} \quad (135)$$

Тогда решением (58) является

$$w_{n,m}^c(t) = c_1 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) + c_2 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) - \frac{f_{n,m}^c}{\lambda_{n,m}} \quad (136)$$

Найдем теперь константы c_1, c_2 из начальных условий, определенных в (85):

$$0 = c_1 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}0) + c_2 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}0) - \frac{f_{n,m}^c}{\lambda_{n,m}} \quad (137)$$

Откуда

$$c_2 = \frac{f_{n,m}^c}{\lambda_{n,m}} \quad (138)$$

Вычислим необходимые производные:

$$\frac{dw_{n,m}^c(t)}{dt} = c_1 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) - c_2 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) \quad (139)$$

$$0 = c_1 \cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}0) - c_2 \sin(a\sqrt{\lambda_{n,m}}0) \quad (140)$$

Откуда

$$c_1 = 0$$

(141)

Окончательно, получим

$$w_{n,m}^c(t) = \frac{f_{n,m}^c}{\lambda_{n,m}} \left(\cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) - 1 \right) \quad (142)$$

Решение для слагаемого $\sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n,m}^s(t) J_n\left(\frac{\mu_n^m}{R}r\right) \sin(n\theta)$ в (77) выводится

аналогично, и имеет вид

$$w_{n,m}^s(t) = \frac{f_{n,m}^s}{\lambda_{n,m}} \left(\cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) - 1 \right) \quad (143)$$

где $f_{n,m}^s$ определено выражением (126).

Подставляя выражения (142, 143) в (77), окончательно получим решение исходной задачи (71)

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} v_{n,m}^c(r, \theta) \left(\begin{aligned} &A_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + B_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + \\ &+ \frac{f_{n,m}^c}{\lambda_{n,m}} \left(\cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) - 1 \right) \end{aligned} \right) + \sum_{n,m=0}^{\infty} v_{n,m}^s(r, \theta) \left(\begin{aligned} &C_{n,m} \cos \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + D_{n,m} \sin \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} t + \\ &+ \frac{f_{n,m}^s}{\lambda_{n,m}} \left(\cos(a\sqrt{\lambda_{n,m}}t) - 1 \right) \end{aligned} \right) \quad (144)$$

7. Выбор входных параметров

7.1. Параметры мембраны

Как было сказано ранее, модель идеальной круглой мембраны, используемой в настоящей работе, задается тремя параметрами: радиусом, плотностью материала и величиной натяжения. В соответствии с данными, доступными в литературе [6,10], натяжение мембраны в расчетах принято 3200 Н/м, а плотность материала мембраны – 2690 кг/м³. Радиус мембраны принят в соответствии со спецификацией популярного как в оркестре, так и в обычных барабанных установках рабочего барабана Ludwig [25], имеющим диаметр мембраны 35.56 см (14 дюймов).

7.2. Параметры палочки

В рамках настоящей работы, такие параметры палочки, как вес или материал не фигурируют в непосредственных расчетах. Единственным значимым параметром является ее диаметр. Наиболее распространенный диаметр круглого наконечника палочки равен 12 мм. Стоит отметить, что в целях упрощения вычислений смещением мембраны, вызванным контактом с барабанной палочкой, пренебрегается, однако фактический диаметр, используемый в расчетах, совпадает с номинальным диаметром сферы наконечника барабанной палочки.

В целях отыскания зависимостей динамики барабанной мембраны от размера наконечника барабанной палочки, в ходе численного моделирования будут рассмотрены диаметры 12 мм и 48 мм, что может соответствовать деревянным колотушкам с круглыми наконечниками подобного размера.

7.3. Время взаимодействия

В соответствии с результатами, описанными в главе 3, время взаимодействия барабанной палочки с мембраной барабана установлено 5 мс.

8. Результаты численного моделирования

В ходе настоящей работы с помощью пакета Wolfram Mathematica 12.1 была разработана программа для численного моделирования динамики барабанной мембраны при взаимодействии с барабанной палочкой.

8.1 Исходный случай

Рассмотрим сначала случай, используя ступенчатую модель, где параметры системы заданы в соответствии с величинами, описанными в предыдущей главе:

- Диаметр мембраны: 35.56 см
- Диаметр наконечника палочки: 12 мм
- Плотность мембраны: 2690 кг/м³
- Натяжение мембраны: 3200 Н/м
- Время взаимодействия: 5 мс
- Сила удара: 100 Н

Для проведения анализа динамики мембраны в зависимости от точки удара, а также параметров системы, будем сравнивать абсолютные значения коэффициентов при симметричных и антисимметричных модах, данные в формуле (71). Будем оценивать их величины в семи разных временных точках:

- t_h – время, равное половине времени взаимодействия
- t_0-t_5 – время, равное 0 - 500 мс после окончания взаимодействия соответственно

Будем последовательно рассматривать удары по отдалению от центра мембраны.

Рассмотрим удар в середине мембраны. На рисунках 13 и 14 представлены графики абсолютных величин коэффициентов при симметричных и антисимметричных модах от времени соответственно.

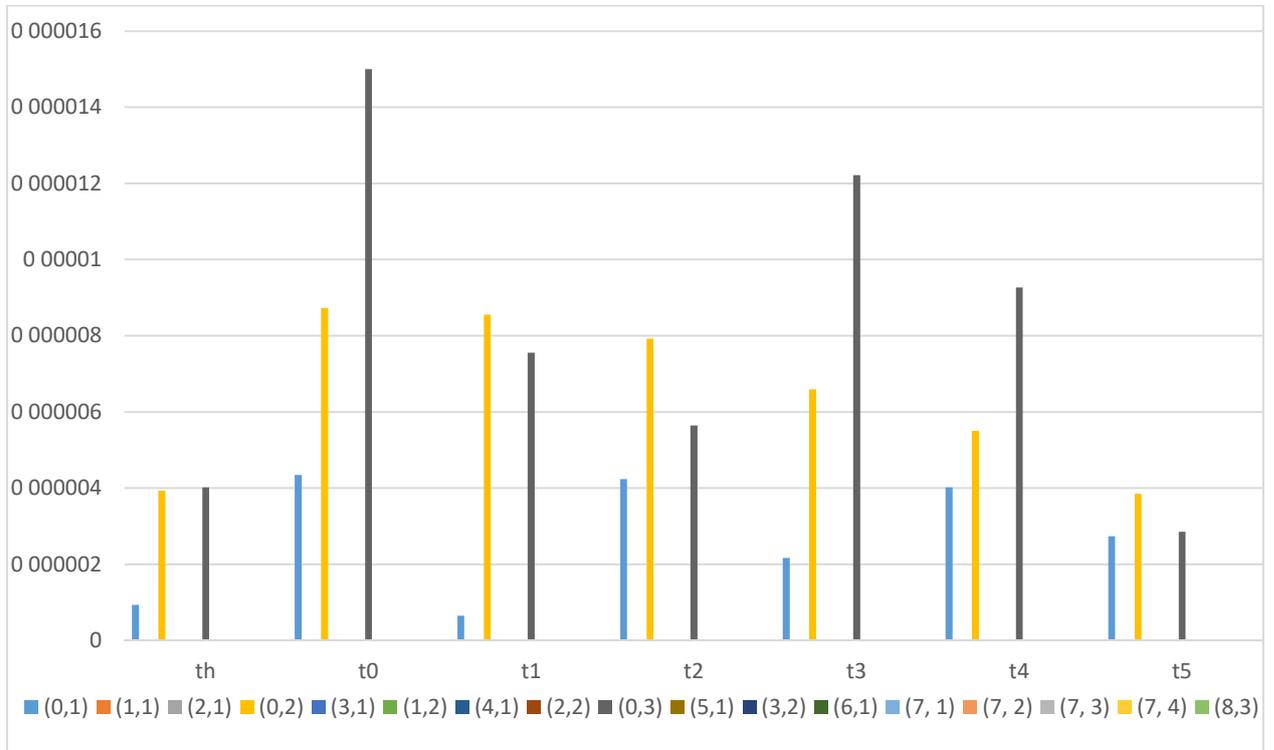


Рис. 13. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при ударе в центр мембраны от времени

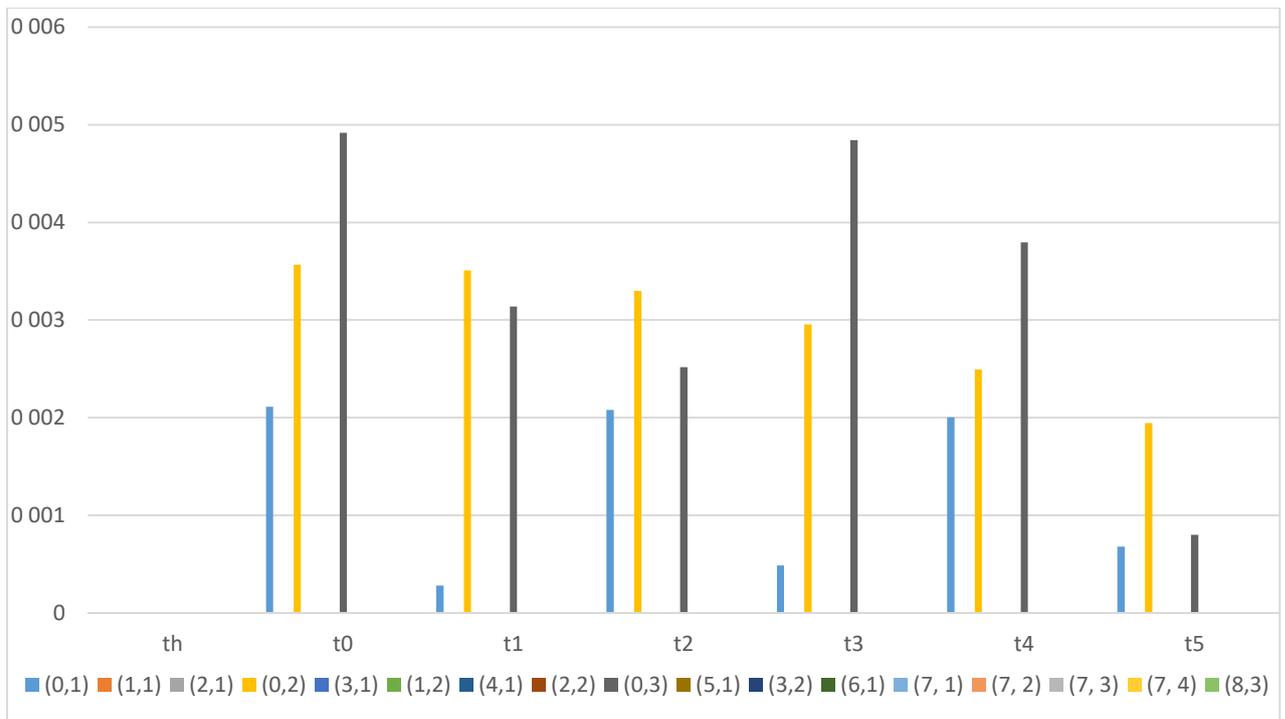


Рис. 14. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при ударе в центр мембраны от времени

Из представленных графиков видно, что при ударе в центр мембраны возбуждение испытывают только лишь радиальные моды (0, 1), (0, 2), (0, 3) и так далее. При этом моды высших порядков в начальный момент испытывают большее возбуждение в сравнении с модами низших порядков, однако первые сравнительно быстро затухают.

Зависимости величин коэффициентов для удара, смещенного на 5 см от центра мембраны, представлены на графиках на рисунках 15 и 16:

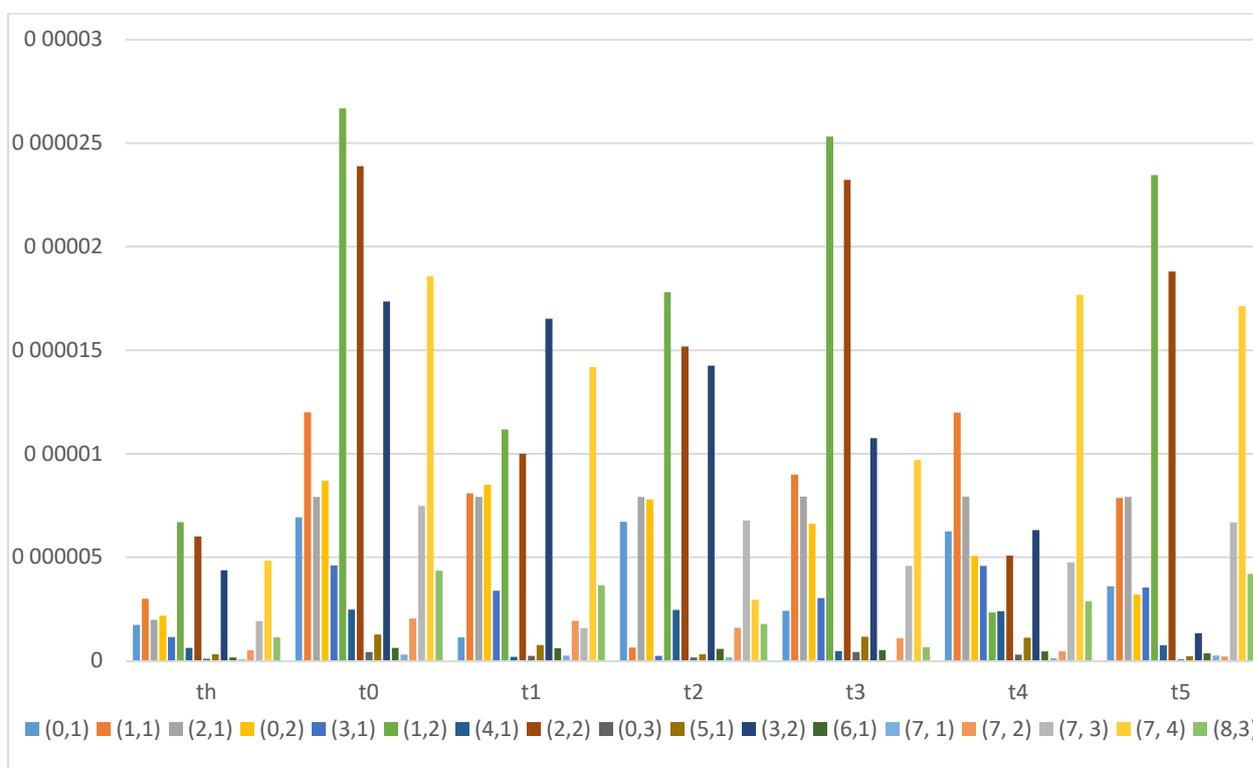


Рис. 15. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=5$ см от времени

Из графиков видно, что при смещении удара от центра возбуждается множество новых мод, как низких, так и высоких порядков. При этом абсолютные значения симметричных и антисимметричных коэффициентов возрастают на порядок. Моды (1, 1), (1, 2), (3, 1) и (2, 2) выступают как моды с наибольшей энергией на протяжении всего времени. Для симметричных мод также большой вклад дают моды высших порядков, как, например, мода (7,4). Радиальные моды при таком ударе практически не возбуждаются.

Графики на рисунках 17 и 18 показывают динамику модальных коэффициентов при ударе, смещенном на 10 см от центра мембраны:

