МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА»

Основная профессиональная образовательная программа
Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование
Направленность (профиль) «Математическое образование»
форма обучения – очная

Выпускная квалификационная работа

Обучение применению элементов интегрального и дифференциального исчисления для реализации прикладной направленности школьного курса математики

Обучающейся 2 курса
Гавриковой Татьяны Анатольевны

Научный руководитель:
Доктор педагогических наук, доцент
Снегурова Виктория Игоревна

Рецензент:
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа
Аркина Ксения Георгиевна

Санкт-Петербург
2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ **3**

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ПРИМЕНЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ШКОЛЕ **9**

1.1. Содержание понятия прикладная направленность при обучении математике 9

1.2. Роль и место тем «Производная» и «Интеграл» и их приложений в школьном математическом образовании 11

1.3. Базовые понятия дисциплин естественно-научного цикла, интерпретируемые с помощью производной 17

1.4. Базовые понятия дисциплин естественно-научного цикла интерпретируемые с помощью интеграла 29

1.5. Анализ задач прикладной направленности в отдельных школьных учебниках по «Алгебре и началам математического анализа» по темам «Производная» и «Интеграл» 36

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА РАБОТЫ С НАБОРОМ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМ «ПРОИЗВОДНАЯ» И «ИНТЕГРАЛ» **42**

2.1. Набор задач прикладной направленности при изучении тем «Производная» и «Интеграл» 42

2.2. Методика работы с задачами прикладной направленности при изучении тем «Производная» и «Интеграл» 73

2.3. Констатирующий эксперимент и его результаты 85

Выводы по главе 2. 89

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. **91**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 93

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 .... **99**

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 .... **101**

ВВЕДЕНИЕ

Для современной математики характерно то, что она интенсивно применяется в различных отраслях науки. Математика проникла во все сферы деятельности, и сейчас никого не удивишь такими направлениями как математическая биология или математическая физика. Для многих отраслей знания математика стала не только орудием количественного расчета, но и методом точного исследования. Российский математик 19 века Чебышев П. Л. говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека…» [39]. Эта идея отражена в требованиях Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования [2] в котором указано, что одним из важных аспектов обучения математике в школе является его практическая ориентация, которая заключается в направленности обучения на формирование у школьников понимания роли математики в описании объектов окружающего мира, подготовку учащихся к использованию математических методов для решения широкого круга проблем из других областей знаний. В связи с этим актуальным становится практическое внедрение концепции усиления прикладной направленности математики в системе школьного математического образования при изучении различных разделов, в том числе и таких весомых как «Производная» и «Интеграл». Однако реализация этого требования вызывает необходимость высокого уровня подготовки учителя, владение запасом математических знаний прикладной направленности, умения преподнести эти знаний и использовать на уроке различные методические средства.

Производная и интеграл составляют значительную часть школьного курса «Алгебры и начал математического анализа» и являются сложными темами для изучения и понимания. Французский математик Э. Борель в своей статье подчеркивал сложность дифференциального и интегрального исчисления отмечая, что «одно имя… вселяет в непосвященных страх» [7]. Калинин С.И. [12], [13], [14], [15], Брайчев Г.Г., Меньшикова А.П. [31] , Гербеков Х. А. [8] , Аракелян К. Г., Болтянский В. Г. [5] обозначают проблемы, возникающие при обучении производной и интегралу, и отдельно отмечают оторванность данных тем от действительности, то есть отсутствие у учащихся интерпретаций этих понятий в других дисциплинах: физике, химии, биологии, экономике. Это во многом связано с тем, что состав задач прикладной направленности в школьных учебниках ограничен, отсутствует разнообразие имеющегося материала, в процессе обучения математике недостаточно внимания уделяется решению задач прикладной направленности, связь изучаемого материала с его применением в других областях знаний осуществляется эпизодически. Однако, владение методами решения различных задач, имеющих прикладное значение, с использованием производной и интегралов способствует формированию:

1) метапредметных результатов, таких как умение выявлять математическую проблему в контексте других дисциплин и в окружающей жизни; понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

2) предметных результатов, таких как практически значимые математические умения и навыки, способность их применения к решению математических и нематематических задач, предполагающие использовать алгебраический язык для описания предметов окружающего мира и создания соответствующих математических моделей;

3) развитию познавательного интереса к другим дисциплинам вследствие рассмотрения задач, непосредственно связанных с ними.

В данном исследовании в качестве средства реализации прикладной направленности при обучении элементам математического анализа представлены задачи из других областей знаний. Указанные задания имеют свои особенности, одной из которых является рассмотрение математической модели при решении. В настоящее время математическое моделирование является универсальным инструментом научно-технического прогресса. Его сущность – замена исходного объекта соответствующей математической моделью и в дальнейшем её рассмотрение. Задачи прикладной направленности, решаемые с использованием производной и интеграла, которые предполагается рассмотреть в данной работе, могут продемонстрировать возможность рассмотрения одной математической модели применительно к реальным задачам, решаемым в различных областях: физике, биологии, химии, экономике.

Таким образом, можно выделить противоречия между требованиями к результатам усвоения математического содержания, рассматриваемыми в ФГОС ОО, и недостаточным уровнем прикладных знаний по теме: «Производная» и «Интеграл»; между необходимостью использования соответствующих учебных пособий с набором задач для реализации прикладной направленности математики и недостаточным их количеством. Проблема исследования направлена на разрешение выше отмеченных противоречий.

Объектом исследования является прикладная направленность курса алгебры и начал математического анализа.

Предмет исследования – набор задач прикладной направленности с использованием производной и интеграла на естественнонаучном содержании и методических рекомендаций по их применению.

Цель исследования – разработка набора задач прикладной направленности из физики, химии, биологии, экономики с использованием производной и интеграла, создание средств и методических рекомендаций по их применению, ориентированную на усиление прикладной направленности при обучении алгебре и началам математического анализа в школьном курсе математики.

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- на основе анализа учебно-методической литературы изучить современные трактовки понятие прикладной направленности при обучении математике и выделить наиболее приемлемое для данной работы;
- проанализировать содержание задач прикладной направленности с естественнонаучным содержанием в отдельных школьных учебниках по «Алгебре и началам математического анализа» по темам «Производная» и «Интеграл»;
- разработать набор задач, реализующих прикладную направленность математики по темам «Производная» и «Интеграл»;
- разработать методику работы с набором задач прикладной направленности по темам «Производная» и «Интеграл»;
- провести констатирующий эксперимента и проанализировать результаты.

Для достижения поставленных цели и задач использовались следующие методы исследования.

Теоретические методы: анализ научно-методической литературы, диссертаций, анализ нормативных документов (ФГОС С(П)ОО).

Эмпирические методы: тестирование, констатирующий эксперимент.

Гипотеза исследования: использование разработанного набора задач и методических рекомендаций будет способствовать:

- расширению прикладных знаний по применению элементов интегрального и дифференциального исчисления при решении задач по предметам естественнонаучного цикла и экономики;
- повышению интереса у учащихся к решению математических задач.

Положения, выносимые на защиту.

1. Для усиления прикладной направленности при обучении элементам интегрального и дифференциального исчисления необходимо разработать набор задач на содержании предметов естественнонаучного цикла и экономики.

2. Для использования разработанного набора задач прикладной направленности, способствующих применению элементов интегрального и дифференциального исчислений в других областях необходимы методические рекомендации, которые будут:

- демонстрировать методические приемы работы с задачами;
- учитывать уровень подготовки учащихся и их индивидуальные особенности усвоения математического содержания;
- ориентироваться на специфику обучения математике в классах разного профиля.

Сформулируем основные результаты проведенного исследования:

1) на основе анализа научно-методической литературы, диссертаций и нормативных документов (ФГОС С(П)ОО):
   - изучены современные трактовки понятия «прикладная направленность» для выбора наиболее приемлемого в рамках данного исследования, представленная в диссертации В.П. Кизиловой;
   - определены роль и место темы «Производная» и «Интеграл» в школьном курсе математики;
2) на основании сравнительного анализа отдельных школьных учебников по алгебре и началам математического анализа, а также анализа констатирующего эксперимента, определены возможности обучения элементам интегрального и дифференциального исчисления для реализации прикладной направленности математики при изучении тем «Производная» и «Интеграл»;
3) разработан набор задач по темам «Производная» и «Интеграл», реализующих прикладную направленность в различных областях науки (физике, химии, биологии, экономике);
4) разработана методика работы с указанными задачами при изучении тем «Производная» и «Интеграл»;

5) проведен констатирующий эксперимент с учащиеся 11-го класса 594 школы Московского района и представлен анализ результатов.

Работа состоит введения, двух глав, 8 параграфов, заключения, списка литературы и приложений.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ПРИМЕНЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ШКОЛЕ

1.1. Содержание понятия прикладная направленность при обучении математике

Впервые понятие «прикладная направленность» школьного курса математики было введено в научно-методическую литературу советским педагогом-математиком В.В. Фирсовым (1974 г.), который определял это понятие как осуществление целенаправленной содержательной методической связи школьного курса математики с практикой, которая предполагает введение в школьную математику специфических моментов, характерных для исследования прикладных проблем математическими методами [44]. Идеи прикладной направленности школьного курса математики были отражены и в более поздних исследовательских работах (И. А. Иванова, Г. В. Дорофеева, Н.А. Терешина, Ю. Ф. Фоминых, С. Л. Соболева, Е.Н. Эрентраут и др.). В этих работах авторы раскрывают сущность понятия прикладной направленности, рассматривают отдельные методические вопросы данной проблемы и предлагают пути их решения. Они используют различные понятия: прикладная направленность, практическая направленность. Приведем несколько наиболее известных взглядов на проблему реализации прикладной направленности преподавания математики в школе, появившиеся в последние десятилетия.