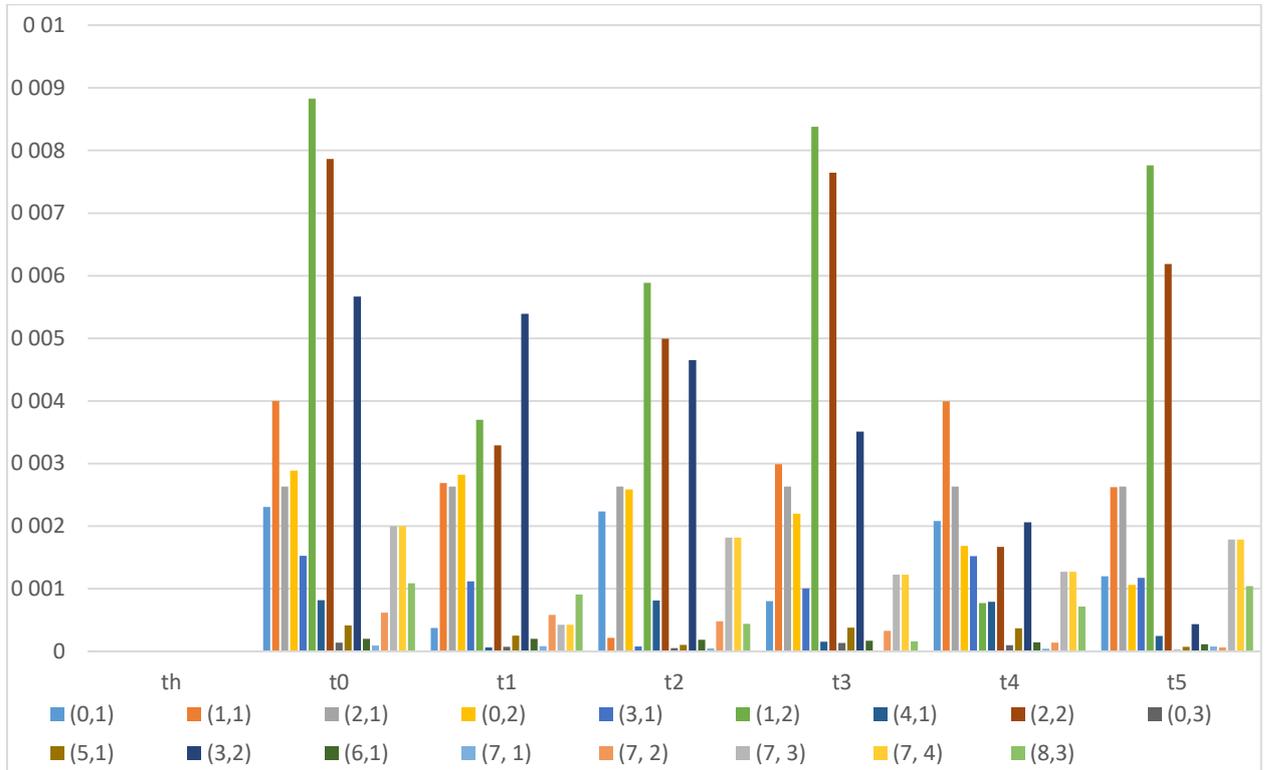


Рис. 16. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=5$ см от времени

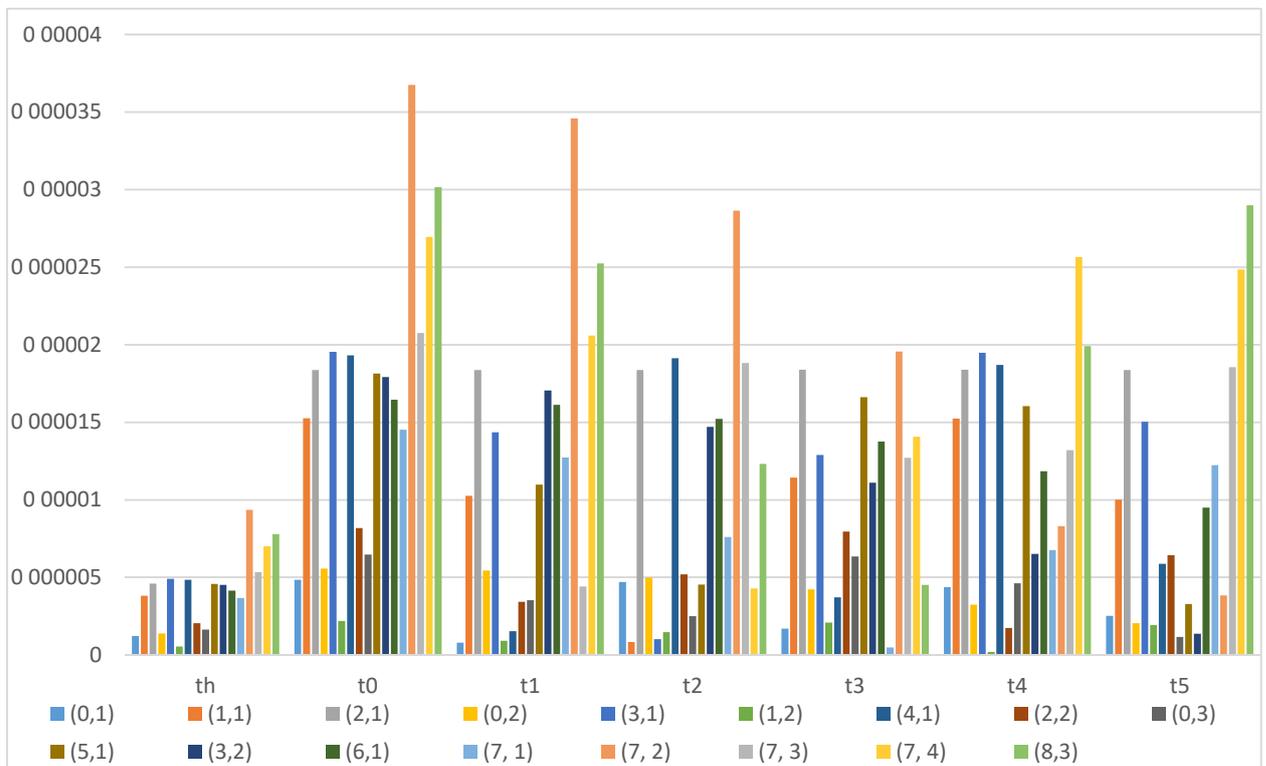


Рис. 17. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=10$ см от времени

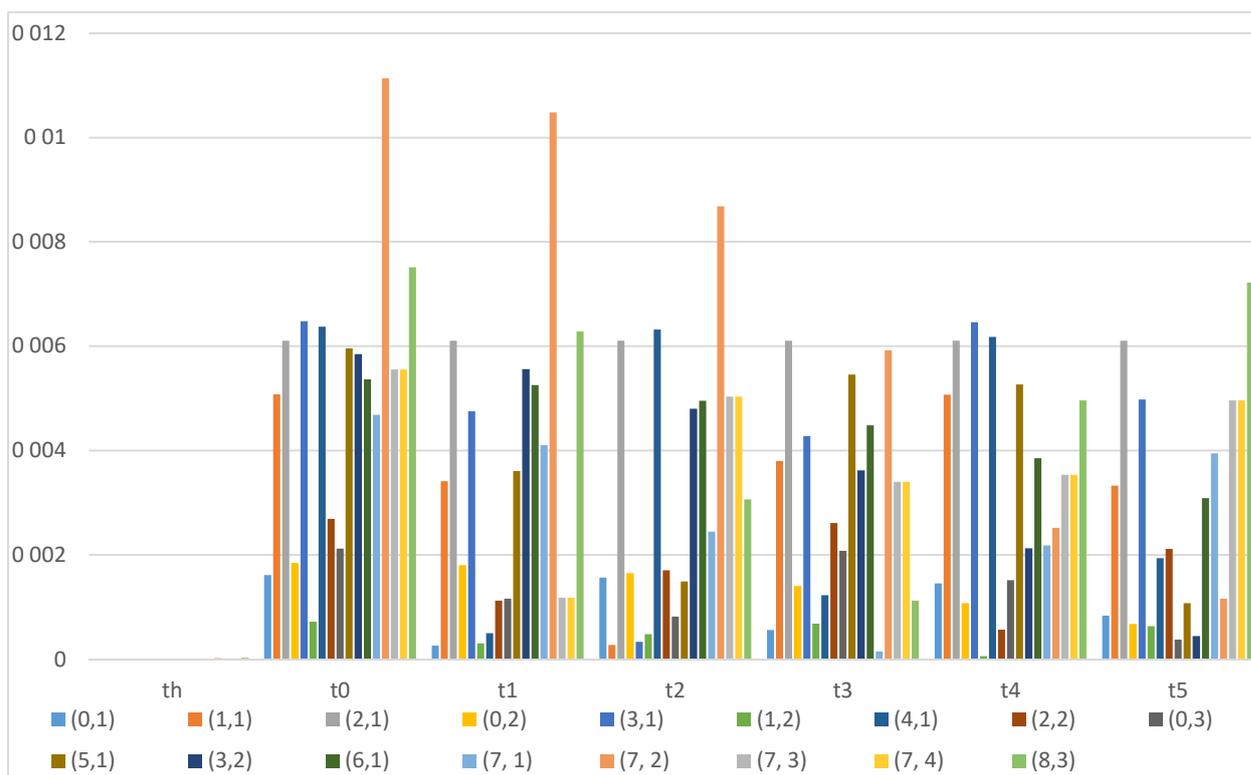


Рис. 17. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=10$ см от времени

Из графиков видно, что при таком смещенном ударе мода (1, 2) заметно ослабевает по сравнению с предыдущим случаем. При этом равномерно возбуждаются диаметрально моды (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), а также моды высших порядков (7, 4) и (8, 3). По прошествии 300 мс высшие моды постепенно начинают затухать, и превалируют моды диаметрально моды низких порядков.

Наконец, на графиках на рисунках 18 и 19 представлены графики зависимости модальных коэффициентов от времени для удара, смещенного на 15 см от центра мембраны. Из графиков видно, что при таком ударе возбуждается большое количество мод высших порядков. Первые 200 мс наибольший вклад вносят смешанные моды (3, 2), (7, 2), (7, 3), (7, 4), а также диаметрально моды (6, 1) и (7, 1). К моменту времени $t_5 = 500$ мс большая часть мод высших порядков, кроме (7, 1), ослабевает, сравниваясь по величине

с модами низших порядков (2,1), (3,1), (2,2). Коэффициент при моде (1, 1) имеет наименьшее значение из всех трех случаев.

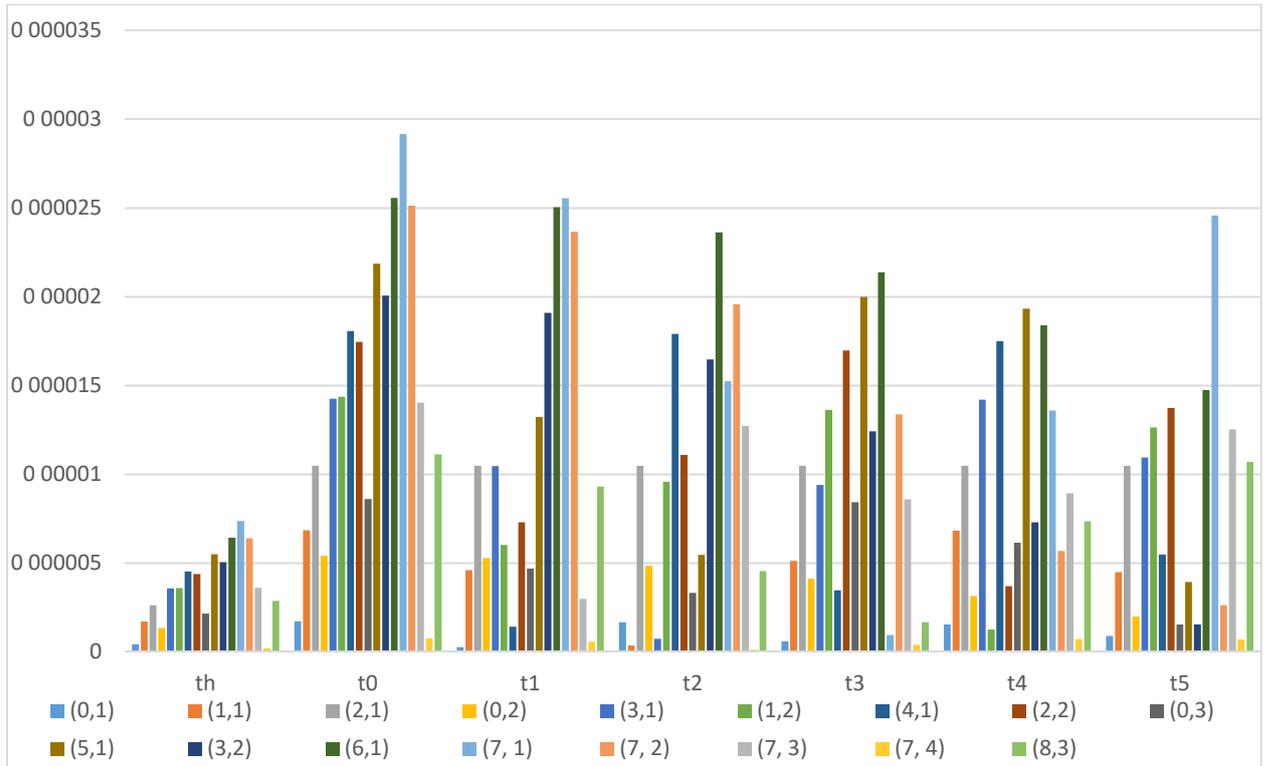


Рис. 18. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=15$ см от времени

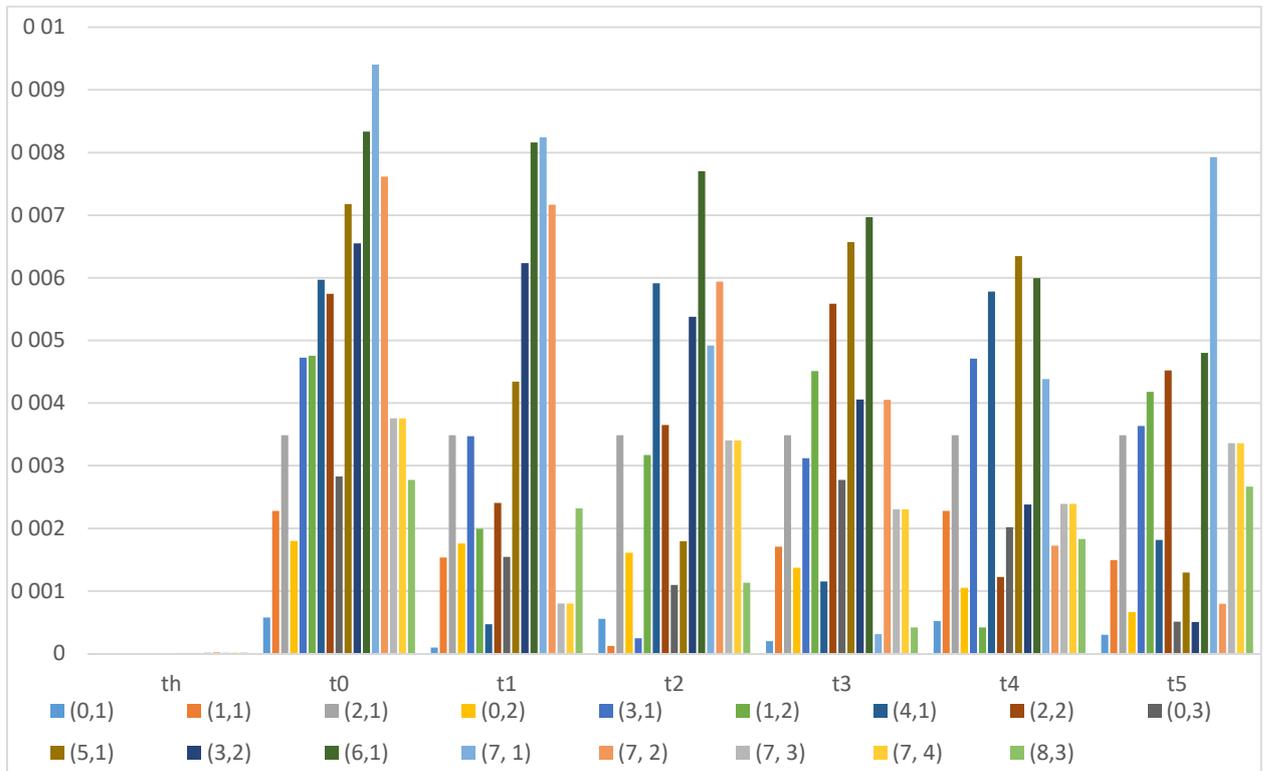


Рис. 19. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=15$ см от времени

Подытоживая полученные результаты, можно выделить следующие особенности:

- При отдалении от центра мембраны, интенсивность фундаментальных мод (1, 1) и (1, 2) ослабевает
- При отдалении от центра, интенсивность радиальных мод уменьшается, возрастают диаметральные моды низких порядков
- При отдалении от центра наблюдается уменьшение в абсолютных значениях модальных коэффициентов
- При отдалении от центра повышается интенсивность смешанных мод высших порядков
- Амплитуды мод, возбуждаемых внешней силой, меньше на два порядка, чем при возбуждении передачей импульса

8.2. Увеличенное время контакта

Рассмотрим теперь случай с увеличенным временем контакта.

Параметры системы:

- Диаметр мембраны: 35.56 см
- Диаметр наконечника палочки: 12 мм
- Плотность мембраны: 2690 кг/м³
- Натяжение мембраны: 3200 Н/м
- Время взаимодействия: 15 мс
- Сила удара: 100 Н

На рисунках 20-21 представлены графики абсолютных величин коэффициентов при симметричных и антисимметричных модах от времени при нанесении удара в центр мембраны при такой конфигурации.

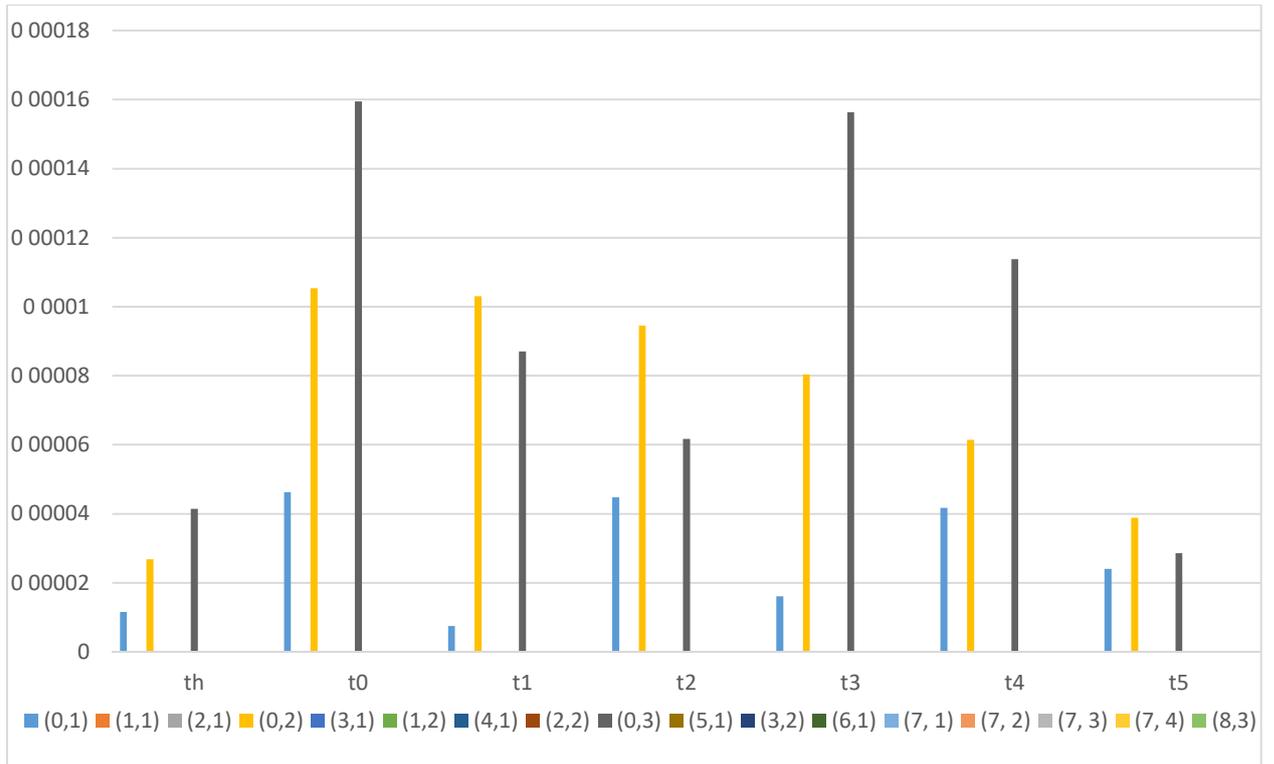


Рис. 20. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при ударе в центр мембраны, повышенное время контакта

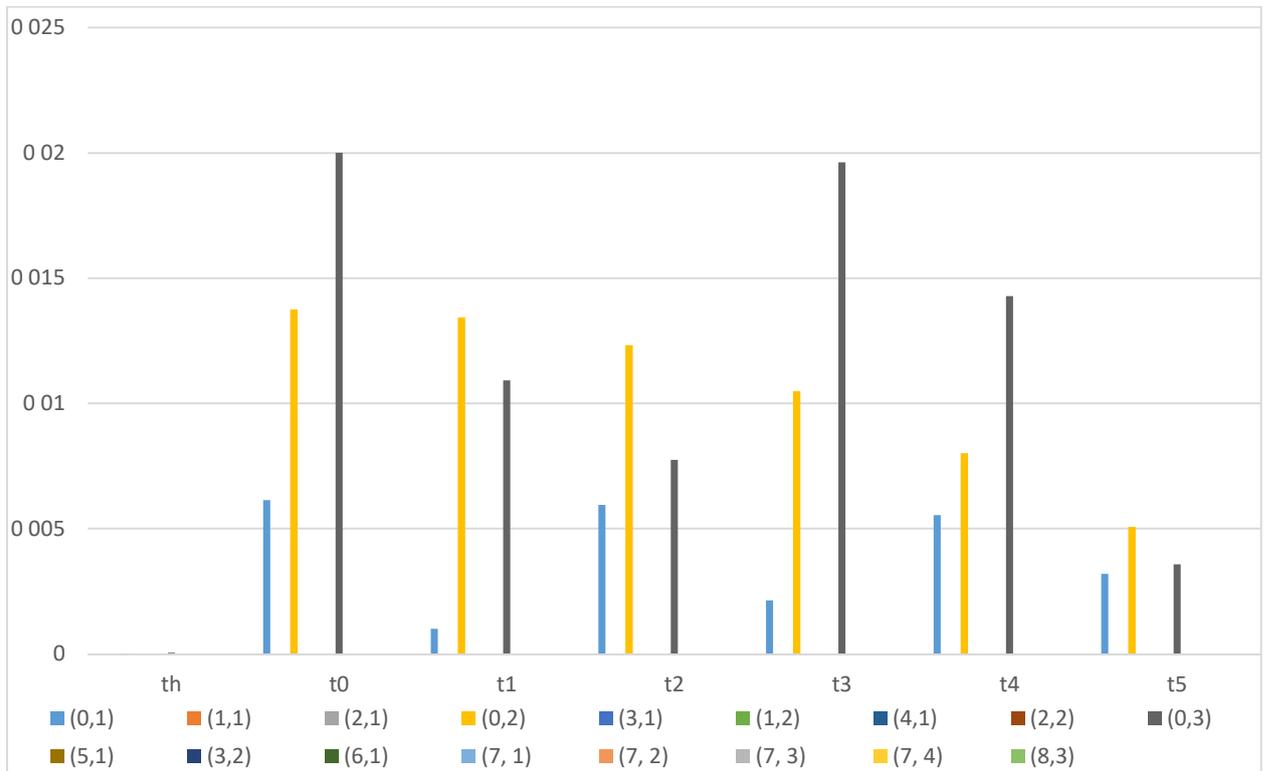


Рис. 21. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при ударе в центр мембраны, повышенное время контакта

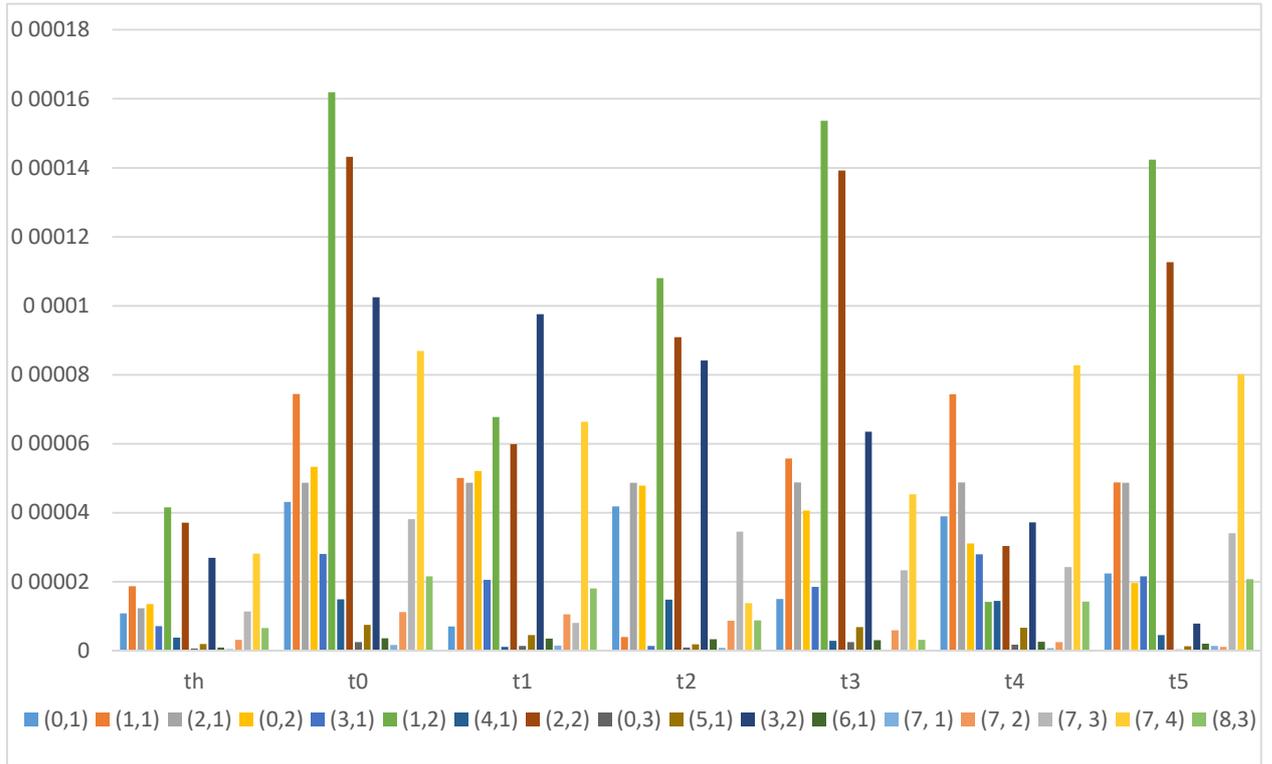


Рис. 22. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=5$ см от времени, повышенное время контакта

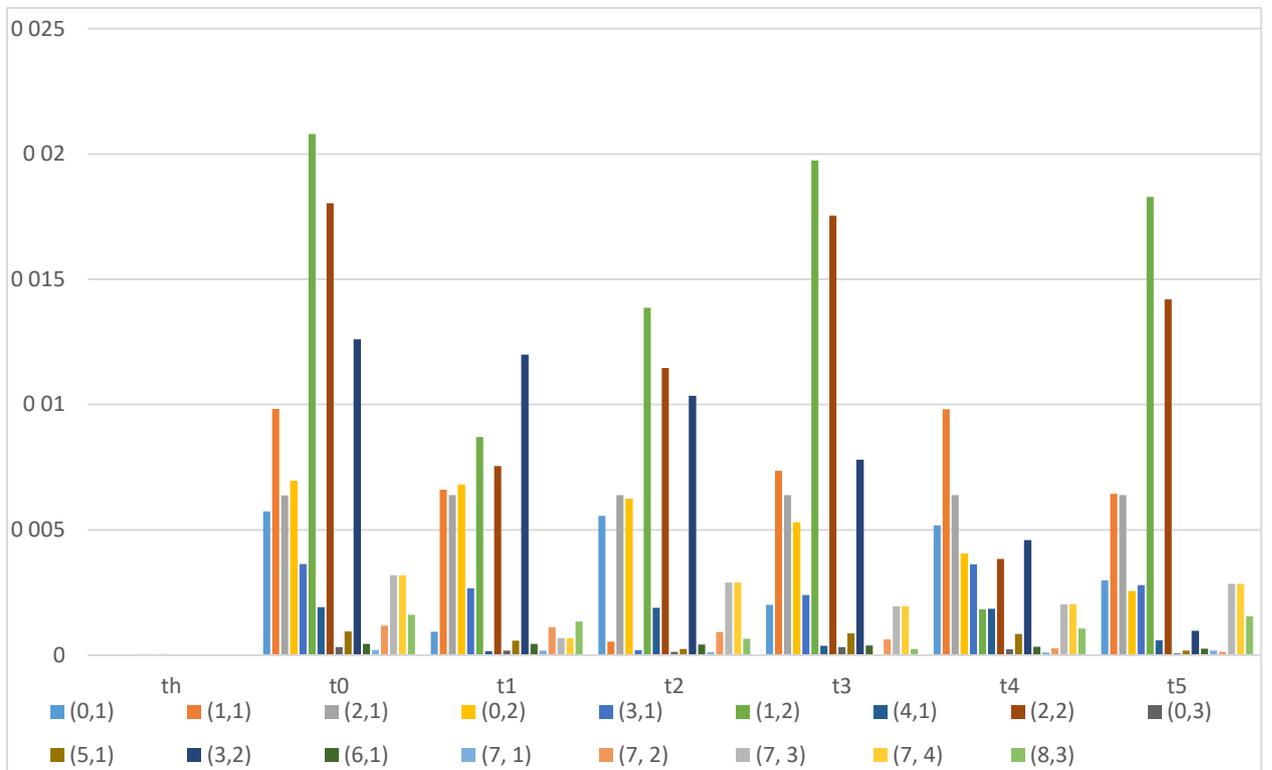


Рис. 23. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=5$ см от времени, повышенное время контакта

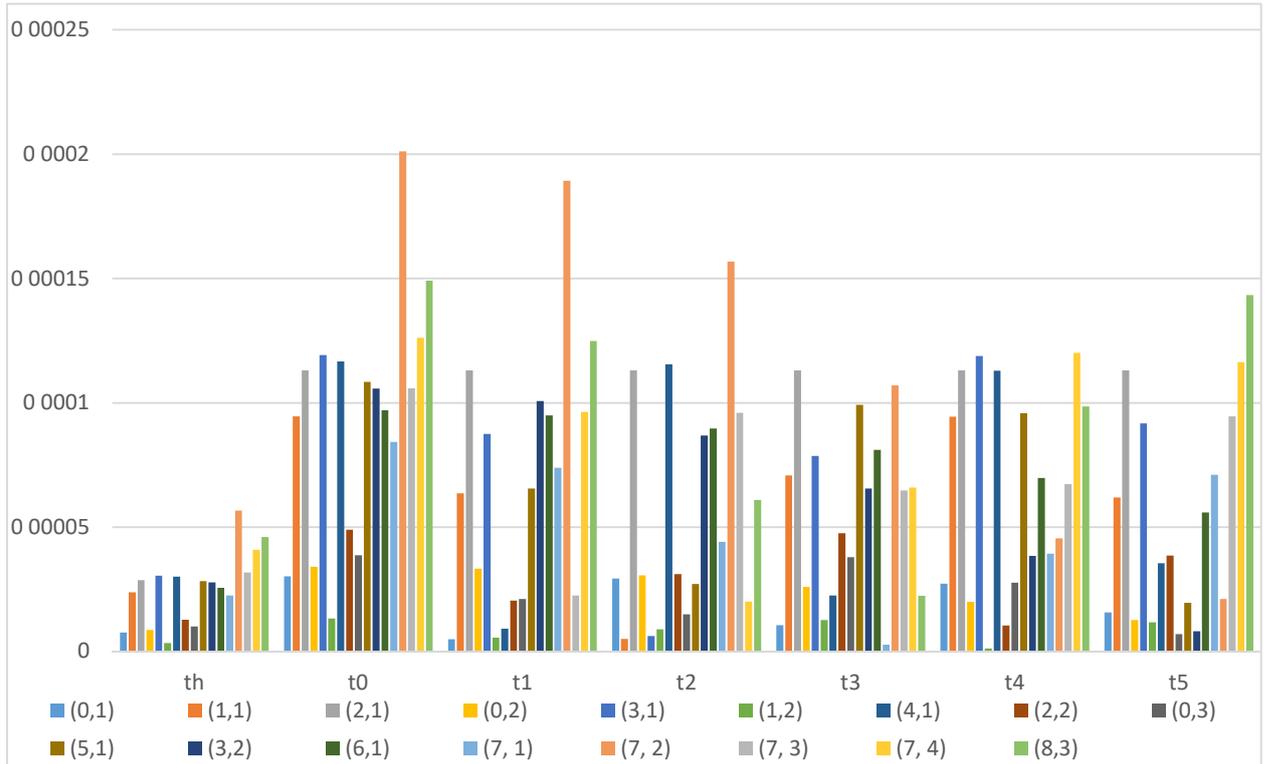


Рис. 24. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=10$ см от времени, повышенное время контакта

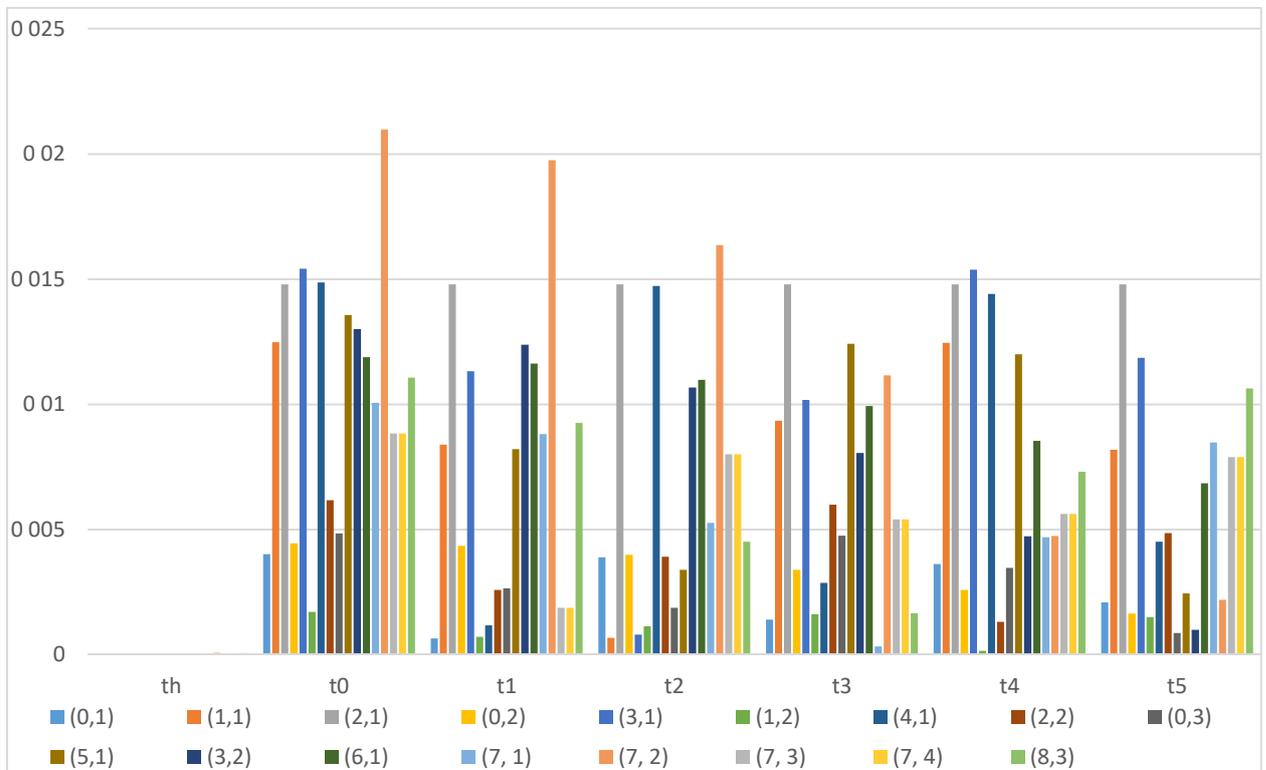


Рис. 25. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=10$ см от времени, повышенное время контакта

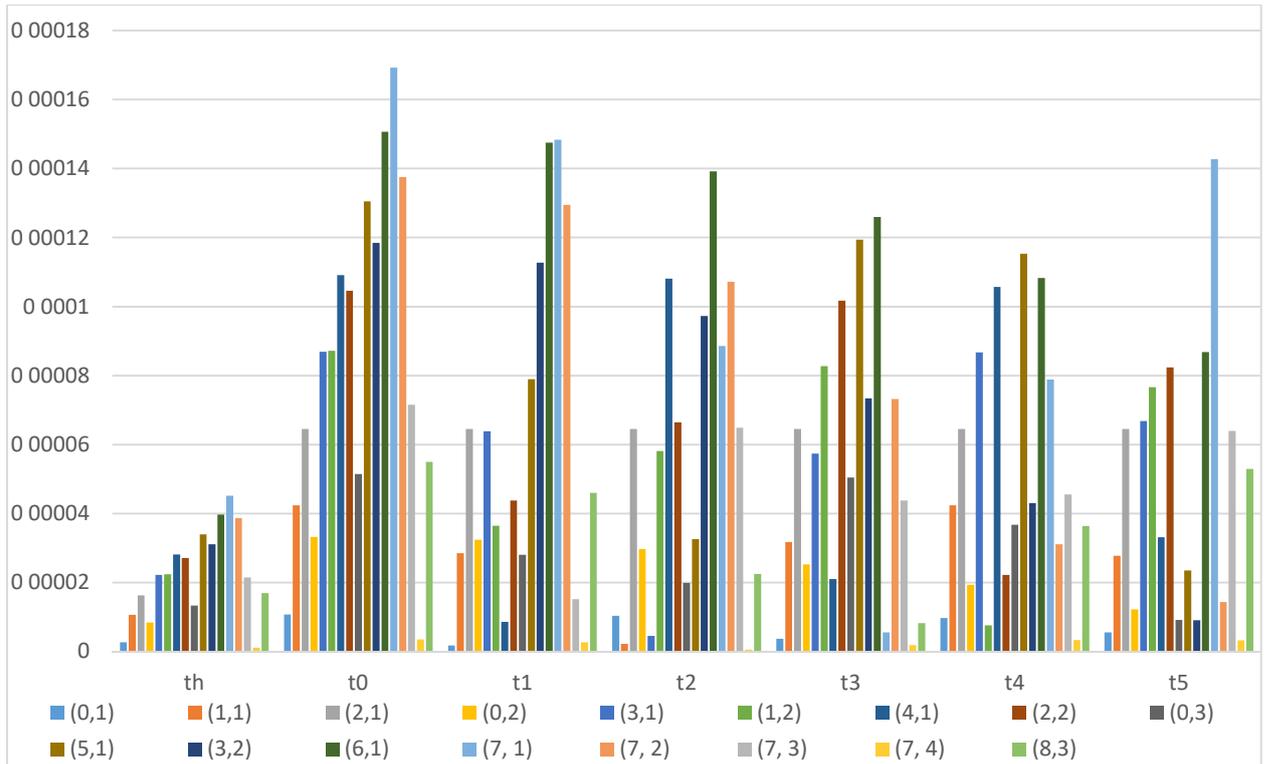


Рис. 26. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, повышенное время контакта