Российский математик-педагог Ю. М. Колягин и доктор педагогических наук В.В. Пикан считают, что «прикладная направленность обучения математике состоит в ориентации содержания и методов обучения на применение математики в технике и смежных науках, в профессиональной деятельности, в сельском хозяйстве и в быту» [19, с. 27]. При этом они различают и «практическую направленность обучения математике, направленность содержания и методов обучения на решение задач и упражнений, на формирование у школьников навыков самостоятельной деятельности математического характера».

Доктор педагогических наук Н.А. Терешин интерпретирует прикладную направленность при обучении математике как ориентацию содержания и методов обучения на применение математики для решения задач, возникающих вне математики, что в целом согласуется со взглядом предыдущих авторов [42], [43].

Кандидат педагогических наук И.М. Шапиро под прикладной направленностью обучения математике полагает ориентацию его содержания и методов на тесную связь с жизнью, основами других наук, на подготовку школьников к использованию математических знаний в предстоящей профессиональной деятельности. Отдельно он выделяет практическую направленность обучения математике, направленность содержания и методов обучения на формирование у обучающихся навыков самостоятельной деятельности, универсально-трудовых навыков планирования и рационализации своей деятельности. Он отмечает, что прикладная и практическая направленность обучения неразрывно связаны в реальном учебно-воспитательном процессе [45].

Советский учёный, основатель Института математики Сибирского отделения АН СССР, академик АН СССР С. Л. Соболев отмечал, что источник и цель математики – в практике. Также он указывал, что, усиление прикладной направленности обучения математике имеет положительное влияние на качество обучения самой математике [28]

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа педагогического института Владимирского государственного университета Соловьева О.В. пишет об актуальности проблемы разработки методик прикладной направленности обучения математики в учебном процессе и рассматривает прикладную направленность школьного курса математики как обучение математике, ориентированное на применение в учебном процессе в содержания и логики прикладной математики [40].

Дорофеев Г. В. интерпретирует прикладную направленность обучении математике как ориентацию содержания и методов обучения на применение математики в технике и смежных науках [9].

Кандидат педагогических наук Челябинского государственного педагогического университета Эрентраут Е.Н. отмечает, что математические задачи с практическим содержанием – это такие задачи, которые связаны с применением математики в технике, физике, химии, экономике, биологии, медицине, экологии, а также в быту [48].

В диссертации Кизиловой В.П. прикладная направленность обучения определена как ориентация содержания и методов обучения на формирование умений применять математический аппарат для решения задач в различных отраслях научного знания, смежных учебных дисциплинах [18]. В данной работе будет использоваться именно это смысловое значение термина «прикладная направленность».

Вывод к п. 1 главы 1

Таким образом, в результате анализа научно-методической литературы из имеющихся современных трактовок понятия «Прикладная направленность» было выбрано наиболее приемлемое для данного исследования, представленное в диссертации В.П. Кизиловой.

1.2. Роль и место тем «Производная» и «Интеграл» и их приложений в школьном математическом образовании

Включение таких значимых тем математического анализа как «Производная» и «Интеграл» в школьный курс – проблема многогранная и противоречивая. На протяжении столетий данные вопросы вызывают дискуссии в педагогических кругах. Споры о целесообразности изучения этих разделов в школьном курсе математики не утихают до сих пор. Одни считают, что эти разделы следует исключить из школьного курса математики. Они аргументируют это тем, что изучение данных разделов имеет чисто формальный характер. Вследствие этого указанные темы остаются неинтересными и непонятными школьникам. Другие утверждают, что элементы математического анализа стоит изучать не только для того, чтобы поступить в вуз и успешно осваивать соответствующий тематике материал, но и для демонстрации прикладных возможностей аналитического аппарата [17]. Такая противоречивая ситуация существует в настоящий момент, и возникает естественный вопрос, что же было в прошлом? Элементы математического анализа были представлены в школьной программе не всегда. Совершим небольшой экскурс в прошлое российского математического образования и изучим хронологию включения этих тем высшей математики в школьные программы.

Первые учебные заведения, в программу которых входили основы высшей математики согласно уставу учебных заведений 1804 года, были русские гимназии. Принятие устава – одно из достижений реформ Александра I в области образования и просвещения, начатые еще Екатериной II [46]. Программы преподавания учебных предметов были широки и отражали влияние идей Просвещения. Школьный Устав определял программу основных учебных курсов всех учебных заведений. Например, 21 пункт упомянутого устава гласит: «Учитель математики и физики преподает уроки в неделю по 18 часов: в первом классе обучает по шести часов в неделю, проходя по порядку части чистой математики: алгебру, геометрию и плоскую тригонометрию. Во втором классе сей же учитель, обучая по шести часов в неделю, оканчивает чистую и начинает прикладную математику и опытную физику. В третьем классе, обучая также по 6 часов в неделю, продолжает и оканчивает прикладную математику и опытную физику» [1, 631 с.]. Представленная обширная программа, включающая прикладную математику и физику, предполагала подготовку образованного и «благовоспитанного» человека для дальнейшего обучения. Таким образом, цель учреждения губернских гимназий определялась следующим образом: приготовить учащегося к слушанию университетских наук [16]. Однако под давлением общественной реакции в 1819 году вводится «Уваровский план» и из курса гимназий исключаются начала дифференциального и интегрального исчисления [23]. В книге И. Алешинцева «Исторія гимназическаго образованія въ Россіи» отмечено, что «необходимость сокращения учебного курса гимназий стало чуть ли не общим мнением» [4, 64 с.]. В 30–60-х годах XIX в. передовые деятели того времени – российский математик и механик М.В. Остроградский (1801- 1861), русский математик В.Я. Буняковский (1804-1889), российский математик и механик, основоположник петербургской математической школы П.Л. Чебышев (1821-1894)- постоянно выступали за возврат элементов высшей математики в курс средней школы. Русская реформа начала 20 века поднимала вопросы о включении начал высшей математики в образовательный процесс средних школ. В 1900 г. для разработки новых программ была создана комиссия. Под руководством ее председателя Н.И. Билибина, были составлены новые учебные планы для шести типов средней школы, включая школы с бифуркацией и школы с индивидуальным обучением на старшей ступени [20]. Преподавание основ высшей математики восстанавливается в реальных училищах по новым программам 1906 года. Некоторые частные средние учебные заведения, например, Преображенская новая школа в Петербурге, проявляют инициативу уже в 1908 – 1909 гг. и накапливают опыт преподавания основ высшей математики [23]. Военное ведомство в 1911 году вводит этот курс в кадетских корпусах. С ростом научных знаний, усложнением видов вооружения, изменением тактики военных действий эти преобразования в кадетских корпусах и военных гимназиях были крайне необходимы [49]. Однако, программы по математике большинства средних учебных заведений не были затронуты этой реформой [17].

Вопросы преподавания бесконечно-малых обсуждается на 1 и 2 съездах (1913/1914) математики [23]. Председателем 2 съезда Попруженко М.Г. был внесен ценный вклад в решение проблемы введения начал анализа в среднюю школу [27]. В основу предложенной программы он положил лучшие французские, немецкие и русские курсы по анализу. В ней рассмотрены следующие темы: функции, пределы, бесконечно малые величины, непрерывность, производная и ее отыскание, признаки возрастания, убывания, постоянства. максимум и минимум, интеграл, простейшие приемы интегрирования, вычисление объемов тел вращения. Надо отметить, что тема, касающаяся приложений производных и интегралов, отсутствовала [27]. В первых примерных советских учебных планах и программах нашли выражение следующие передовые идеи: введение основ дифференциального и интегрального исчислений, теория рядов, дифференциальные уравнения с приложением их к вопросам физики и техники. Таким образом, в течение 20-х годов в школах второй ступени (на 8 и 9 –х годах обучения) наряду с традиционными курсами изучались элементы высшей математики – начала анализа.

С введением в начале 30 годов единой школьной программы по математике было отброшено многое важное и полезное, в том числе и элементы высшей математики [27]. В 30-х и 40-х годах XX в. преподавание математики в школе проводилось по сокращенным программам и переработанным учебникам, поэтому введение элементов высшей математики было невозможным [17]. Несколько десятилетий не использовались важные математические понятия вплоть до реформы академика А. Н. Колмогорова.

В 1947 году Маркушевичем А.И., Четверухиным Н.Ф., Гончаровым В.Л., Дубновым Я.С. и Арнольдом И.В. создан проект новой программы, « в которой главной целью становилось сближение математики как учебного предмета с математикой-наукой и предусматривалось, в частности, изучение математического анализа…» [20, 170 с.] Но проект был отвергнут, так как его осуществление представлялось невозможным из-за недостаточной подготовки (отсутствие учебников и соответствующей подготовки учителей). В 1948 году была официально утверждена другая программа [21].

В 60 –е годы проводится экспериментальная работа в отдельных школах по изучению элементов математического анализа. В качестве примеров можно привести душанбинскую среднюю школу №31 (1961/62) [32], среднюю школу №8 Волгограда , в которой по инициативе кафедры педагогики и психологии Волгоградского педагогического института им. А.С. Серафимовича в 1963/64 учебном году планировалось ознакомить учащихся с элементами интегрального исчисления и дифференциальными уравнениями.; школу №304 Москвы , в которой проводил экспериментальную работу ИМО АПН в 11-х классах [26].

В 1964 году создается центральная программная комиссия во главе с академиком А.Н. Колмогоровым и вырабатывается новый проект радикальной реформы (варианты 1965, 1966, 1967) , который был поставлен на широкое обсуждение и предполагал введение элементов дифференциального и интегрального исчисления в старших классах средних школ. Авторы проекта Болтянский В.Г., Колмогоров А. Н., Макарычев Ю. А., Яглом И.М. и другие [27]. В программы средних школ на 1964/65 и 1965/ 66 учебные годы была включена тема «Производная и ее применение к исследованию функций» [35], [36]. В последующие годы вплоть до 1973 года «… в целях разгрузки учащихся из программы …полностью исключена тема «Производная и ее применение к исследованию функции» [37, 8 с.]. Реформа начала реализовываться только в начале 70-х, и с 1973 года эти темы были опять включены в программы по математике средних школ. [34].

В настоящее время «Производная» и «Интеграл» составляют значительную часть школьного курса «Алгебры и начал математического анализа». В 10 – 11 классах – 29 часов «Производная и ее применение» на базовом уровне и 36 – на профильном и 11 часов «Интеграл» на базовом уровне и 13 часов – на профильном, однако, стоит отметить, что уроков, посвященных прикладным задачам по теме « Производная» и « Интеграл», незначительное количество [38]. Однако данный раздел находит много направлений приложений, поскольку изучает математические структуры, моделирующие реальные процессы окружающего нас мира, и его полноценное освоение объективно важно. Это универсальный инструмент при решении многих физических, химических, биологических, экономических задач и задач из многих других областей науки и техники. Кроме того, прикладные задачи по дифференциальному и интегральному исчислению реализуют глубокие межпредметные связи дисциплин естественнонаучного цикла, поэтому целесообразность изучения этих тем неоспорима.

Подводя итоги обращения к наиболее важным историческим событиям, связанным с содержанием тем «Производная» и «Интеграл» в школьных программах средних учебных заведений с 18 века до наших времен, следует отметить, что включение этих курсов было обусловлено требованиями науки и техники, необходимостью обновления школьной программы новыми идеями, появившимися в математической науке в XIX - XX веке. Это отразилось, например, в необходимости изучения основ анализа в начале 20 века в кадетских корпусах для решения военно–прикладных задач. Реформа 60-х гг. 20 века, главным целью которой было введение основ математического анализа, была также обусловлена актуальностью сложных математических проблем, связанных с государственными программами исследования космического пространства, развития атомной и термоядерной энергетики. Итогом изучения этих разделов должно стать решение задач прикладного характера и демонстрация разнообразных приложений в других областях естествознания. Таким образом, наметившаяся тенденция к переосмыслению отношения к данным темам, к признанию их значимости и актуальности изучения приложений обусловлена достижениями науки и ускорением научно-технического прогресса.

1.3. Базовые понятия дисциплин естественно-научного цикла, интерпретируемые с помощью производной

Определение производной в математике

Пусть дана некоторая функция f=f(x) определенная на некотором промежутке. Тогда производной функции f(x) в некоторой точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении приращения аргумента к нулю.

Таким образом:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Важно понимать, что значение производной $f'(x_0)$ в некоторой точке x_0 является числом.

Если в каждой точке промежутка этот предел существует, то есть производная имеет определенное значение во всех точках промежутка, тогда производная является некоторой функцией g(x):

$g(x) = f'(x)$. В этом случае мы говорим о производной, как о функции, определенной на некотором промежутке.

Производная в физике

Наиболее тесные связи существуют между курсами математики и физики. С помощью методов математического анализа в значительной степени упрощаются решения многих физических задач. Производная часто используется в механике, электротехнике и термодинамике.

Производная в механике

Ф. Энгельс: «…лишь дифференциальное исчисление даёт естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение" [47, 587 с.].

Любое физическое явление или процесс в окружающем нас материальном мире представляет собой закономерный ряд изменений, происходящих во времени и пространстве. Среди огромного множества явлений можно выделить механическое движение, которое представляет собой изменение положения тела в пространстве с течением времени. Вращение колес автомобиля, биение человеческого сердца, падение листьев в Летнем саду — все это примеры механического движения. Раздел физики, изучающий движение, называется механикой. Основная задача кинематики (одного из разделов механики) заключается в определении положения тела в интересующий момент времени. Одной из определяющих характеристик механического движения является скорость. Рассмотрим движение некоторого тела, которое будем считать материальной точкой. Пусть она движется прямолинейно и неравномерно. Пройденный ею путь есть функция $s(t)$ от времени t. За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ путь точки равен $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$, а ее средняя скорость –

$\mathrm{Vcp.} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Обычно характер движения бывает таковым, что при малых Δt средняя скорость практически не меняется, т. е. движение на этом промежутке с большой степенью точности можно считать равномерным. Другими словами, значение средней скорости при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому вполне определённому значению, которое называют мгновенной скоростью $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

В каждый момент времени t_0 рассматриваемого промежутка значение скорости равно $s'(t_0)$. Таким образом, скорость является производной функции s(t): $v(t) = s'(t)$.

Часто для более детального изучения движения бывает необходимо исследовать характер изменения скорости. Ускорение показывает, насколько быстро изменяется скорость тела. Для того, чтобы понять, что такое мгновенное ускорение проведем подобные рассуждения. Зависимость мгновенной скорости от времени есть функция $v(t)$. За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ изменение скорости точки равно $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$, а ее среднее ускорение $a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}$. Обычно характер движения бывает таковым, что при малых Δt, среднее ускорение точки практически не меняется, поскольку скорость не может изменяться скачкообразно. Другими словами, значение среднего ускорения при Δt→0 стремится к некоторому определённому значению, которое называют мгновенным ускорением, $a(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0.

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = v'(t_0)$$

В каждый момент времени t_0 рассматриваемого промежутка значение ускорения равно $v'(t_0)$. Таким образом ускорение является производной функции v(t): $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Аналогичном образом при изучении вращательного движения вводятся понятия угловой скорости и углового ускорения. Пусть дана функция $\varphi(t)$ – зависимость угла поворота материальной точки относительно некоторой оси. Тогда угловая скорость есть производная угла поворота:

$$\omega(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)}{\Delta t} = \varphi'(t_0)$$

А угловое ускорение есть производная угловой скорости:

$$\beta(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \beta_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t_0 + \Delta t) - \omega(t_0)}{\Delta t} = \omega'(t_0) = \varphi''(t_0)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям (для скорости и ускорения) имеем:
$\omega(t) = \varphi'(t)$
$\beta(t) = \omega'(t) = \varphi''(t)$

Необходимо представить некоторые физические величины, при нахождении которых используются скорость и ускорение.

Кинетическая энергия тела: $E = \frac{mv^2}{2}$, m – масса тела, v – его скорость.

Импульс: $p = mv$, m – масса тела, v – его скорость.

Равнодействующая сила (векторная сумма всех сил, действующих на тело): $F = ma$, m – масса тела, a – его ускорение.

Производная при изучении плотности неоднородного стержня

Распределение массы тонкого неоднородного стержня можно охарактеризовать с помощью величины, называемой линейной плотностью. Если стержень однородный, то есть свойства его во всех точках одинаковы, то линейной плотностью называется величина, равная ρ=m/ℓ где m – масса стержня, ℓ – его длина. Стержень называют неоднородным, если на два участка одинаковой длины приходятся различные массы. Для такого стержня встаёт вопрос об изменении плотности материала стержня на разных его участках.

Пусть m=m(ℓ) – зависимость изменения массы стержня от его длины ℓ, считая от начала. Тогда при рассмотрении участка от ℓ до ℓ +Δ ℓ, его масса составит $\Delta m = m(\ell_0 + \Delta\ell) - m(\ell_0)$. Средняя линейная плотность на этом участке: $\rho_{cp} = \frac{m(\ell_0+\Delta\ell)-m(\ell_0)}{\Delta\ell}$. В пределе (при рассмотрении бесконечно короткого куска стержня) получаем:

$$\rho(\ell_0) = \lim_{\Delta\ell\to 0} \rho_{cp} = \lim_{\Delta\ell\to 0} \frac{m(\ell_0 + \Delta\ell) - m(\ell_0)}{\Delta\ell} = m'(\ell_0)$$

Для каждого значения длины ℓ_0 значение плотности в этой точке стержня (на конце участка длиной ℓ_0) равно $m'(\ell_0)$. Таким образом плотность является производной функции $m(\ell)$: $\rho(\ell) = m'(\ell)$.