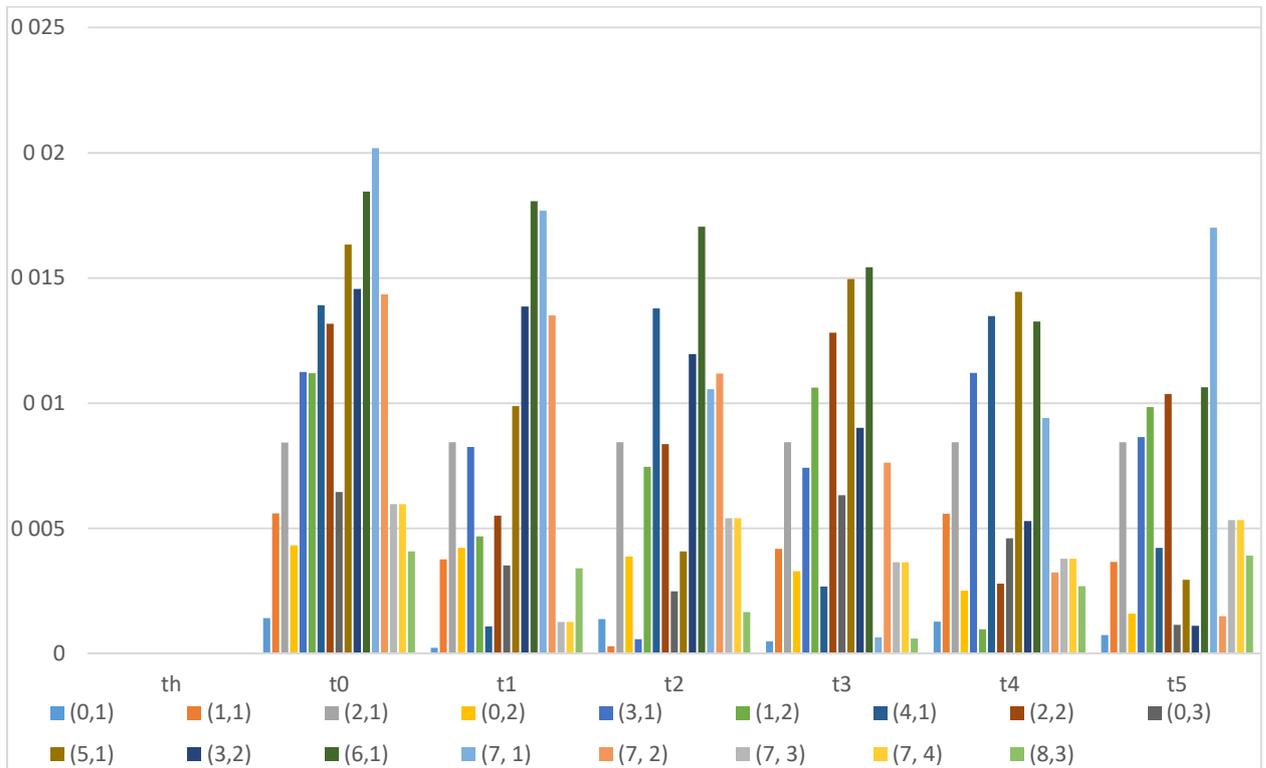


Рис. 27. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, повышенное время контакта

Графики 20-27 показывают, что увеличение времени контакта не вносит значительных изменений во временную динамику возбуждаемых мод. При

этом значения коэффициентов при всех возбужденных модах увеличилось в некоторое количество раз. Для его оценки, рассмотрим отношение коэффициентов, например, при симметричной и антисимметричной моде (7, 1) в случае увеличенного времени контакта и его значения в исходном случае соответственно:

$$\frac{k'_{7,1}{}^c}{k_{7,1}{}^c} = \frac{0.000169311}{0.0000291585} \approx 5.8$$

$$\frac{k'_{7,1}{}^s}{k_{7,1}{}^s} = \frac{0.020189666}{0.009406022} \approx 2.1$$

8.3. Увеличенный радиус наконечника палочки

Рассмотрим теперь случай с увеличенным радиусом наконечника барабанной палочки. Параметры системы:

- Диаметр мембраны: 35.56 см
- Диаметр наконечника палочки: 48 мм
- Плотность мембраны: 2690 кг/м³
- Натяжение мембраны: 3200 Н/м
- Время взаимодействия: 5 мс
- Сила удара: 100 Н

На рисунках 28 и 29 представлены графики абсолютных величин коэффициентов при симметричных и антисимметричных модах от времени при нанесении удара в центр мембраны при такой конфигурации.

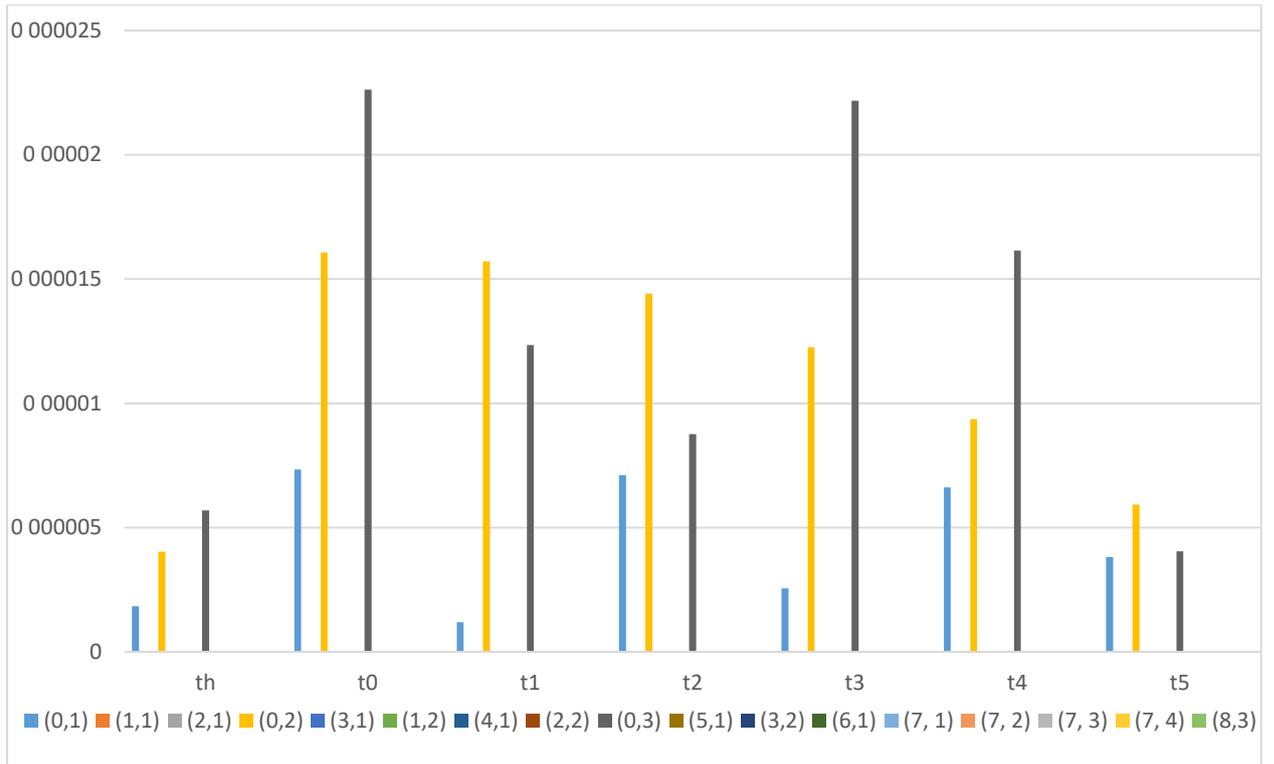


Рис. 28. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при ударе в центр мембраны, увеличенный радиус наконечника палочки

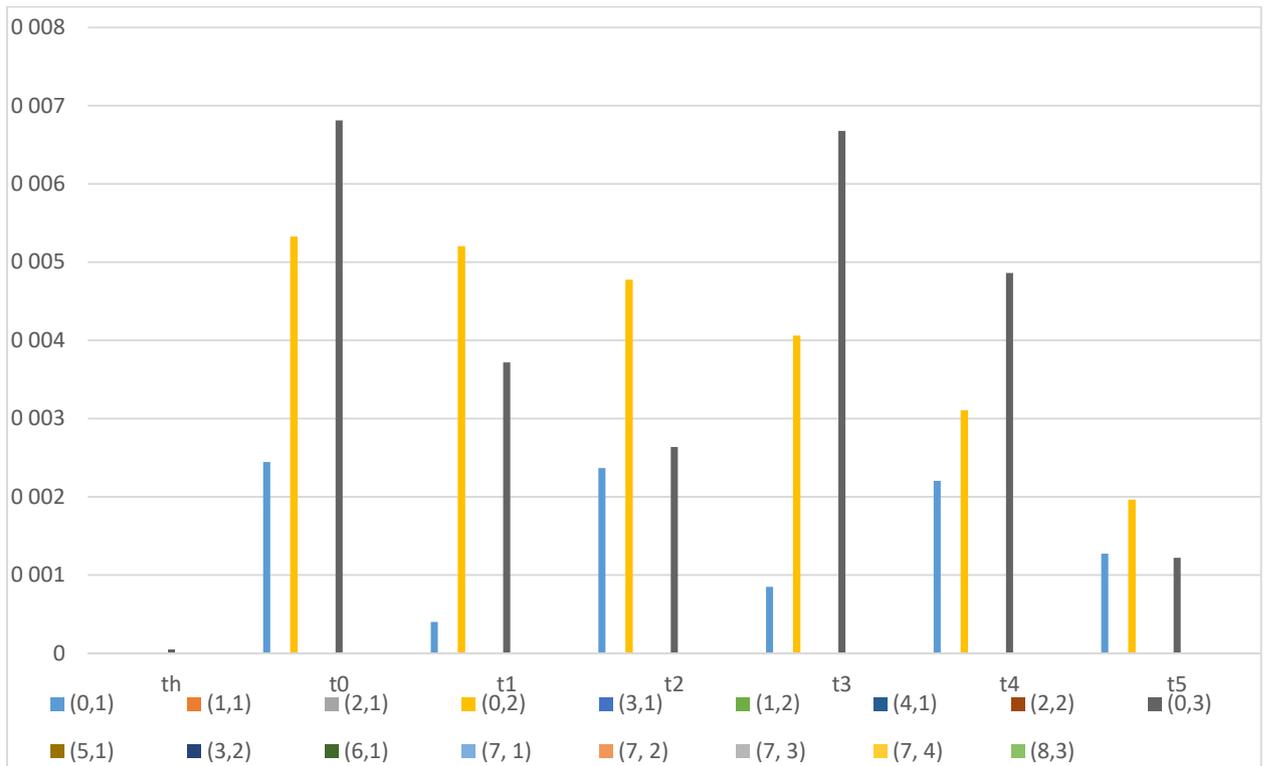


Рис. 29. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при ударе в центр мембраны, увеличенный радиус наконечника палочки

Графики 28 и 29 показывают, что увеличение радиуса наконечника палочки не вносит значительных изменений во временную динамику возбуждаемых мод.

При этом значения коэффициентов при всех возбужденных модах увеличилось на некоторую равную примерно $2 \cdot 10^{-3}$ для всех модальных коэффициентов

Зависимости величин коэффициентов для удара, смещенного на 5 см от центра мембраны, представлены на графиках на рисунках 30 и 31:

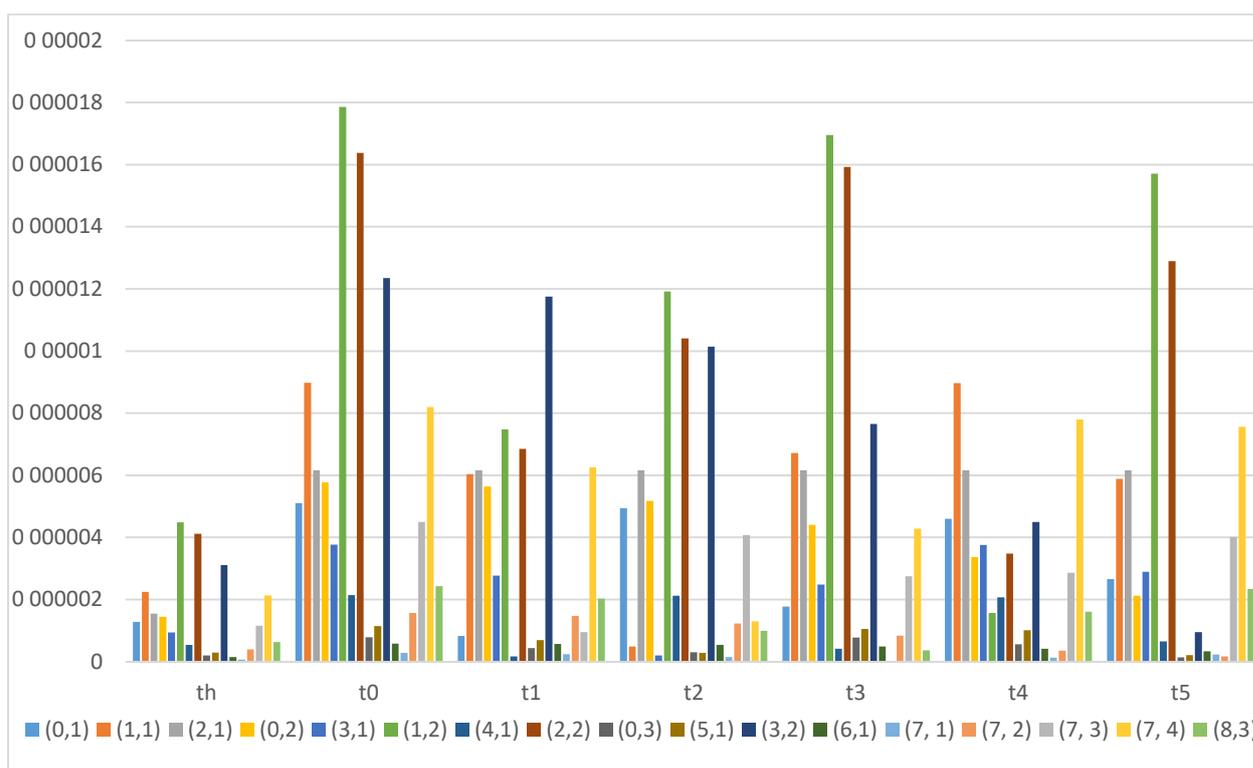


Рис. 30. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=5$ см от времени, увеличенный радиус наконечника палочки

Из графиков видно, что при таком ударе по сравнению с исходным случаем уменьшается интенсивность мод высших порядков по отношению к смешанным модам (1, 2), (2, 2) и (3, 2). Так же наблюдается возрастание по величине всех модальных коэффициентов.

Из графиков, представленных на рисунках 32 и 33, видно, что для удара, смещенного на 10 см от центра, по сравнению с исходным случаем происходит приглушение всех возбужденных мод, а также мод высших порядков в сравнении с модами низших порядков. Смешанная мода (7, 2) остается при этом преобладающей.