Производная в электротехнике

Электрический ток — это упорядоченное (направленное) движение заряженных частиц под действием электрического поля. Количественной характеристикой электрического тока является сила тока. Сила тока – это количество заряда, протекающих через поперечное сечение проводника за единицу времени: $I = \frac{q}{t}$, где I – сила тока; q – электрический заряд; t – время протекания заряда. Это выражение справедливо для цепей постоянного тока.

Рассмотрим электрическую цепь, в которой электрический заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время t, меняется по закону q=q (t). За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ зафиксируем изменение электрического заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника $\Delta q = q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)$, тогда средняя скорость протекания заряда $\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$. Это есть среднее значение силы тока I_{cp}. Значение I_{cp} при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому определённому значению, которое называют мгновенным значением силы тока в момент времени t_0.

$$\mathrm{I}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = q'(t_0)$$

В каждый момент времени t_0 рассматриваемого промежутка значение силы тока равно $q'(t_0)$. Тогда сила тока является производной функции q(t): $I(t) = q'(t)$.

Протекая через проводник, ток совершает работу. Пусть *A=A(t)* – работа, совершенная электрическим током к моменту времени t. При рассмотрении временного промежутка от t_0 до $t_0 + \Delta t$ совершенная работа будет равна $\Delta A = A(t_0 + \Delta t) - A(t_0)$, тогда средняя скорость совершения работы

$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t_0 + \Delta t) - A(t_0)}{\Delta t}$. Это есть среднее значение электрической мощности P_{cp}. Электрическая мощность — физическая величина, характеризующая скорость передачи или преобразования электрической энергии. Значение P_{cp} при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому определённому значению, которое называют электрической мощностью в момент времени t_0.

$$P(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} P_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t_0 + \Delta t) - A(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = A'(t_0)$$

В каждый момент времени t_0 рассматриваемого промежутка значение мощности равно $A'(t_0)$. Таким образом, электрическая мощность является производной функции A(t): $P(t) = A'(t)$.

Получение переменного электрического тока основано на законе электромагнитной индукции, формулировка которого содержит производную магнитного потока. Магнитный поток – это физическая величина, характеризующая количественную характеристику процесса взаимодействия магнитного поля с замкнутым проводящим контуром. Магнитным потоком (Ф) проходящим через замкнутый контур площадью (S), называют физическую величину, равную произведению модуля вектора магнитной индукции (B) на площадь контура (S) и на косинус угла между вектором B и нормалью к поверхности: $\Phi = BS\cos\alpha$. Если вектор магнитной индукции перпендикулярен площади контура, то магнитный поток максимален. Если вектор магнитной индукции параллелен площади контура, то магнитный поток равен нулю.

Изменение магнитного потока $\Phi=\Phi(t)$ через поверхность, ограниченную контуром, за промежуток времени Δt представляет среднее значение модуля электромагнитной индукции: $E_{инд.ср.} = |\Delta\Phi/\Delta t|$, которое при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому определённому значению - мгновенному значением модуля электромагнитной индукции в момент t_0.

$$E_{инд}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} E_{инд.ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0)|}{\Delta t} = |\Phi'(t_0)|$$

Проведя рассуждения аналогичные предыдущим, имеем: $E_{инд}(t) = |\Phi'(t)|$.

Это закон электромагнитной индукции, который был установлен опытным путем в 1831 г. и назван законом Фарадея. Классической демонстрацией основного закона электромагнитной индукции является первый опыт Фарадея: чем быстрее перемещать магнит через витки катушки, тем больший индукционный ток в ней возникает, а значит, и ЭДС индукции становится больше.

Для нахождения некоторых физических величин часто используется сила тока:

Напряжение на участке цепи:

$U = IR$, где I – сила тока, R – сопротивление участка цепи

ЭДС источника в полной цепи:

$E = I(r + R)$, где I – сила тока в цепи, r – внутреннее сопротивление источника, R – сопротивление нагрузки.

Работа тока на участке цепи:

$A = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt = IUt$, где I – сила тока, U –напряжение, R – сопротивление участка.

Электродвижущая сила (разность потенциалов) возникающая на концах проводника перемещаемого в магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции: $E = Bvl$, где B – модуль вектора магнитной индукции, v – скорость проводника, l – его длина.

Производная при изучении тепловых явлений

Физические процессы, протекающие в телах при их нагревании или охлаждении, принято называть тепловыми явлениями. Нагревание и охлаждение воздуха, таяние льда, плавление металлов, кипение воды – вот некоторые примеры тепловых явлений. Количество теплоты – особая характеристика теплообмена, которая определяет количество отдаваемой или получаемой энергии при взаимодействии тел.

Чтобы температура тела некоторой массы повысилась на несколько градусов, телу необходимо сообщить определенное количество теплоты Q. Значит, Q есть функция температуры t, до которой тело нагревается (для удобства будем считать начальную температуру нулевой): $Q = Q(t)$. Пусть температура тела повысилась с t_0 до t_{0+} Δt. Количество теплоты, затраченное для этого нагревания, равно $Q(t_{0+}\ \Delta t) - Q(t_0)$. Отношение $\frac{Q(\mathrm{t}_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t}$ есть количество теплоты, которое в среднем необходимо для нагревания тела на 1 градус при изменении температуры на Δt градусов. Это отношение называется средней теплоёмкостью данного тела и обозначается C_{cp}. Так как средняя теплоёмкость не дает представления о теплоёмкости для любого значения температуры t, то вводится понятие теплоёмкости при данной температуре t_0

(при данном значении $t = t_0$). Теплоемкостью при температуре t_0 называется предел:

$$\mathrm{C}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{C}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t} = Q'(t_0)$$

Для каждого значения температуры t_0 из рассматриваемого промежутка значение теплоемкости равно $Q'(t_0)$. Таким образом теплоёмкость является производной функции $Q(t)$: $\mathrm{C}(t) = Q'(t)$.

Можно сказать, что теплоёмкость характеризует восприимчивость тела (системы) к нагреванию [22].

Производная в химии

В химии нашло широкое применение дифференциальное исчисление для построения математических моделей химических реакций и последующего описания их свойств. Химия изучает закономерности протекания различных реакций. Наиболее используема производная в кинетике – разделе химии, изучающем закономерности протекания химических реакций во времени, зависимости этих закономерностей от внешних условий, а также механизмы химических превращений. Главной характеристикой химической реакции с точки зрения кинетики является скорость химической реакции. Скоростью химической реакции называется изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени. Так как скорость реакции v непрерывно изменяется в ходе процесса, ее обычно выражают производной концентрации любого из реагирующих веществ по времени. Поскольку масса вещества, количество вещества и концентрация пропорциональны, при изучении скорости химической реакции, проходящей в сосуде постоянного объема, можно пользоваться любой из этих трех величин (соблюдая размерность).

Пусть дана функция C=C(t), где C-концентрация некоторого реагирующего вещества в момент времени t. За промежуток времени от t_0 до

$t_0 + \Delta t$ изменение концентрации $\Delta C = C(t_0 + \Delta t) - C(t_0)$, а ее средняя скорость $v_{cp} = \frac{C(t_0+\Delta t)-C(t_0)}{\Delta t}$.

Концентрации реагирующих веществ в ходе реакции не могут изменяться скачкообразно, поэтому в течение достаточно малого промежутка времени, скорость химической реакции можно считать постоянной. Другими словами, значение средней скорости при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому вполне определённому значению, которое называют скоростью $v(t_0)$ химической реакции в момент времени t_0.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C(t_0 + \Delta t) - C(t_0)}{\Delta t} = C'(t_0)$$

В каждый момент времени t_0 рассматриваемого промежутка значение скорости химической равно $C'(t_0)$. Таким образом, скорость химической реакции есть производная концентрации реагирующего вещества по времени: $v(t) = C'(t)$.

Производная в биологии

Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов N и временем t её существования задана уравнением: N=N(t). Пусть Δt - промежуток времени от некоторого начального значения t_0 до $t_0+\Delta t$. Тогда изменение числа особей за этот промежуток времени $\Delta N = N(t_0 + \Delta t) - N(t_0)$ -изменение числа особей организмов. Тогда средняя скорость роста популяции за промежуток времени Δt: $v_{cp} = \frac{N(t_0+\Delta t)-N(t_0)}{\Delta t}$.

При изучении популяций организмов изменение численность которых не происходит скачкообразно, можно считать, что за достаточно малый промежуток времени, скорость роста популяции не изменяется. Другими словами, значение средней скорости роста при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому вполне определённому значению, которое называют скоростью роста популяции $v(t_0)$ в момент времени t_0:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t_0 + \Delta t) - N(t_0)}{\Delta t} = N'(t_0)$$

В каждый момент времени t_0 рассматриваемого промежутка значение скорости роста популяции равно $N'(t_0)$. Таким образом, скорость роста популяции есть производная численности особей по времени: $v(t) = N'(t)$.