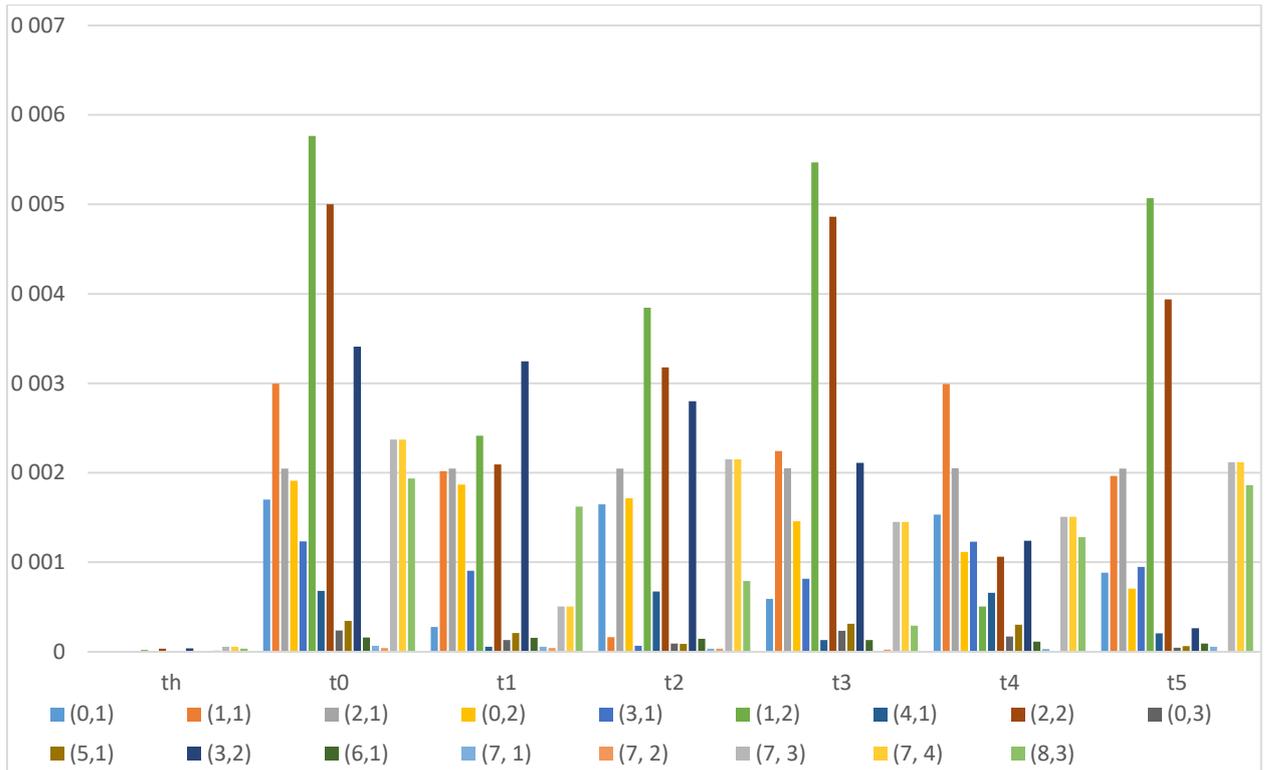


Рис. 31. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=5$ см от времени, увеличенный радиус наконечника палочки

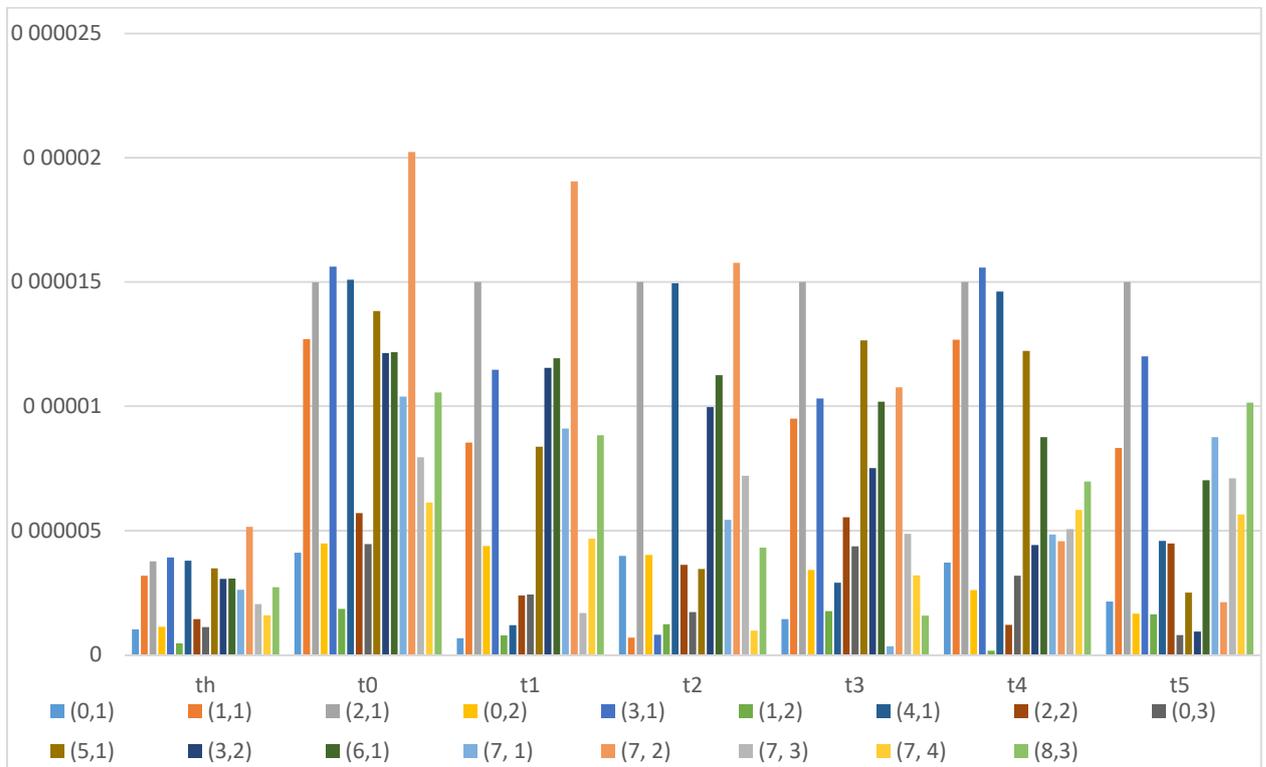


Рис. 32. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=10$ см от времени, увеличенный радиус наконечника палочки

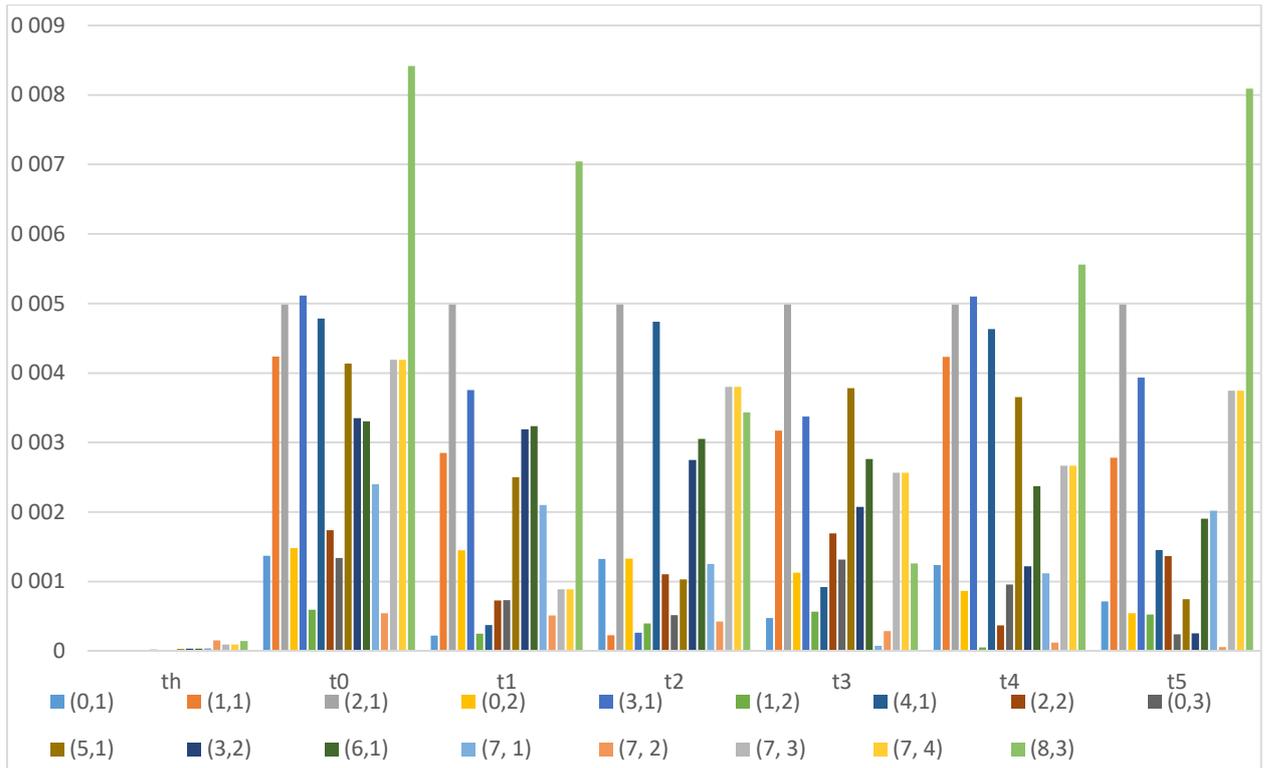


Рис. 33. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=10$ см от времени, увеличенный радиус наконечника палочки

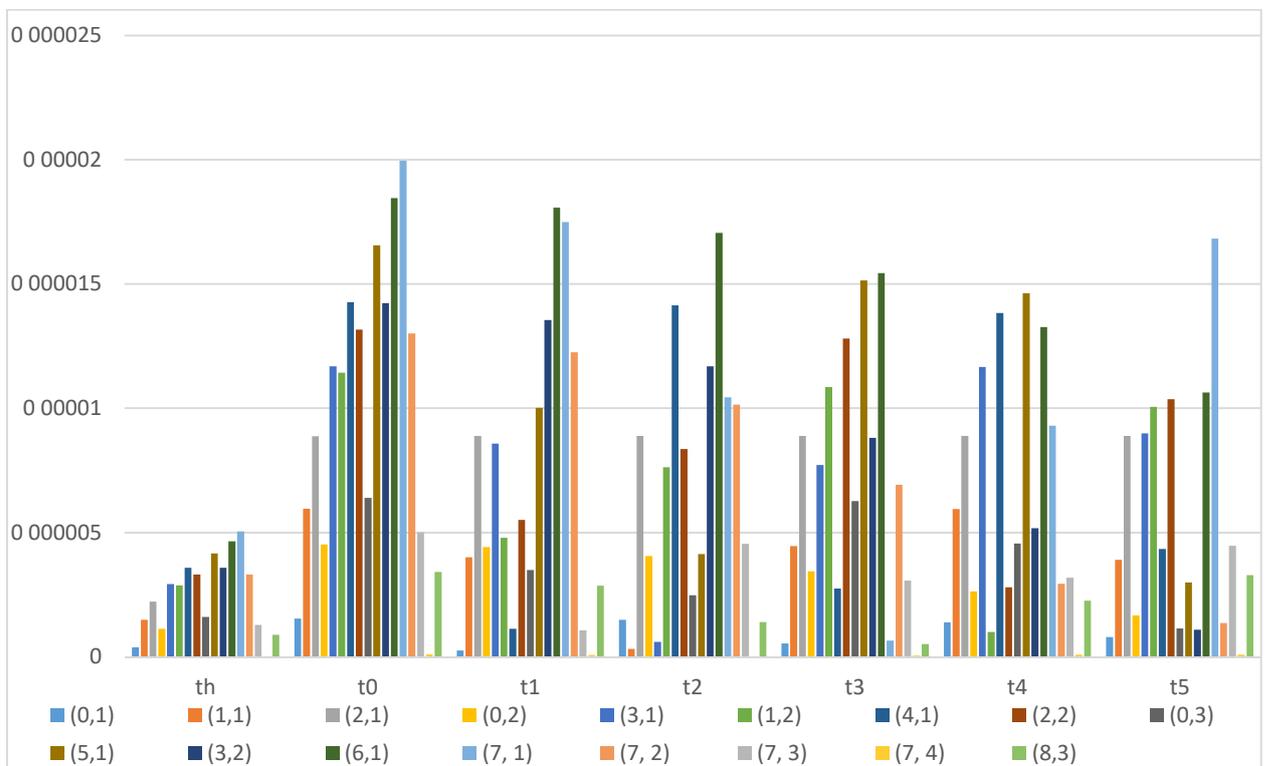


Рис. 34. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, увеличенный радиус наконечника палочки

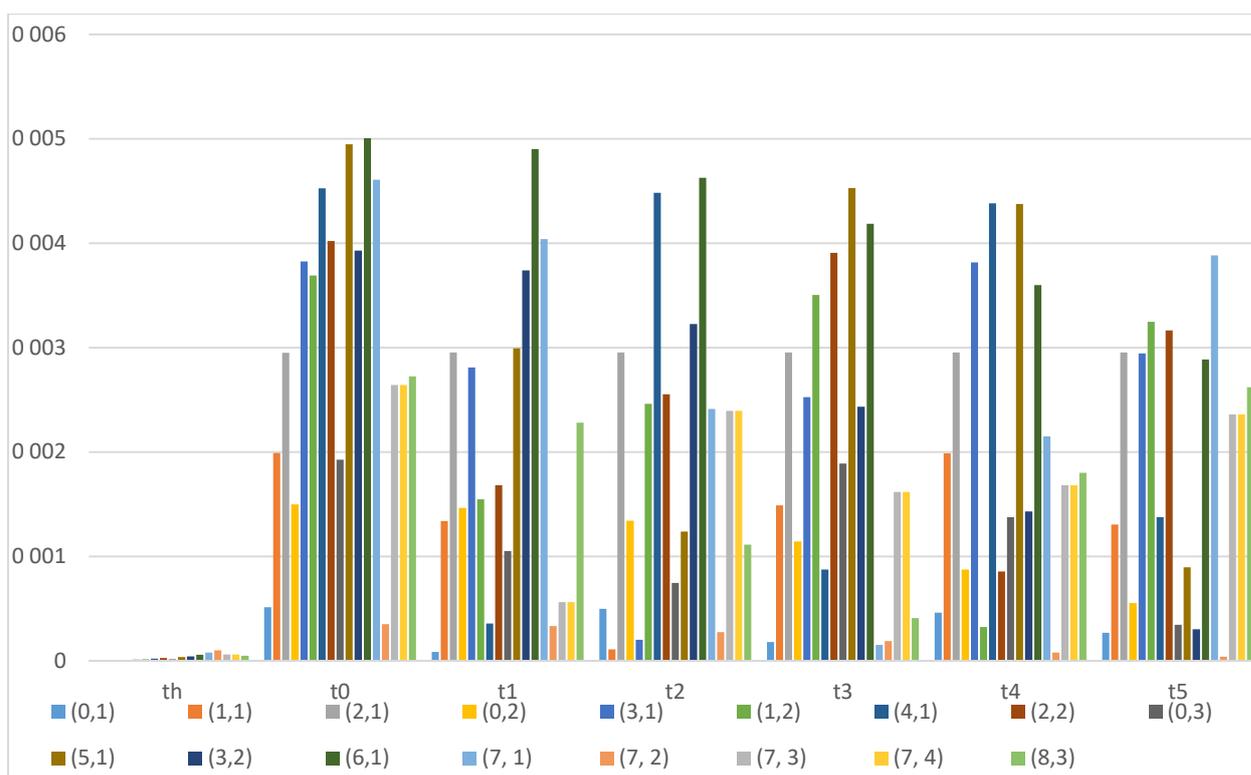


Рис. 35. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, увеличенный радиус наконечника палочки

Аналогично, видно, что для удара, смещенного на 10 см от центра, удар, смещенный на 15 см с увеличенным наконечником палочки, по сравнению с исходным случаем, производит глушение всех возбужденных мод, а также мод высших порядков в сравнении с модами низших порядков.

Таким образом, для случая с увеличенным радиусом наконечника, можно выделить следующие особенности:

- При ударе в центр амплитуда возбуждаемых мод повышается
- При смещенных от центра ударах происходит приглушение мод высших порядков и уменьшение амплитуд возбуждаемых мод по сравнению с исходным случаем

8.4. Уменьшенная величина силы удара

Рассмотрим теперь случай с уменьшенной силой удара. Параметры системы:

- Диаметр мембраны: 35.56 см
- Диаметр наконечника палочки: 12 мм
- Плотность мембраны: 2690 кг/м³
- Натяжение мембраны: 3200 Н/м
- Время взаимодействия: 5 мс
- Сила удара: 60 Н

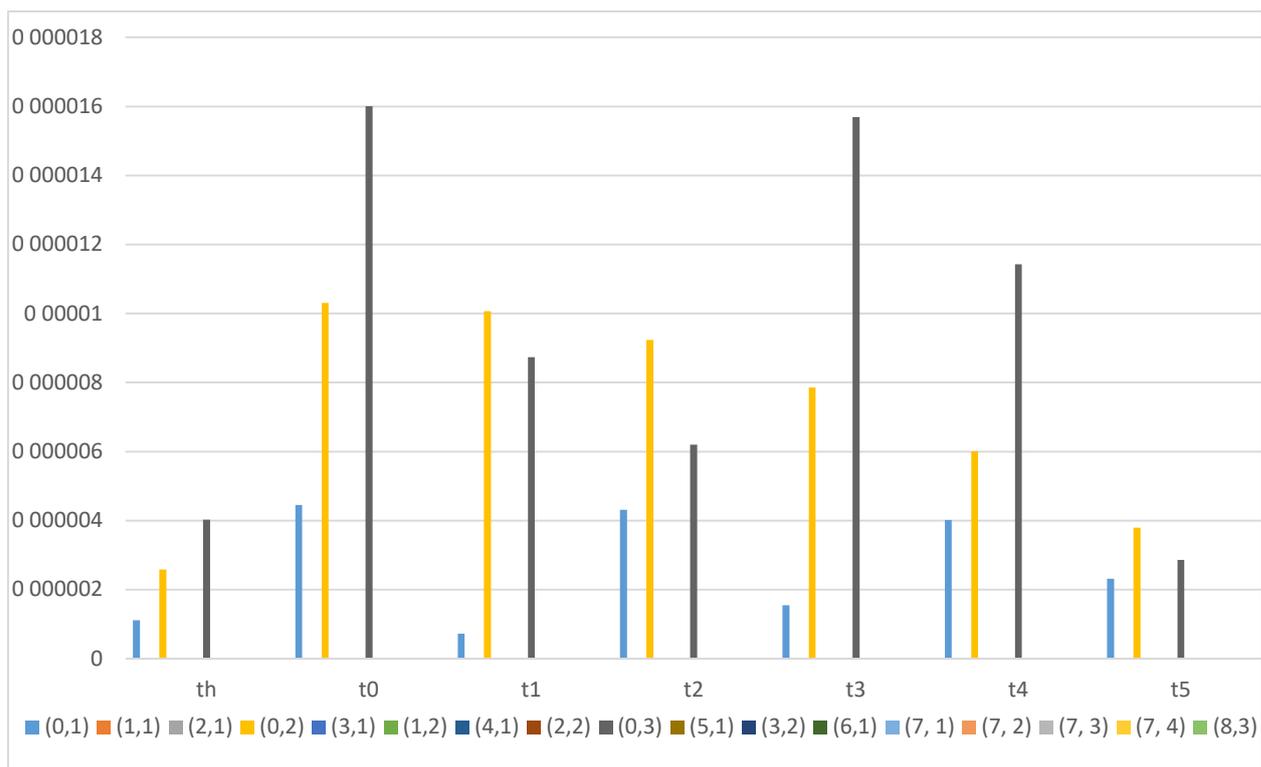


Рис. 36. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при ударе в центр мембраны от времени, уменьшенная величина силы

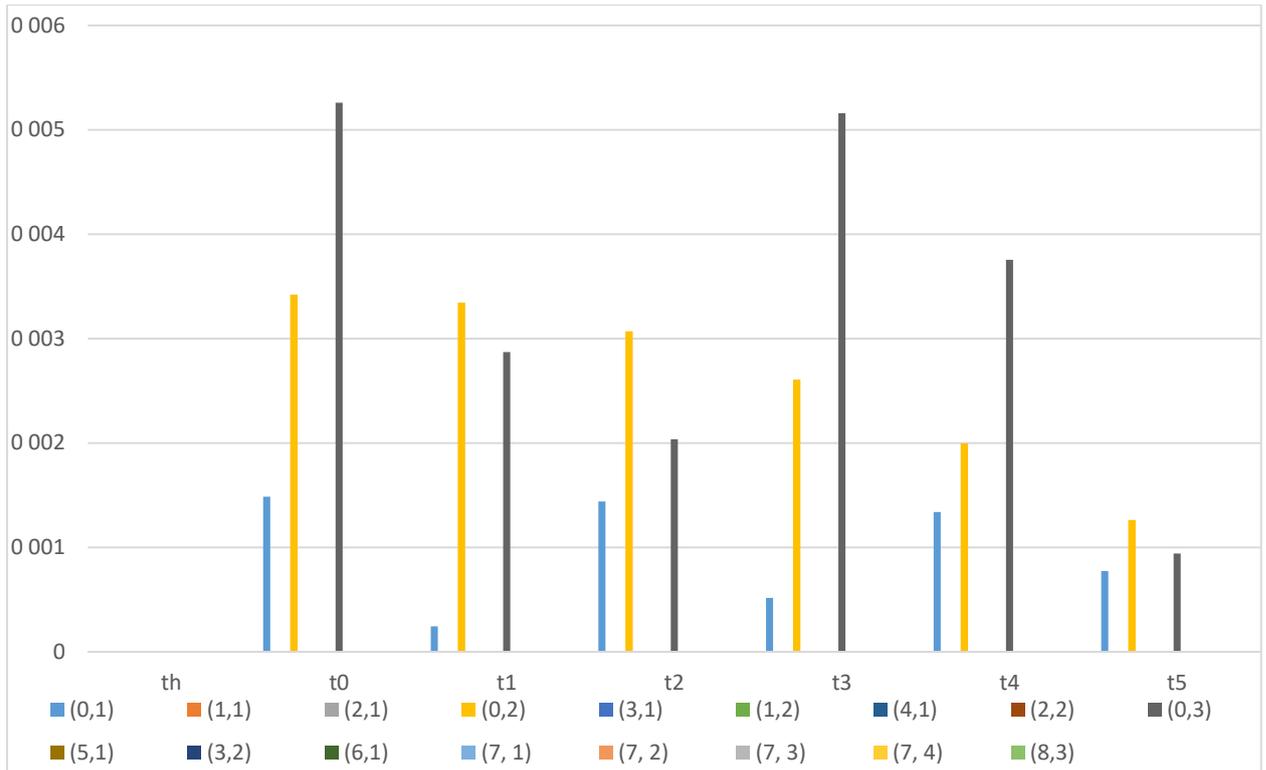


Рис. 37. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при ударе в центр мембраны от времени, уменьшенная величина силы

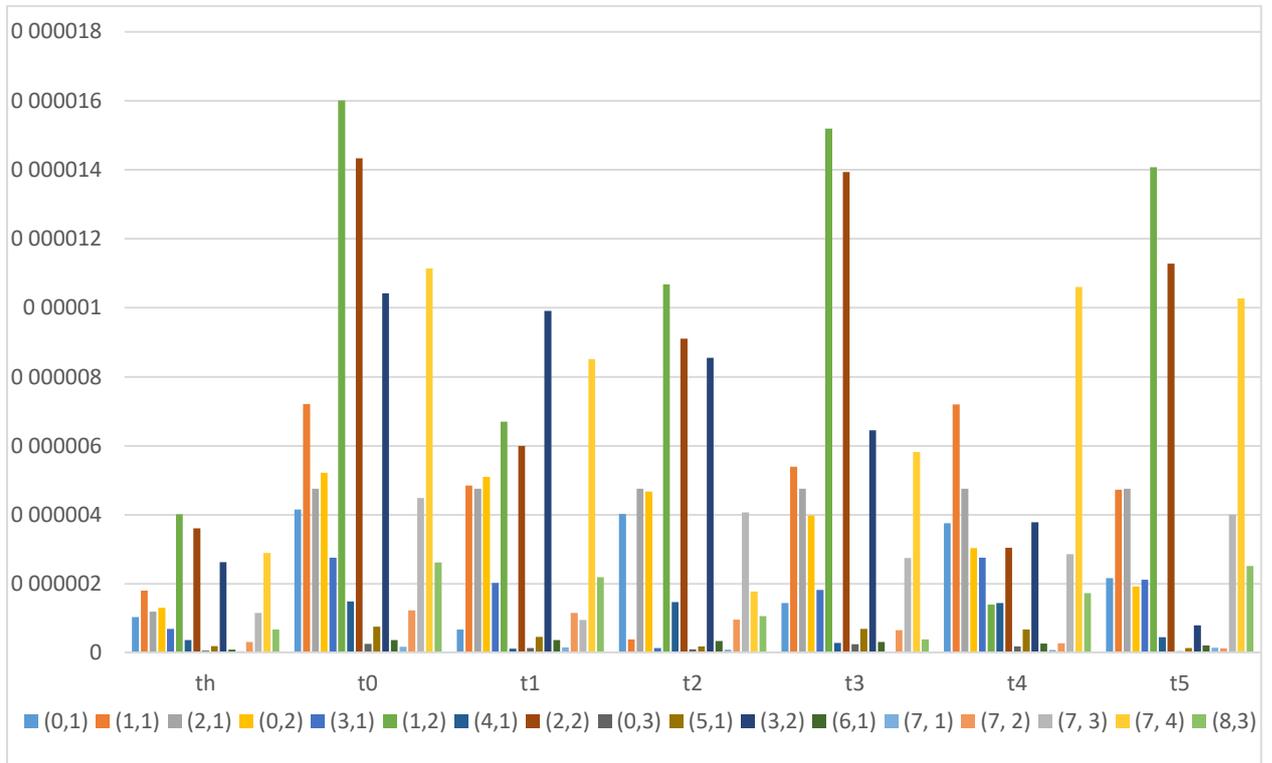


Рис. 38. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=5$ см от времени, уменьшенная величина силы

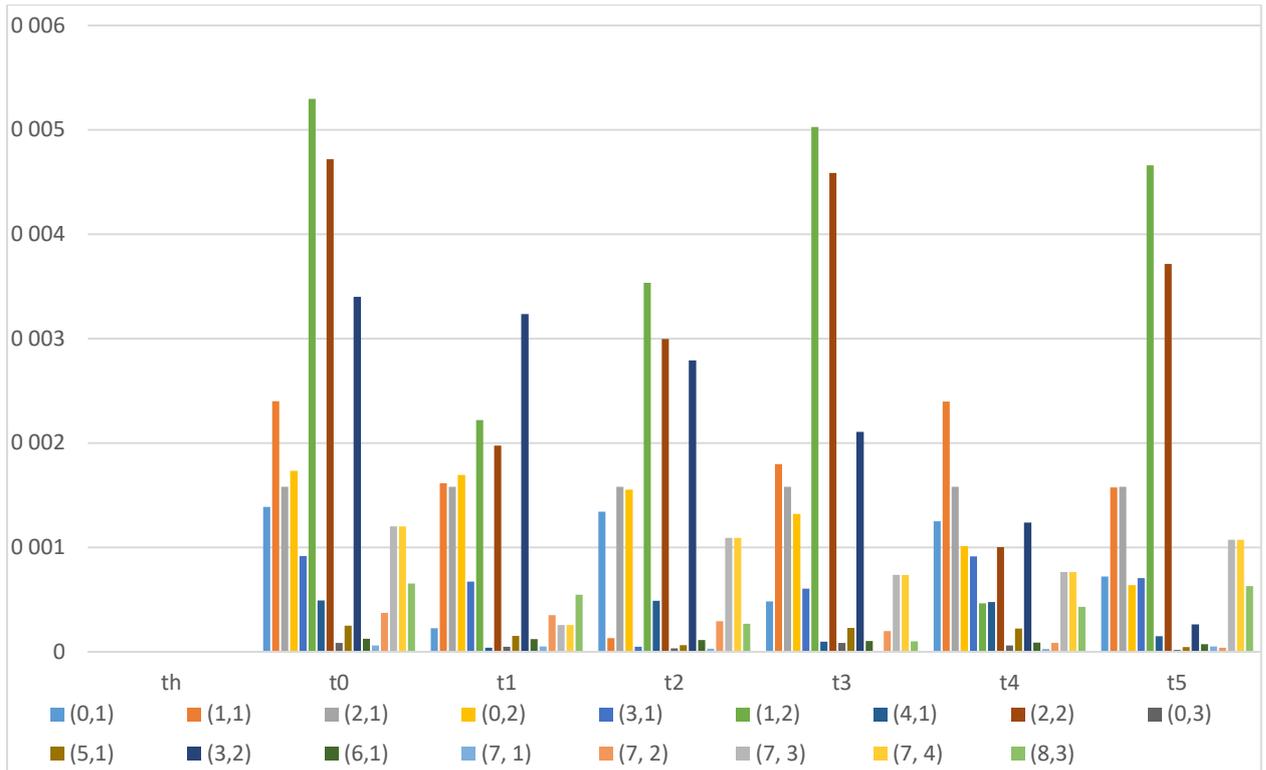


Рис. 39. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=5$ см от времени, уменьшенная величина силы

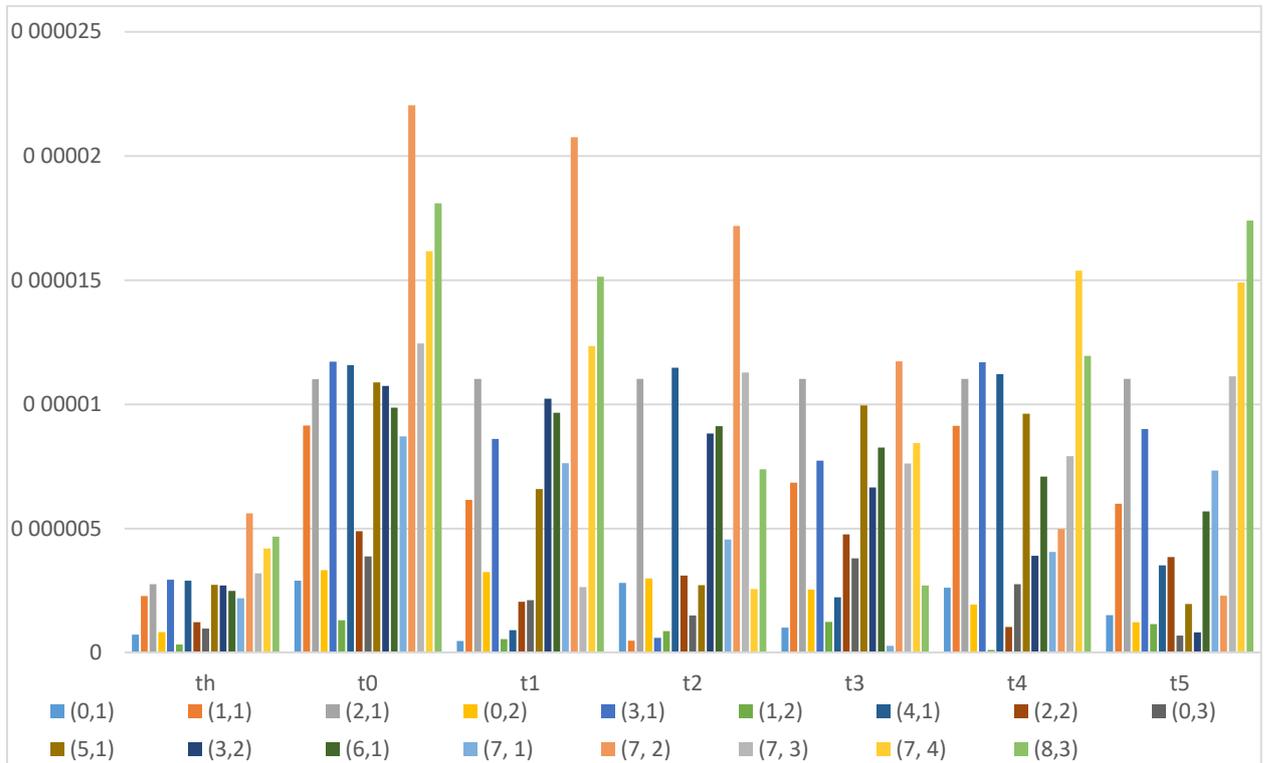


Рис. 40. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=10$ см от времени, уменьшенная величина силы

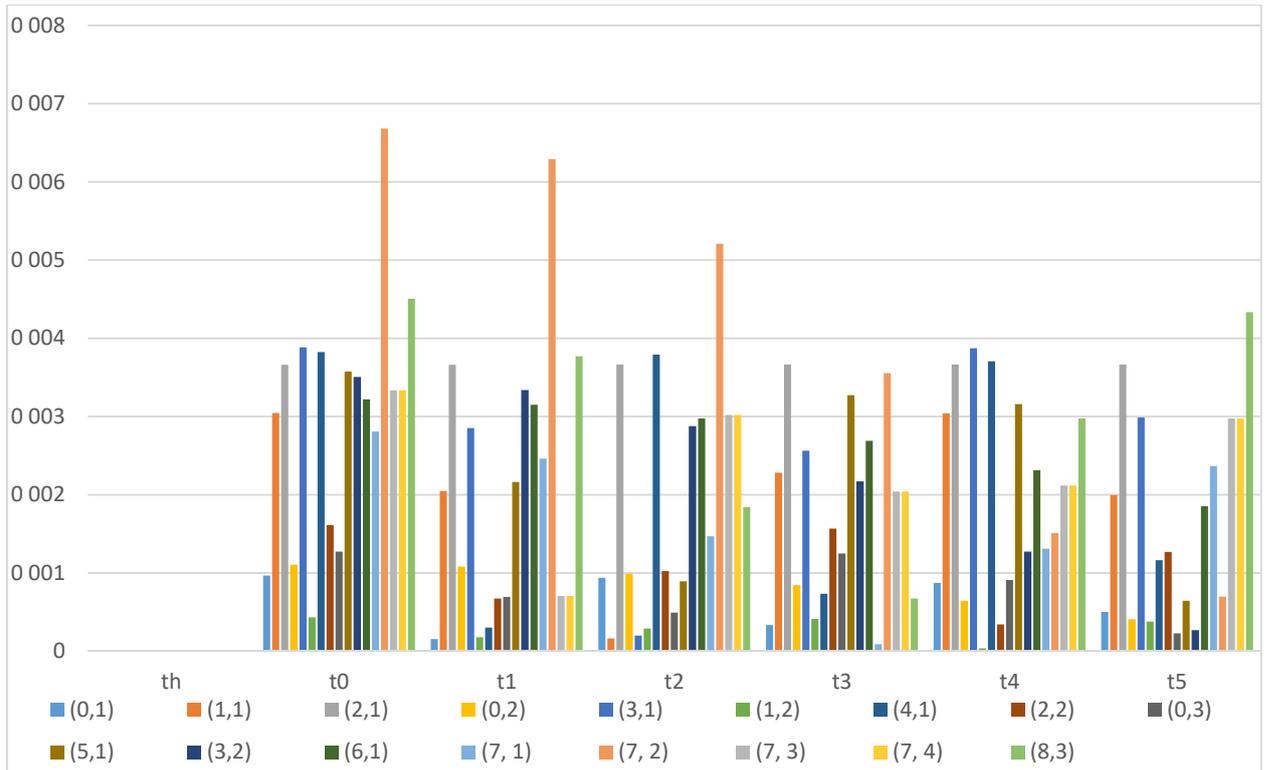


Рис. 41. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=10$ см от времени, уменьшенная величина силы

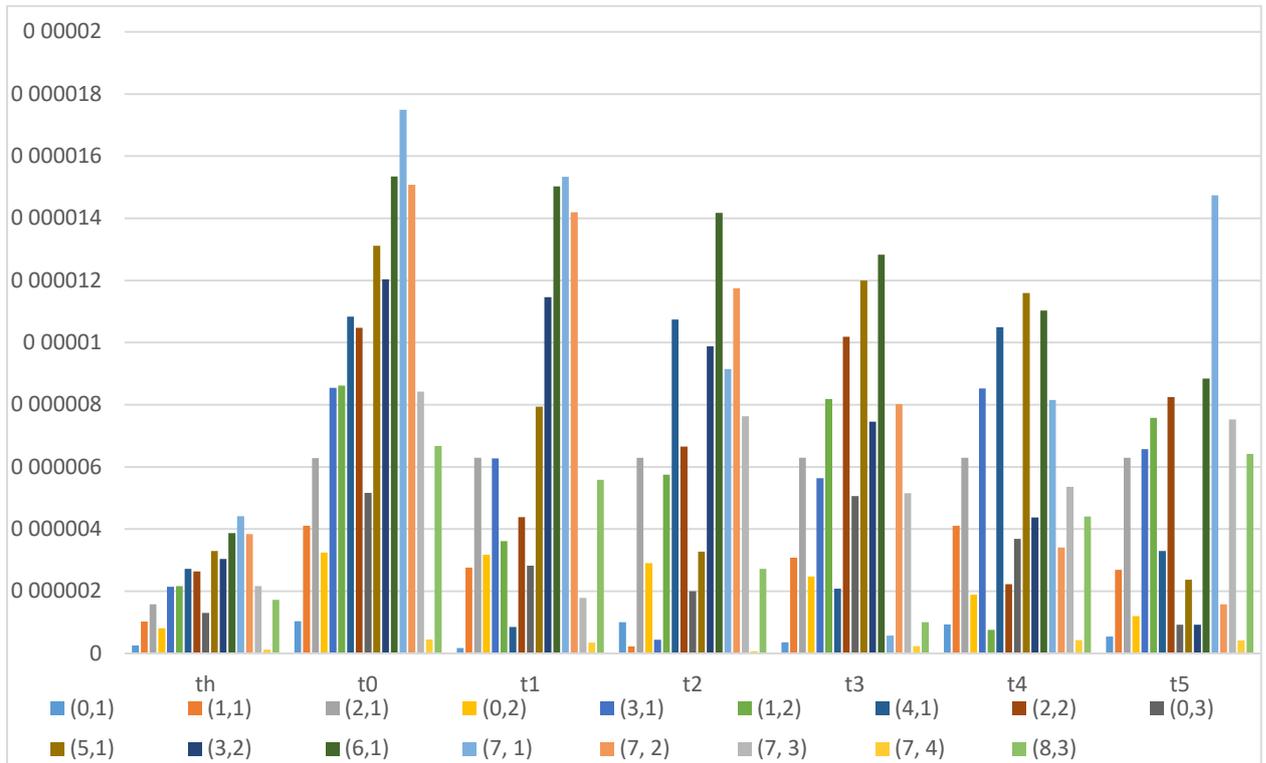


Рис. 42. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, уменьшенная величина силы