Производная в экономике

Производительность труда. Любая фирма, работающая в условиях рынка, должна определять свою стратегию, реализуя которую она сможет получить максимальную прибыль. При каких условиях это возможно, какой объем выпуска продукции даст желаемый результат? Для ответа на этот вопрос необходимо рассматривать такие величины как объём произведённой продукции, производительность труда, общий доход, или выручка фирмы, предельный доход. В постоянно меняющихся рыночных условиях эти величины постоянно меняются. Поэтому в экономических исследованиях используются производственные функции, которые выражают зависимость производственной деятельности от обусловивших ее факторов. Одна из таких функций $q=q(t)$, выражающая объём произведённой продукции *и* за время *t*. За промежуток времени от t_0 до t_0+ Δt величина объёма произведённой продукции составит

$\Delta q = q(t_0+\Delta t)-q(t_0)$. Средняя производительность труда – это отношение количества произведённой продукции к затраченному времени, т.е. $z_{cp} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

Производительностью труда в момент времени t_0 называется предел, к которому стремится z_{cp} при $\Delta t \to 0$:

$$z(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t} = q'(t_0)$$

Средние и предельные затраты

Другой важной производственной функцией, позволяющей выявить оптимальный объем производства, является функция TC=TC(q) (от англ. Total

Cost - общие затраты), выражающая зависимость себестоимости (издержек) от объёма произведённой продукции. При больших объемах производства производственные функции удобно считать непрерывными, несмотря на то, что значения объема продукции q дискретно. Средние (удельные) затраты AC (от англ. Average Cost - средние затраты) на единицу продукции (средняя себестоимость) можно найти по формуле $\mathrm{AC(q)} = \frac{\mathrm{TC(q)}}{\mathrm{q}}$. Наряду с функцией средних затрат часто используется другая характеристика затрат. Предельные затраты MC (от англ. Marginal Cost - маржинальные затраты) — это показатель, который рассчитывается путем деления изменения себестоимости на единицу продукции на изменение количества изготавливаемой продукции. Проще говоря, предельные затраты — это стоимость производства еще одной единицы продукции при некотором объеме уже произведенной продукции. Пусть при увеличении объема с q_0 до $q_0 + \Delta q$ величина издержек изменится на $\Delta TC = TC(q_0 + \Delta q) - TC(q_0)$. Тогда предельными (или маржинальными) затратами на производство MC при объеме произведенной продукции q_0 называется предел: $MC(q_0) = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta TC}{\Delta q} = \lim\limits_{\Delta q \to 0} \frac{TC(q_0 + \Delta q) - TC(q_0)}{\Delta q} = TC'(q_0)$ [41].

Для каждого рассматриваемого объема q_0 значение функции предельных затрат равно $TC'(q_0)$. Таким образом, функция предельных затрат есть производная функции общих затрат: $MC(q) = TC'(q)$.

Предельные затраты играют немаловажную роль при анализе целесообразности увеличения выпуска продукции или объема оказываемых услуг: если этот показатель меньше установленной на данный момент цены, то расширение производства экономически выгодно. Это связано с тем, что прогнозируемый доход полностью перекрывает расходы на выпуск дополнительной продукции, что влечет за собой увеличение прибыли. Если предельные затраты больше установленной на данный момент цены, расширение производства экономически невыгодно. В этом случае расходы будут превышать доходы, в связи с чем предприятие потерпит убыток.

Необходимо отметить, что функция предельных затрат не учитывает начальных финансовых вложений, поэтому она не является пределом функции средних затрат, которая зависит от затрат, сделанных на начальном этапе производства (закупка оборудования, строительство цеха и т.д.). Аналогично определяются предельная выручка, предельный доход и другие предельные величины.

Предельный доход. Предельный доход MR (от англ. Marginal Revenue) отражает доход за дополнительную единицу продукции и определяется как предел отношения изменения общего дохода к изменению объема выпуска при малом объеме выпуска. Пусть дана производственная функция TR=TR(q) (от фр. Total Revenue - общий доход), отражающая зависимость общего дохода TR от объёма продукции q. Чтобы вычислить величину TR, нужно объем выпущенной продукции q умножить на цену P (стоимость единицы продукции для покупателя), таким образом $TR(q) = P(q) * q$ [41]. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приведут к формуле

$$MR(q_0) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta TR(q_0)}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{TR(q_0 + \Delta q) - TR(q_0)}{\Delta q} = TR'(q_0)$$
$$= P(q_0) + q_0 * P'(q_0)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям (о маржинальных затратах) имеем: $MR(q) = TR'(q) = P(q) + q * P'(q)$.

Если цена P (стоимость за единицу продукции) не зависит от объема произведенной продукции, то $\mathrm{P}'(\mathrm{q}) = 0 \Rightarrow \mathrm{MR}(\mathrm{q}) = \mathrm{P}$. Такая ситуация довольна распространена в реальной жизни.

Прибыль. Следует различать два экономических понятия: доход(выручка) и прибыль - разность между доходом и затратами на производство. Таким образом общая прибыль задается формулой: $\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = P(q) * q - TC(q)$. Если цена постоянна, то $\Pi(q) = P * q - TC(q)$ [41].

Сформулируем выводы. При решении различных задач физики, химии, биологии, экономики и других отраслей знания возникла необходимость с помощью одного и того же аналитического процесса из данной функции $f=f(x)$ получать новую функцию, которую называют производной данной функции $f(x)$ и обозначают символом $f'(x)$. Этот процесс состоит из следующих шагов:

1) даем аргументу x приращение Δx и определяем соответствующее приращение функции $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

2) составляем отношение $\Delta f/\Delta x$;

3) При $\Delta x \to 0$, находим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, который обозначаем через $f'(x_0)$.

4) Если в каждой точке промежутка можно найти значение производной, то можно говорить о функции $f'(x)$, определенной на этом промежутке.

1.4. Базовые понятия дисциплин естественно-научного цикла интерпретируемые с помощью интеграла

Пути реализации прикладной и практической направленности обучения математике – чрезвычайно широкая методическая проблема. Остановимся на приложениях темы «Интеграл» в смежных дисциплинах: физике, химии, биологии, экономике.

Применение интеграла в физике

Понятие определенного интеграла применяется при решении задач на вычисление работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную поверхность, пути, пройденного телом, имеющим переменную скорость, и ряд других.

Применение интеграла в механике

Предположим, что точка движется по прямой (по оси OX) и известна скорость этой точки. Пройденный точкой путь по оси будем считать функцией времени: $s=s(t)$. Как найти пройденный путь за промежуток времени $[T_1;T_2]$?

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, вычисляется по формуле S=vt. Если тело движется неравномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени t, т. е. v=v(t), то для нахождения пути, пройденного телом за время от T_1 до T_2, разделим этот промежуток времени на n равных частей Δt. При малых Δt в каждой из таких частей скорость можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка (в точке t_k для k-го промежутка). Тогда пройденный телом путь будет приблизительно равен сумме $S \approx \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}(\mathrm{t}_k)\Delta t$. Если функция v(t) непрерывна, то предел интегральной суммы есть интеграл скорости по времени:

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{v}(\mathrm{t}_k)\Delta t = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

Когда найден пройденный путь тела, естественно задаться вопросом о работе, которая при этом была совершена. Известную формулу из физики *A*=*Fx* для определения работы силы можно использовать лишь тогда, когда на тело действует постоянная сила, направленная по направлению движения. Однако часто требуется определить работу тогда, когда сила F изменяется в продолжении движения. то есть F=F(x). Пусть тело перемещается прямолинейно по участку $[a,\ b]$ оси Ох, при этом проекция вектора силы на ось Ох является функцией F(x) аргумента x. Чтобы определить работу, совершённую силой, разделим отрезок $[a,\ b]$ на n равных частей Δx. Таким образом, всё перемещение тела из a в b состоит из n участков пути. При достаточно малых Δx, силу на каждом из участков можно считать постоянной и равной значению силы на конце участка (в точке x_k для k-го участка). Суммарная работа А по перемещению данного тела будет равна сумме элементарных работ, совершённых при перемещении тела по каждому из участков пути. Поэтому вся работа силы по перемещению тела будет равна пределу интегральной суммы или определённому интегралу:

$$\mathrm{A} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{F}(\mathrm{x}_k)\Delta x = \int_a^b F(x)dx.$$

Например, эту формулу можно использовать при вычислении работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины.

Согласно закону Гука, сила F, необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия. Пусть x – величина растяжения или сжатия пружины. Тогда F=kx, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойства пружины. Найдем работу по растяжению пружины, если известна ее первоначальная длина x_1, конечная длина x_2 и жесткость пружины k:

$$\mathrm{A} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} kx \cdot dx = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}$$

Интеграл при изучении плотности неоднородного стержня

Рассмотрим некоторый стержень из неоднородного материала. Вычислим массу Δm куска неоднородного стержня, если известно, как меняется его плотность ρ(x). Рассмотрим отрезок [X_1; X_2]. Разобьем его на n равных частей длиной Δx. Считая, что на отрезке длиной Δx плотность стержня не меняется, получим: Δm(x)= ρ(xк)Δx. Если n →0, то и длины отрезков разбиения стремятся к нулю. Тогда предел интегральной суммы равен определённому интегралу

$$m = \int_{X_1}^{X_2} \rho\,(\mathrm{x})d\mathrm{x}$$

Применение интеграла в электротехнике.