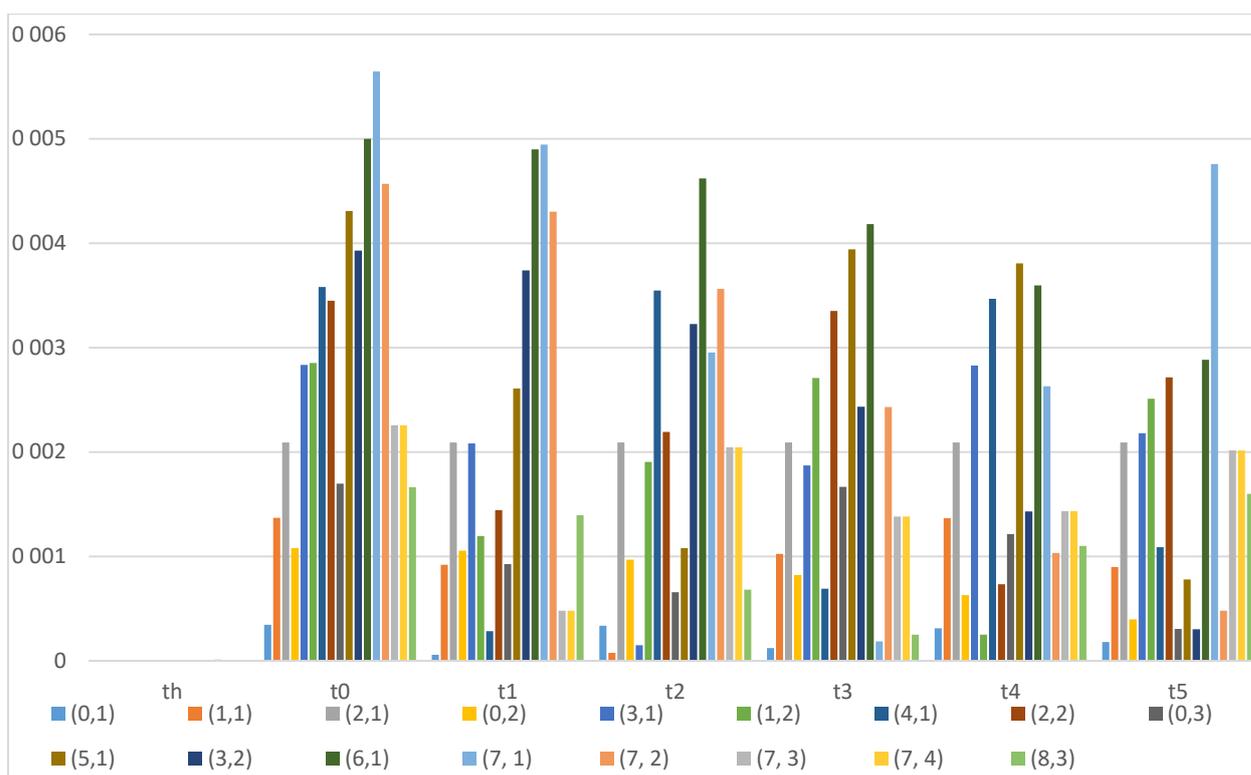


Рис. 43. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, уменьшенная величина силы

Из графиков, представленных на рисунках 36-43 видно, что уменьшение силы не вносит изменений во временную динамику возбуждаемых мод. Более того, данные на представленных графиках соответствуют данным, представленным на графиках на рисунках 13-19 с точностью до множителя для коэффициентов при симметричных и антисимметричных модах.

8.5. Тригонометрическая модель

Рассмотрим теперь взаимодействие мембраны с барабанной палочкой, используя тригонометрическую модель с параметрами системы, идентичными исходному случаю ступенчатой модели:

- Диаметр мембраны: 35.56 см
- Диаметр наконечника палочки: 12 мм
- Плотность мембраны: 2690 кг/м³
- Натяжение мембраны: 3200 Н/м

- Время взаимодействия: 5 мс
- Сила удара: 100 Н

На рисунках 44-51 представлены графики абсолютных величин коэффициентов при симметричных и антисимметричных модах от времени при нанесении удара в центр мембраны при такой конфигурации.

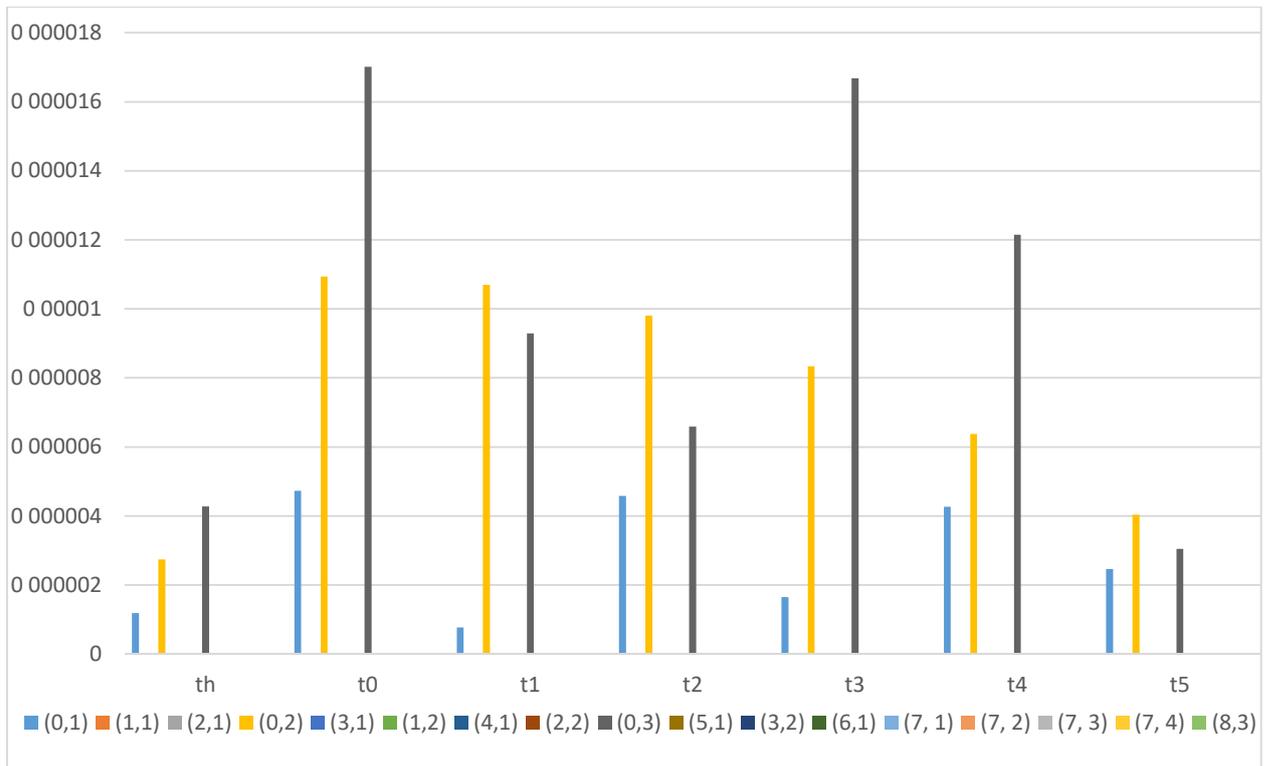


Рис. 44. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при ударе в центр мембраны от времени, тригонометрическая модель

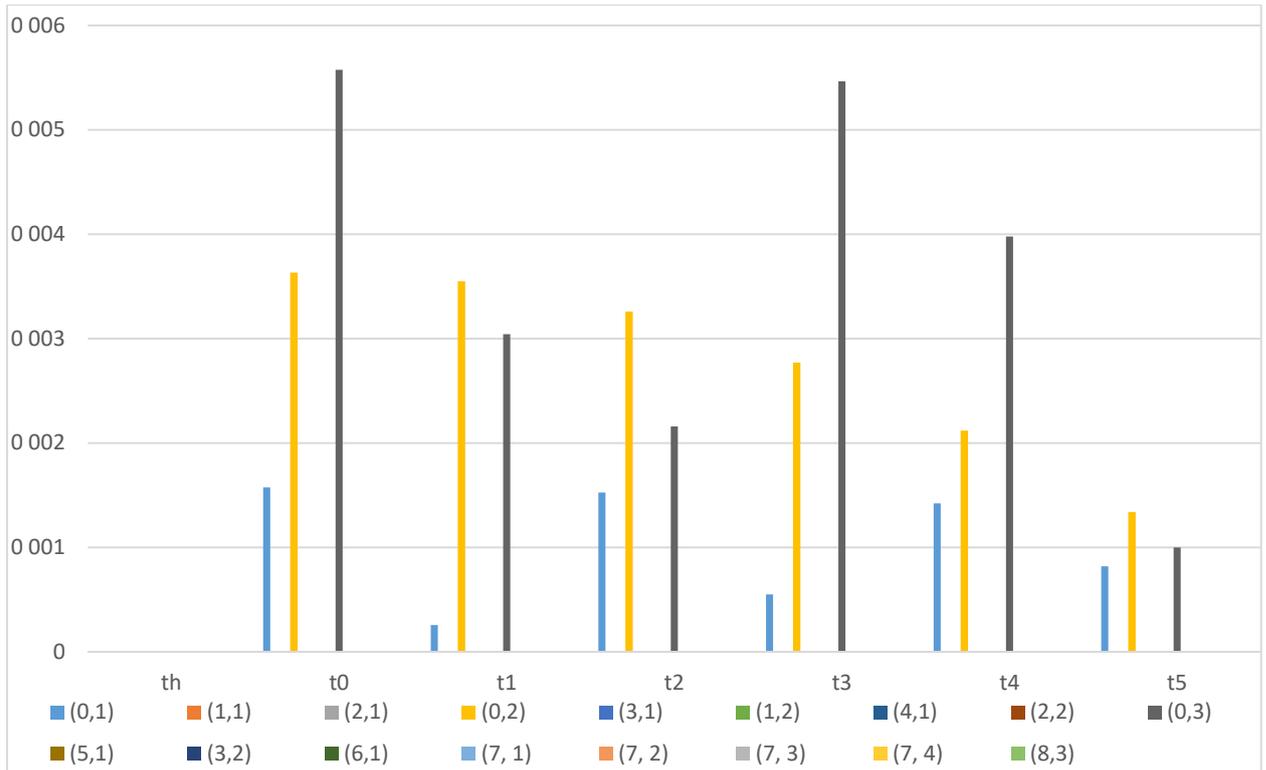


Рис. 45. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при ударе в центр мембраны от времени, тригонометрическая модель

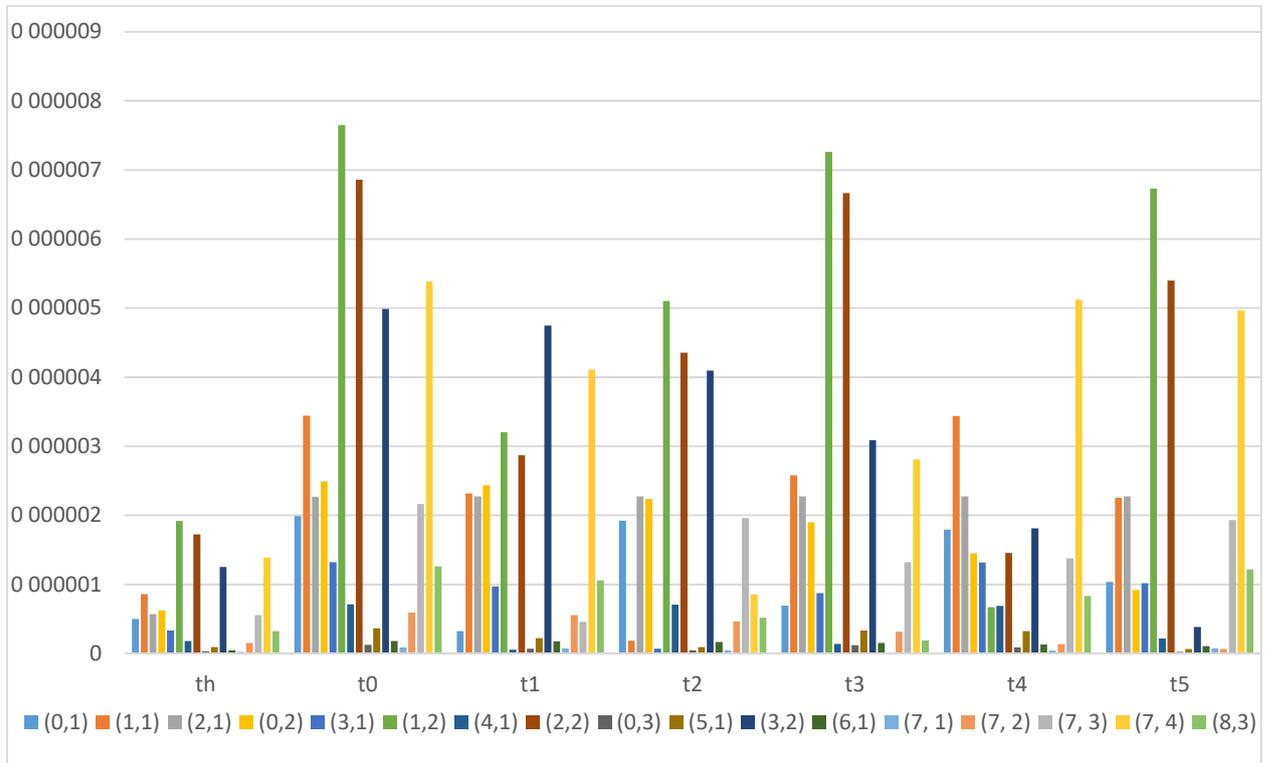


Рис. 46. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, уменьшенная величина силы

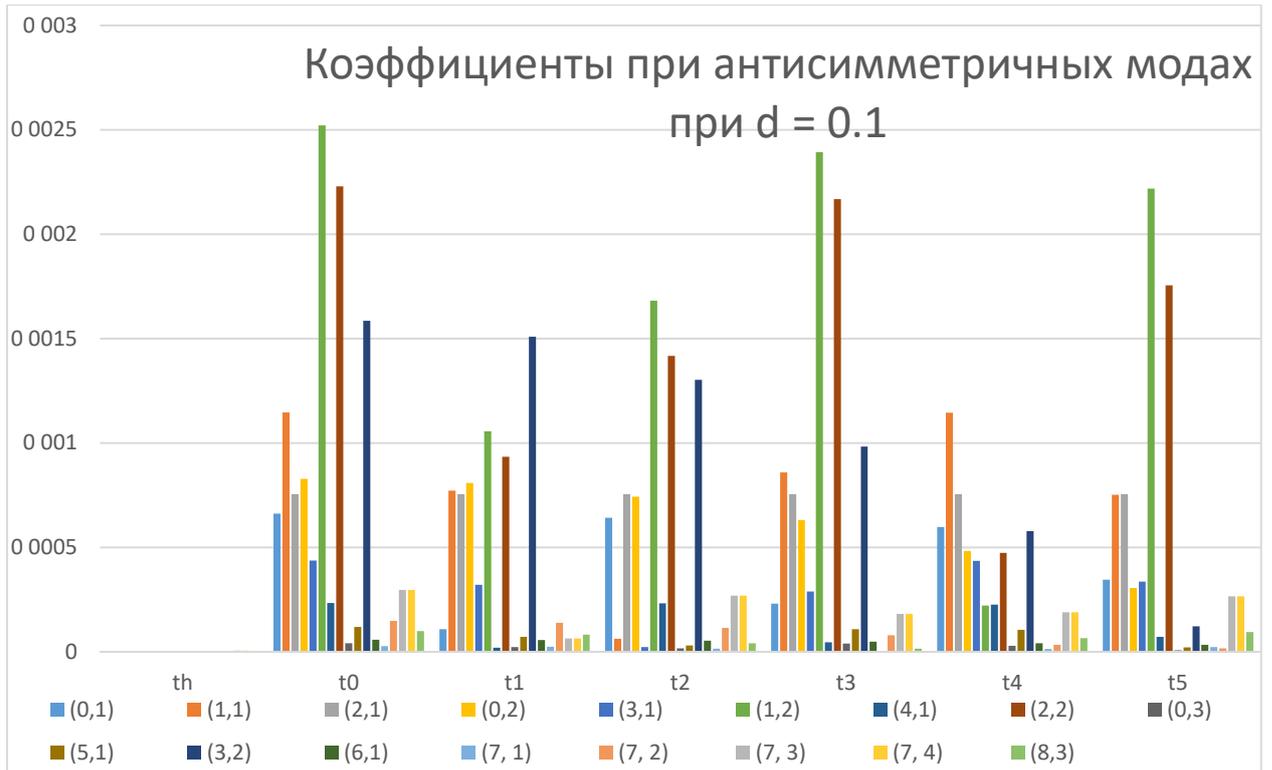


Рис. 47. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, тригонометрическая модель