Рассмотрим электрическую цепь, в которой сила тока меняется с течением времени по закону I=I(t). Как найти суммарный электрический заряд прошедший через цепь за промежуток времени [T1;T2]? Разделив этот промежуток времени на n равных частей Δt, будем считать, что в каждой из таких частей силу тока можно считать постоянной и равной значению тока в конце этого промежутка (в точке t_k для k-го промежутка). Тогда суммарный электрический заряд будет приблизительно равен сумме $q \approx \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}(\mathrm{t}_k)\Delta t$. Если функция I(t) непрерывна, то предел интегральной суммы есть интеграл силы тока по времени:

$$q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}(\mathrm{t}_k)\Delta t = \int_{T_1}^{T_2} I(t)dt$$

Аналогично определятся энергия (или работа) в цепи переменного тока

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{t}_k)\Delta t = \int_{T_1}^{T_2} P(t)dt$$

где А – это работа тока, P(t) – закон изменения мощности от времени, $[T_1; T_2]$ – промежуток времени, в течении которого работа произведена.

Интеграл при изучении тепловых явлений

Передача и распространение теплоты – сложное, часто имеющее нелинейный характер явление. Поэтому школьная формула Q=CΔT применима лишь тогда, когда теплоемкость тела постоянна. Однако в реальных процессах теплоемкость часто зависит от температуры, таким образом теплоемкость является функцией температуры C=C(T). Тогда для вычисления количества теплоты для нагревания тела от температуры T_1 до T_2 используем интеграл:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C(T)dT$$

Применение интеграла в химии

Интегральное исчисление находит применение в химической кинетике. Пусть скорость химической реакции зависит от времени *v=v(t).* Рассмотрим некоторый промежуток времени [T_1; T_2]. Разделив этот промежуток времени на n равных частей длительностью Δt, будем считать, что в каждой из таких частей скорость химической реакции можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда суммарное изменение концентрации будет приблизительна равно сумме $\Delta C \approx \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t$. Если функция v(t) непрерывна, то предел интегральной суммы есть интеграл скорости химической реакции по времени:

$$\Delta C = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

Применение интеграла в биологии

Задача о численности популяции**.** Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Назовем скоростью роста популяции изменение числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость v(t). v(t) может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь. Если известна скорость роста популяции, то мы можем найти прирост численности за промежуток времени от T_1 до T_2. Разделив этот промежуток времени на n равных частей длительностью Δt, будем считать, что в каждой из таких частей скорость роста популяции можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда суммарное изменение числа особей будет приблизительна равно сумме $\Delta N \approx \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t$. Если функция v(t) непрерывна, то предел интегральной суммы есть интеграл скорости роста популяции по времени:

$$\Delta N = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

Сформулируем выводы. Несмотря на разнообразие этих задач, они объединяются одной и той же схемой рассуждений при их решении. Искомая величина (путь, работа, объем продукции, скорость химической реакции, численность популяции. и т. д.) соответствует некоторому промежутку изменения переменной величины, которая является переменной интегрирования. Вводят обозначение этой переменной и рассматривают промежуток ее изменения, который разбивают на n равных частей В каждой из этих частей можно пренебречь изменением переменной величины, считая ее постоянной. Этого можно достичь при увеличении числа разбиений данного отрезка. На каждой такой части задачу решают по формулам, которые применяют для постоянных величин. Далее составляют сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины. Переходя к пределу при $n \to \infty$, находят искомую величину в виде интеграла $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_{X_1}^{X_2} f(x)dx$, где f(x) – данная по условиям задачи функция (производительность, сила, скорость и т. д.), а $[X_1;X_2]$ – промежуток на котором вычисляется интеграл.

Применение интеграла в экономике

Интегральное исчисление используют для прогнозирования материальных затрат, нахождения потребительского излишка, определения объема выпуска продукции, определения экономической эффективности капитальных вложений. И это далеко не полный список приложений. Определённый интеграл является не только средством решения прикладных экономических задач, но и универсальным языком всей экономической теории, создает новые возможности для экономических исследований. Остановимся на нескольких примерах использования интегрального исчисления в экономике.

Экономический смысл определённого интеграла выражает объём произведённой продукции при известной функции z(t), которая выражает производительности труда в момент t. Эта функция описывает изменения производительности предприятия с течением времени. Найдем объем продукции Q, произведенный за промежуток времени $[T_1; T_2]$. Разобьем его на n равных частей Δt. В каждой из таких частей производительность можно считать постоянной и равной значению производительности в конце этого промежутка. Тогда объём произведённой продукции будет приблизительно равен сумме $q \approx \sum_{k=1}^{n} z(t_k)\Delta t$. Предел интегральной суммы при $\Delta t \to 0$ есть определенный интеграл — объем выпускаемой продукции.

$$q = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z(t_k)\Delta t = \int_{T_1}^{T_2} z(t)dt$$

В экономике важно знать среднее время на изготовление единицы продукции для оптимизации процесса работы. Пусть известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени на изготовление одного изделия в зависимости от степени освоения производства, где x – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время $t_{ср}$, затраченное на изготовление единицы продукции в период от x_1 изделий до x_2 изделий, вычисляется по формуле, содержащей определённый интеграл. В математике она называется теорема о среднем.

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx.$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделия $t=t(x)$ часто имеет вид $t = ax^{-b}$, где a – затраты времени на первое изделия, b – показатель производственного процесса [24].

1.5. Анализ задач прикладной направленности в отдельных школьных учебниках по «Алгебре и началам математического анализа» по темам «Производная» и «Интеграл»

В школьных учебниках по алгебре и началам анализа темы «Производная и ее применение» и «Первообразная и ее применение» рассматриваются в отдельных главах.

В учебнике Алимова Ш. А. [25] данный материал предлагается для изучения в 11 классе. Понятие производной вводится при рассмотрении прикладной физической задачи о средней и мгновенной скорости движения материальной точки. Предлагаются однотипные задачи на определение скорости тела по заданному формулой закону ее движения и несколько задач повышенного уровня сложности: одна задача на определение угловой скорости тела, одна задача на определение кинетической энергии тела, одна задача на нахождение линейной плотности неоднородного стержня , одна задача на определение наименьшего значения силы, приложенной к телу и 12 геометрических задач повышенной сложности на оптимальное решение. После этой темы вводится понятие первообразной при рассмотрении обратной задачи о движении материальной точки: по заданной скорости v(t) найти закон движения точки s(t), то есть такую функцию s(t), производная которой равна v(t). Таким образом, сразу становится ясен физический смысл первообразной. В качестве примеров применения интеграла в параграфе 59* (для углубленного уровня) приведены следующие прикладные задачи: о вытекании воды из бака и две задачи на нахождении работы силы при сжатии пружины. Однако отсутствуют задания, реализующие прикладную направленность в других областях: химии, биологии, экономике.

В учебнике Башмакова М.И. [6] изучение темы «Производная и ее применение» предлагается в 10 классе. Понятие вводится при рассмотрении автором механического смысла производной при решении задачи о нахождении скорости точки в момент времени t, которая в механике называется мгновенной скоростью. В параграфе «Приложение производной» рассматриваются скорость и ускорение материальной точки, дифференциал в физике (дифференциал работы силы при перемещении тела, дифференциал заряда, дифференциал массы неоднородного стержня, дифференциал количество теплоты при изменении температуры некоторого вещества). Далее представлена физическая задача на определение наибольшей освещенности стола. Задачи для самостоятельного решения в разделе «Приложение производной» пункт «Механика» содержат 7 простейших задач на определение скорости по заданному закону движения материальной точки, две задачи на нахождение кинетической энергии тела, две задачи на вычисление ускорения, одну на определение угловой скорости. В пункте «Электричество» предлагается 4 задачи по данной физической теме на определение силы тока в цепи. В пункте «Другие приложения» представлены еще три задачи из физики: на нахождение теплоемкости от температуры, на скорость радиоактивного распада вещества и на коэффициент линейного расширения стержня при изменении температуры. В пункте «Прикладные задачи на экстремум» учащимся предлагается решить интересную задачу о наименьшем расстоянии между телами, которые движутся по прямолинейным дорогам, угол между которыми $90^{0.}$ Прикладных задач из других областей: химии, биологии, экономики нет.

Тема «Интеграл и его применение» выделена в отдельную главу. В ней рассмотрены следующие примеры приложений интеграла в физике: задача о работе силы при перемещении точки, о вычислении массы неоднородного стержня, о перемещении материальной точки, на определение электрического заряда. Эти задачи приводятся в учебнике вместе с их теоретическим обоснованием, представлены формулы для нахождения работы по известной мощности, массы неоднородного стержня по известной линейной плотности, количества теплоты по известной теплоемкости, электрического заряда с использованием закона изменения тока. Однако для самостоятельного решения в пункте «Приложения интеграла» учащимся предлагается всего 7 прикладных задач по физике и ни одной задачи из химии, биологии, экономики.

В учебнике Никольского С.М. [3] производная вводится в 1 полугодии 11 класса при рассмотрении трех задач, две из которых являются прикладными: на вычисление мгновенной скорости при прямолинейном движении материальной точки и на нахождение силы тока с использованием функции, выражающей количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время t. Далее представлены 4 элементарные задачи на нахождение скорости по известному закону прямолинейного движения точки. Задачи на применение производной в других разделах физики, химии, биологии, экономике отсутствуют.

Далее представлена тема «Первообразная и интеграл». Рассмотрение задачи о вычислении площади криволинейной трапеции приводит к пределу интегральных сумм, после чего вводится определение определенного интеграла. В параграфе «Применение определенного интеграла в геометрических и физических задачах» теоретическое обоснование применения определенного интеграла демонстрируется при рассмотрении таких физических задач, как задача на работу силы, на нахождение работы электрического заряда, на вычисление массы стержня переменной плотности, давления жидкости на стенку бассейна и центра тяжести системы материальных точек. Однако учебник содержит небольшой выбор задач для самостоятельного решения: одна - на определение работы силы и одна – на вычисление массы неоднородного стержня.

В учебнике Пратусевича М.Я. [33] понятие производной вводится при рассмотрении трех задач, две из которых физические : механическая задача о нахождении мгновенной скорости тела, падающего с большой высоты и задача о нахождении теплоемкости тела при известном законе изменения количества теплоты, которое нужно сообщить телу при его нагревании от нуля до t градусов. Отмечено, что сила тока есть производная количества протекающего заряда, рассмотренного как функция от времени, линейная плотность неоднородного стержня есть производная массы стержня, рассмотренная как функция от длины. Но не представлены соответствующие формулы физических величин. В параграфе «Французские теоремы» после теоремы Ферма отмечен её физический смысл – «скорость изменения функции в точке экстремума равна нулю» [33, с.106]. В параграфе «Вторая производная. Выпуклые функции» отдельно указано, что ускорение - физический смысл второй производной. В представленных задачах и упражнениях для самостоятельной работы не присутствует ни одной задачи прикладной направленности в таких предметных областях как физика, химия, биология, экономика. Далее вводится понятие определенного интеграла при рассмотрении задачи о вычислении площади криволинейной трапеции, которая приводит к понятию интегральных сумм и пределу от них, после чего вводится определение определенного интеграла. В параграфе «Применения определенного интеграла» отдельно выделен пункт « Физические задачи», в котором подробно рассмотрены две задачи: на определение координаты материальной точки по заданной формуле скорости и о силе, с которой полукольцо притягивает материальную точку массой m при ее размещении в центре этого полукольца. Отдельно отмечено, но без сопровождающих формул и комментариев, что к числу вышерассмотренных задач относятся и задачи на работу переменной силы, давление столба жидкости переменной плотности и другие [33]. В разделе «Задачи и упражнения» в пункте «Физические задачи» 6 прикладных задач по физике на нахождение выше указанных величин.

Учебник Мордковича А. Г. для 11 классов [29], состоящий из двух частей также не отличается разнообразием прикладных задач по указанным выше темам. В учебнике параграф «Определение производной» содержит задачу о скорости прямолинейного движения тела, приводящую к понятию производной. В пункте «Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин» в примере 6 предложена задача на определение кратчайшего времени преодоления расстояние между двумя объектами, один из которых неподвижный, а другой движется по разным дорогам с различной скоростью. и в задачнике по этой же теме представлены 4 элементарных задачи на определение скорости тела и одна задача повышенной сложности. Глава «Первообразная и интеграл» предлагает вниманию учащихся 5 физических задач на нахождение закона движения по известной формуле скорости. Других задач по вышеуказанным темам не представлено.

Более широкий спектр прикладных задач содержит учебник Муравина Г.К., Муравиной О.В [30]. В 11 классе после темы «Производная функции» представлены следующие задачи для самостоятельного обучения: 4 задачи - определение скорости тела, одна- на определение силы тока, одна - на скорость нагревания тела. В главе «Техника дифференцирования» рассмотрены некоторые прикладные задачи: две на определение скорости тел (камня, подброшенного вверх, лифта, движущегося вверх по шахте), две - на определение силы тока, одна – экономическая на определение скорости изменения товара при увеличении объема его производства. Далее в параграфах «Формулы производных основных функций» и «Наибольшее и наименьшее значения функции» вниманию учащихся предлагаются задачи на определение скорости радиоактивного распада вещества, на определение силы тока, на определение наилучшей освещенности лампы, на определение максимальной энергии, отдаваемой электрическим элементом и одна экономическая задача на определение наименьших затрат при плавании корабля. В параграфе «Вторая производная» отмечен физический смысл второй производной, и подробно разобран пример колебаний груза под действием силы растяжения (сжатия) пружины, выведено уравнение, описывающее этот процесс, содержащее ускорение. Задачи для самостоятельного обучения содержат 10 задач по физике - на нахождение скорости и ускорения, силы, действующей на тело при прямолинейном движении. Далее в учебнике следует глава «Интеграл, и первообразная» и предлагаются 6 прикладных задач по физике на нахождение уравнения движения тел по известному закону изменения скорости и импульса тела, а также на определение силы давления воды на плотину и работы при строительстве пирамиды Хеопса. Прикладные задачи по химии, биологии и экономике не представлены.

Сформулируем полученные выводы. Анализ содержания современных учебников по алгебре и началам анализа показал, что объем учебного материала, связанного с реализацией прикладной направленности при обучении математики в 10-11 классах с использованием производной и интеграла ограничен. Чаще всего это задачи, которые раскрывают физический и геометрический смысл производной и интеграла. Таким образом, приходится констатировать, что, несмотря на заявленные государством требования к выпускникам школ, задачный материал, представленный в школьных учебниках по алгебре и началам математического анализа, по-прежнему больше направлен на многократное закрепление математических фактов, чем на применение математики к реальным проблемам, возникающим на практике. На сегодняшний день проблема наполнения учебников прикладными задачами с использованием производной и интеграла остается открытой. Обеспечить прикладную направленность обучения, как это определено нормативными документами, можно за счет разнообразия наборов задач, включением задач прикладной направленности, содержание которых соответствует предметам естественно научного цикла.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА РАБОТЫ С НАБОРОМ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМ «ПРОИЗВОДНАЯ» И «ИНТЕГРАЛ»

2.1. Набор задач прикладной направленности при изучении тем «Производная» и «Интеграл»

Задачи по физике с применением производной

1) Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 + 3t^2$. Найдите зависимость скорости и ускорения тела от времени.

Решение.

$v(t)= s\,'(t)= (t^3 + 3t^2)= 3t^2+6t$

$a(t)=v\,'(t)= (3t^2+ 6t)\,' = 6t+6$

Ответ: $v(t)= 3t^2+6t$; $a(t)= 6t+6$.

2) Известно, что тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону

$s(t)= t^2+2$. Найдите кинетическую энергию тела через 3 с после начала движения.

Решение:

$v(t) = x\,'(t)$

$v(t) =(t^2+2)\,'=2t+1$

$v(3) = 7$ м/с

Кинетическая энергия тела: $W = (mv^2) /2$; $W = 98$ Дж

Ответ: 98 Дж.

3) Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^2 +t + 1$. Найдите импульс тела в конце 3-й секунды после начала движения.

Решение:

$v(t) = x'(t)$

$v(t) =(3t^2 +t + 1)\,' = 6t + 1$

$v(3) = 19$ (м/с)

Импульс тела: $P(t) = mv =4(6t + 1)$; $P(3) = 57$ $\left(\frac{кг\cdot м}{с}\right)$.

Ответ: $P(3) = 57\,\frac{кг\cdot м}{с}$.

4) Автомобиль приближается к месту ведения ремонтных работ на дороге со скоростью 20 м/с. На границе участка висит дорожный знак "5 км/ч". За 8 сек до въезда в зону ремонта, водитель нажал на тормозную педаль. С разрешаемой ли скоростью автомобиль въехал в указанную зону, если тормозной путь определяется формулой $s(t)=20t - t^2$.

Решение. Скорость есть производная пути по времени. Тогда имеем:

$v(t) = (20t - t^2)' = 20 – 2t$. Найдем скорость при $t=8$: $v(8) = 20 – 16= 4$ (м/с)

Т. е. у границы участка машина имела скорость 4 м/с. Учитывая, что 5 км/ ч ≈1, 39 м/с, сравним требуемое дорожным значение скорости и реальную скорость тела:

4> 1, 39 . Значит, автомобиль въехал в указанную зону со скоростью большей, чем разрешимая дорожным знаком.

Ответ: автомобиль въехал в указанную зону со скоростью большей, чем разрешающая.

5) Найдите силу F, действующую на материальную точку с массой 10 кг, движущуюся прямолинейно по закону $x(t) = 5t^3+ t^2$ при $t = 2$.

Решение: $v(t) = x'(t)$

$v(t) = (5t^3+ t^2)'= 15t^2 + 2t$

Ускорение – это скорость изменения скорости, то есть производная скорости по времени: $a(t) = v'(t) = (15t^2 + 2t)'= 30 t +2$

$F = 10(60+2) = 620$ (Н)

Ответ: 620 Н.

6) Заряд, проходящий через проводник сопротивлением 50 Ом изменяется во времени по закону $q(t) = 0{,}2t+0{,}001\cdot t^4/4$, где q-заряд в Кл, t-время в секундах. Найти зависимость силы тока в проводнике от времени; найти зависимость количества теплоты Q(t) , которое выделяется в проводнике при прохождении по нему тока.