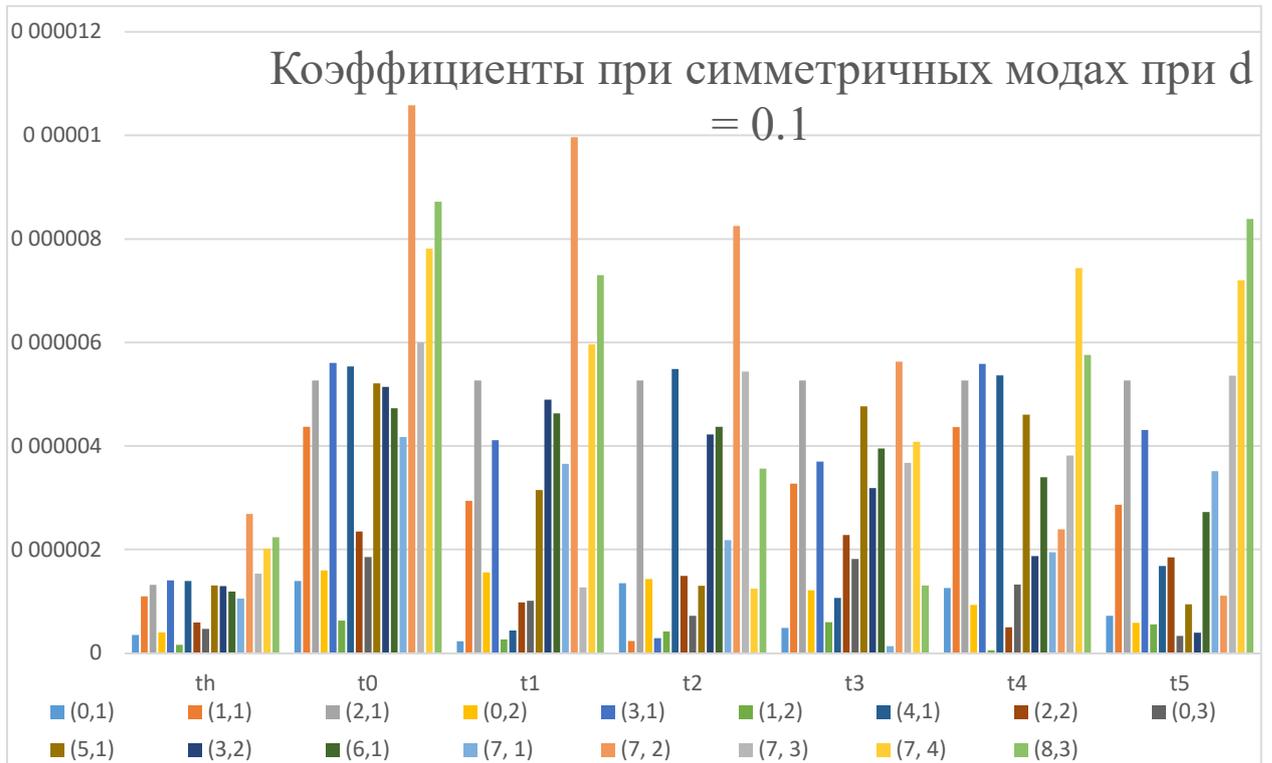


Рис. 48. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, уменьшенная величина силы

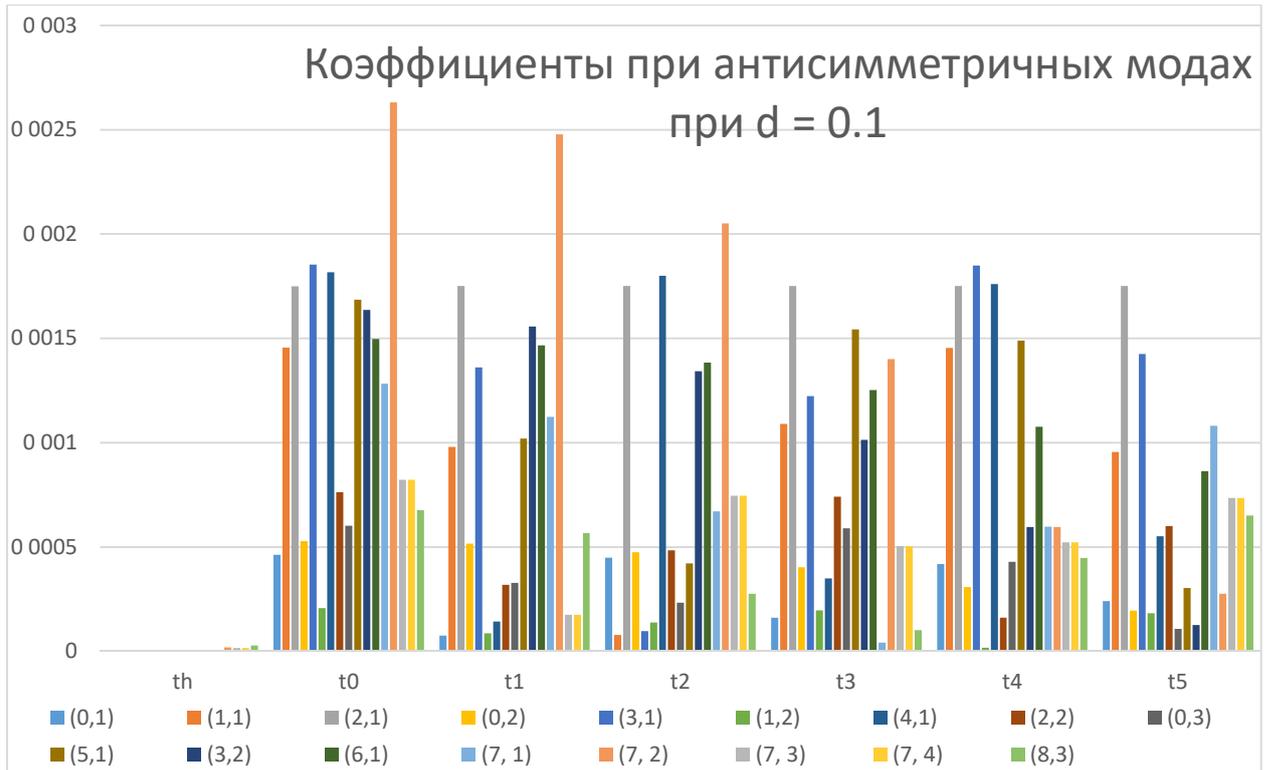


Рис. 49. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, тригонометрическая модель

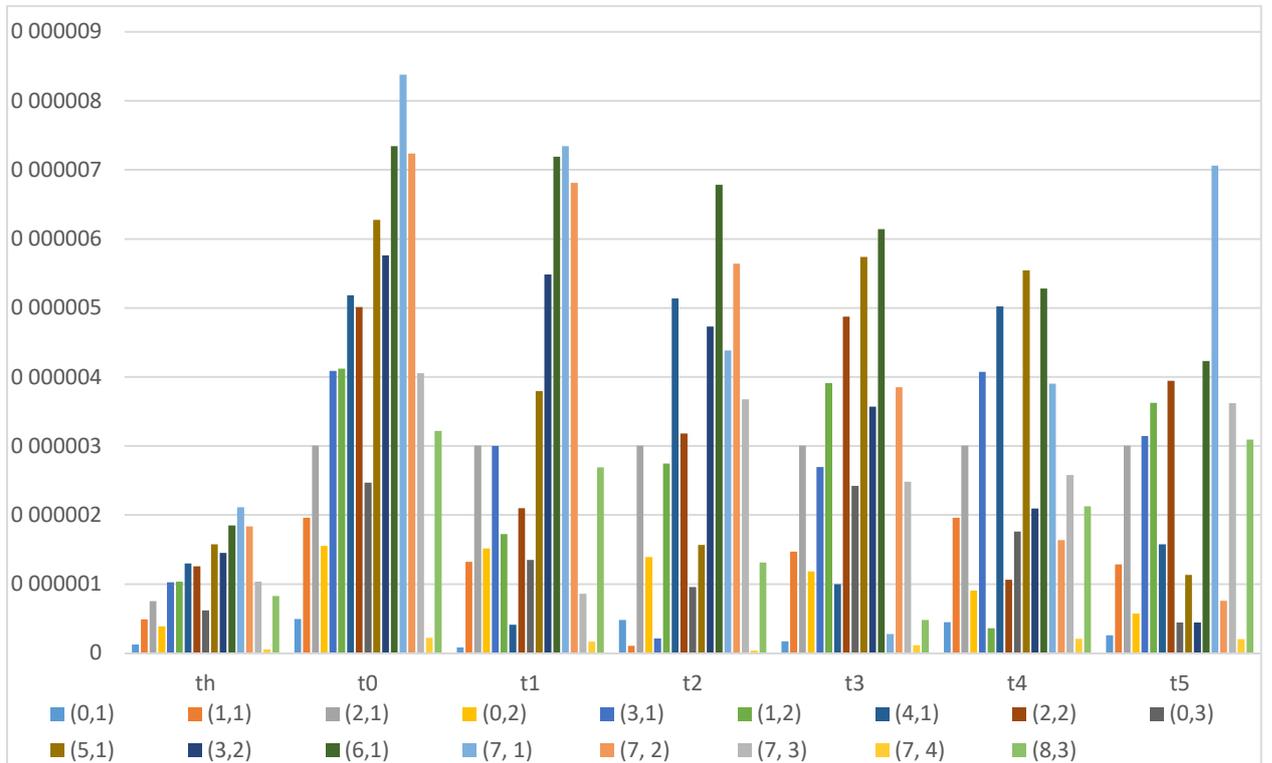


Рис. 50. График зависимости величин коэффициентов при симметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, уменьшенная величина силы

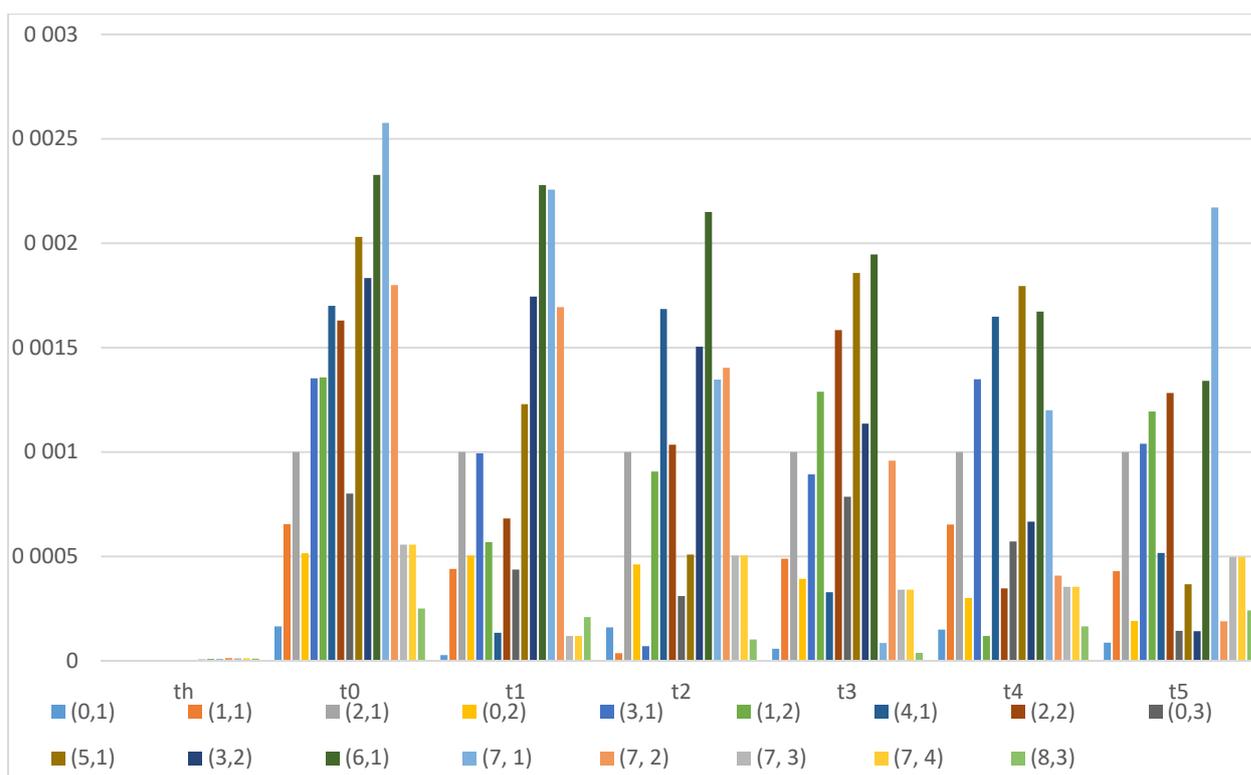


Рис. 51. График зависимости величин коэффициентов при антисимметричных модах при смещении $d=15$ см от времени, тригонометрическая модель

Из графиков, представленных на рисунках 40-51 видно, что использование тригонометрической модели взаимодействия не вносит изменений во временную динамику возбуждаемых мод. Более того, данные на представленных графиках соответствуют данным, представленным на графиках на рисунках 13-19 с точностью до множителя для коэффициентов при симметричных и антисимметричных модах.

Таким образом, можно сказать, что предложенные ступенчатая и тригонометрическая модели эквивалентны. В связи с этим, остальные случаи конфигурации системы для тригонометрической модели в настоящей работе рассмотрены не будут.

9. Заключение

В представленной работе было изучено взаимодействие барабанной палочки с барабанной мембраной. В частности, была исследована динамика колебаний первых девятнадцати мод идеальной круглой мембраны при различном удалении наносимого удара от центра мембраны, а также при различных характеристиках удара; проведены сравнительные характеристики.

В результате моделирования были получены следующие основные результаты:

- При удалении точки удара от центра возрастает интенсивность смешанных мод высших порядков, при этом интенсивность мод низших порядков, а также радиальных мод, снижается; наблюдается уменьшение абсолютных величин модальных коэффициентов при отдалении от центра
- Вариации таких параметров, как время контакта палочки с мембраной или силы удара, не вносят значительных изменений во временную динамику возбуждаемых мод, но увеличивает или уменьшает амплитуду возбуждаемых колебаний при соответствующих изменениях данных параметров
- При взаимодействиях с длительностью меньшей 20 мс амплитуды мод, возбуждаемых внешней силой, меньше на два порядка, чем при возбуждении передачей импульса
- Уменьшение отношения диаметра наконечника палочки к диаметру мембраны приводит к увеличению интенсивности возбуждаемых мод при ударе в центр мембраны, но к уменьшению при ударах, смещенных от центра

Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с физическими экспериментами и с музыкальной практикой.

В свете полученных результатов интерес также могла бы представлять модель мембраны с дополнительными внутренними граничными условиями в области контакта, вызванными продолжительным давлением палочки. Аналитическое исследование этого вопроса затрудняется существенной сложностью получения явных выражений. В связи с этим в работе было проведено только численное моделирование.

10. Список литературы

- [1] - Strickland, Edward. "Glass, Philip." *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Edited by Stanley Sadie and John Tyrrell. London: Macmillan, 2001. ix: 932-936
- [2] - Rayleigh Lord (1945). *Theory of sound*, 2 nd ed, Vol. I, Macmillian, New York (1894). Reprinted by Dover, New York
- [3] - Fletcher H, Bassett IG (1978). Some experiments with the bass drum. *J Acoust Soc Am* 64/6: 1570- 1576
- [4] - R. S. Christian, R. E. Davis, A. Tubis, C. A. Anderson, R. I. Mills and T. D. Rossing, "Effects of air loading on timpani membrane vibrations", *J. Acoust. Soc. Am.* 76, 1336–1345 (1984)
- [5] - Rossing T, Bork I, Zhao H & Fystrom DO (1992). Acoustics of snare drums. *J Acoust Soc Am* 92/1: 84-94.
- [6] - T. D. Rossing, 114th meeting, *Acoust. Soc. Am.*; abstract in *J Acoust. Soc. Am.* 82, S69 (1987)
- [7] - T. Rossing, "Acoustics of percussion instruments: Recent progress," *Acoust. Sci. & Tech.* 22, 177–188 (2001).
- [8] - Rossing, T.D. "The Science of Sound," Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1982)
- [9] - Rhaouti, A. Chaigne, and P. Joly, "Time-domain modeling and numerical simulation of a kettledrum," *J. Acoust. Soc. Am.* 105, 3545–3562 (1999)
- [10] - Bilbao, Stefan & Webb, Craig. (2013). Physical modeling of timpani drums in 3D on GPGPUs. *Journal of the Audio Engineering Society.* 61. 737-748

- [11] - Кезик В. И. “Эквивалентные параметры круглой однородной мембраны”
Техническая акустика том 14, 1819-2408 (2015).
- [12] - A. Chaigne and A. Askenfelt, “Numerical simulations of struck strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods,” J. Acoust. Soc. Am. 95, 1112–1118 (1994)
- [13] - K. van den Doel and D. Pai, “Modal synthesis for vibrating objects,” in Audio Anecdotes III, edited by K. Greenebaum (A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2007)
- [14] - Edgar Berdahl, Bill Verplank, Julius O. Smith III, and Gunter Niemeyer, “A physically-intuitive haptic drumstick” In Proc. International Computer Music Conf, Vol. 1, pp. 363-366 (2007)
- [15] - C. Jin, A. Davoodabadi, J. Li, Y. Wang, T. Singler, Spherical indentation of a freestanding circular membrane revisited: analytical solutions and experiments. J. Mech. Phys. Solids 100, 2017, 85
- [16] - Jin, Congrui. (2009). Theoretical study of mechanical behavior of thin circular film adhered to a flat punch. International Journal of Mechanical Sciences - INT J MECH SCI. 51. 481-489. 10.1016/j.ijmecsci.2009.04.003.
- [17] - Begley, Matthew & Mackin, Thomas. (2004). Spherical indentation of freestanding circular thin films in the membrane regime. Journal of The Mechanics and Physics of Solids - J MECH PHYS SOLIDS. 52. 2005-2023. 10.1016/j.jmps.2004.03.002.
- [18] - Andreas Wagner. “Analysis of Drumbeats – Interaction between Drummer, Drumstick and Instrument”, Master’s Thesis at the Department of Speech, Music and Hearing (TMH), 2005
- [19] - S. Dahl. Spectral changes in the tom-tom related to striking force. Speech Music and Hearing Quarterly Progress and Status Report, 38(1):059–065, 1997.
- [20] - А. И. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнение математической физики*, Наука, М., 1972

[21] - Смирнов В. И., *Курс высшей математики*, т. 2, Наука, М., 1967, стр. 196

[22] - G. N. Watson, *Theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944, стр. 106

[23] - Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М., *Основные дифференциальные уравнения математической физики*, Гос. изд-во ФМЛ, М., 1962

[24] - <https://en.wikipedia.org/wiki/Drumhead>

[25] - <https://www.ludwig-drums.com/en-us/ludwig/products/snare-drums/supraphonic>