$I (t) = q'(t) =(0{,}2t+0{,}001\cdot t^4/4)' = 0{,}2+ 0{,}001\cdot t^3$

$Q (t)= I^2 (t)R= (0{,}2+ 0{,}001\cdot t^3)^2\cdot 50$

Ответ: $I (t) = 0{,}2+ 0{,}001\cdot t^3$, $Q (t)= (0{,}2+ 0{,}001\cdot t^3)^2\cdot 50$.

7) Закон изменения температуры тела в зависимости от времени задаётся уравнением $T(t) = 0{,}2t^2$. С какой скоростью изменяется температура тела в момент времени t=5 с?

Решение. Чтобы найти скорость изменения температуры, надо взять производную: $T'(t) = (0{,}2t^2)' = 0{,}4\,t$

При t= 5 имеем: $T'(5) = 0{,}4\cdot 5 = 2$ (К/с)

Ответ: : $T'(5) = 2$ К/с.

8) Аттракцион «Космические виражи» вращается по закону $\varphi(t) = t^4 - 1$. Найдите его угловую скорость ω в момент времени t и t=2 с.

Решение. Угловая скорость есть производная угла поворота по времени, то имеем: $\omega(t)=\varphi'(t) = (t^4 - 1)' = 4t^3$

$\omega(2) =\varphi'(2) = 4\cdot 2^3=32$ (рад/с)

Ответ: $\omega(t)= 4t^3$; $\omega(2)=32$ рад/с.

9) При вращении проволочной рамки в однородном магнитном поле пронизывающий рамку магнитный поток изменяется в зависимости от времени по закону $\Phi = 10^{-2}\cos 10t$. Найдите зависимость скорости изменения магнитного потока и напишите формулу, выражающую зависимость ЭДС от времени t.

Решение. Для нахождения скорости изменения магнитного потока надо найти производную: $\Phi'(t) = (10^{-2}\cos 10t)' = -10^{-2}\cdot 10\sin 10t = -0{,}1\sin 10t$

Так как ЭДС есть производная магнитного потока по времени, то

$E = \Phi'(t) = -0{,}1\sin 10t$

Ответ: $E = \Phi'(t) = -0{,}1\sin 10t$.

10) В диапазоне от 17 до 57 °С формула

$Q(t) = \frac{1}{300}t^3 - 0{,}37t^2 + 4197{,}69t$ дает хорошее приближение к экспериментальной зависимости количества теплоты необходимое для нагревания 1 кг воды от 0°С до температуры t из указанного диапазона температур. Определите, при какой температуре теплоемкость 1 кг воды будет минимальной?

Решение. В задаче требуется найти минимальное значение теплоемкости. Для этого найдем зависимость теплоемкости от температуры взяв производную Q(t).

$$C(t) = Q'(t) = \left(\frac{1}{300}t^3 - 0{,}37t^2 + 4197{,}69t\right)' = \frac{1}{100}t^2 - 0{,}74t + 4197{,}69$$

Так как необходимо исследовать C(t) на экстремум найдем C'(t):

$$C'(t) = Q''(t) = \left(\frac{1}{100}t^2 - 0{,}74t + 4197{,}69\right)' = \frac{1}{50}t - 0{,}74$$

Найдем значение t , при котором производная теплоемкости равна нулю :

$C'(t) = =0{,}02t - 0{,}74 = 0$

При t=37°C знак производной меняется с минуса на плюс, следовательно, это точка минимума. Значит, температура при которой теплоемкость минимальна t=37°C.

Ответ: t=37°C.

11) Дана электрическая цепь, в которой заряд q на пластинах конденсатора изменяется по закону $q = 10^{-6}\cos 10^4 t$. Записать закон зависимости силы тока в цепи от времени I= I(t).

$I(t)= q'(t) = (10^{-6}\cos 10^4 t)' = -10^{-2}\sin 10^4 t = 10^{-2}\pi\cos(10^4 t + \pi/2)$

Ответ: $I(t)= 10^{-2}\pi\cos(10^4 t + \pi/2)$.

12) Контур площадью $S = 10^{-2}$ м^2 расположен перпендикулярно к линиям магнитной индукции. Магнитная индукция однородного магнитного поля изменяется по закону $B = (2+ 5t^2)\cdot 10^{-2}$. Определить зависимость магнитного потока и ЭДС индукции от времени. Определить мгновенное значение потока и ЭДС индукции в конце 5-й секунды. $\Phi(t) = BS= (2+ 5t^2)\cdot 10^{-4}$ (Вб)

$E = \Phi'(t) = ((2+ 5t^2)\cdot 10^{-4})' = 10^{-4}\cdot 10t = 10^{-3}\cdot t$ (В)

$\Phi(5) = (2+ 5\cdot 25)\, 10^{-4} = 127\cdot 10^{-4}$ (Вб)

$E(5) = 5\cdot 10^{-3}$ (В)

Ответ: $\Phi(t) = (2+ 5t^2)\cdot 10^{-4}$, $E = 10^{-3}\cdot t$ В, $\Phi(5) = 1{,}27\cdot 10^{-в}$ Вб , $E(5) = 5\cdot 10^{-3}$В.

13) В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл начинает двигаться металлический стержень длиной *l* =0,2 м перпендикулярно вектору магнитной

индукции. Пройденный им путь изменяется по закону $s(t)=3t+2t^2$. Какая разность потенциалов возникает между концами стержня через 5 с?

Решение. Скорость стержня: $v(t) = s'(t) = (3t+2t^2)' = 3 + 4t$.

$v(5) = s'(5) = 3 + 20 = 23$ (м/с)

Тогда ЭДС: $E = B\, l\, v = 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 23 = 0{,}92$(В)

Ответ: 0,92 В.

14) Конденсатор ёмкостью C и зарядом q_0 разряжается через резистор R по закону: $q = q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$. Найти скорость изменения заряда конденсатора. Какова скорость в начале разряда(t=0)?

Решение: $q'(t) = (q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}) = q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}(-\frac{1}{RC}) = -\frac{q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$

$q'(0) = -\frac{q_0}{RC}$

Ответ: $q'(t) = -\frac{q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$; $q'(0) = -\frac{q_0}{RC}$.

15) В двухэлектродной лампе сила анодного тока зависит от анодного напряжения по закону: $I(U) = \beta U e^{\frac{3}{2}}$, где β - постоянная, зависящая от формы, размеров, расположения электродов. Найдите зависимость скорости изменения тока от напряжения

Решение.

$I'(U) = (\beta U e^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}\beta U e^{\frac{1}{2}}$

Ответ: $\frac{3}{2}\beta U e^{\frac{1}{2}}$.

Комментарий. Величина $g = I'(U)$ называется проводимостью, она показывает, насколько хорошо проводник проводит электрический ток. Несложно заметить, что проводимость и сопротивление обратные величины.

16) Источник тока с электродвижущей силой 20 В и внутренним сопротивлением 5 Ом подключен к прибору сопротивлением R. Чему должно быть равно сопротивление R прибора, чтобы потребляемая мощность была наибольше

Решение. По закону Ома сила тока в цепи есть $I = \frac{E}{R+r}$ Выделяемая в потребителе мощность $P = I^2R$, то есть $P = E^2 R / (R+r)^2$. Исследуем функцию P(R) на экстремум с помощью производной:

$$P' = \frac{E^2 (R+r)^2 - 2(R+r)E^2 R}{(R+r)^4} = \frac{E^2 (R+r)(R+r-2R)}{(R+r)^4} = \frac{E^2 (r-R)}{(R+r)^3}$$

$P'(R)=0$, $r - R = 0$, $R = r = 5$.

При R = 5 Ом функция P(R) принимает наибольшее значение, так как производная функции P′ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, потребляемая мощность будет наибольшей при сопротивлении R =5 Ом. Ответ: R = 5 Ом.

17)Дождевая капля падает под действием силы тяжести; равномерно испаряясь так, что ее масса m изменяется по закону $m(t) = m_0\left(1 - \frac{2}{3}t\right)$, а пройденный путь по закону $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Через какое время после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

Решение. Скорость капли v(t)=s'(t)=gt.

Её кинетическая энергия в момент t:

$$E_к(t) = \frac{mv^2(t)}{2} = m_0\left(\frac{1}{2}g^2\ t^2\ - \frac{1}{3}g^2\ t^3\ \right)$$

Исследуем $E_к(t)$ на экстремум с помощью производной:

$E_к'(t) = m_0g^2(t - t^2) = m_0g^2t\,(1-t)$. $E_к'(t)=0$ при $t_1=0$ и при $t_2=1$ $(t>0)$

При t =1 производная $E_к'(t)$ меняет знак с плюса на минус, значит, функция $E_к(t)$ при t = 1 имеет минимум. Следовательно, кинетическая энергия падающей капли будет наибольшей через 1сек.

Ответ: через 1 сек.

18) Два объекта движутся из пунктов A и B по двум прямолинейным трассам, которые пересекаются под прямым углом, в направлении точки пересечения траекторий движения. Найдите момент времени, в который расстояние между объектами наименьшее. Найдите наименьшее расстояние, если в начальный момент времени расстояние объектов от точки пересечения траекторий

движения были соответственно 100 км и 100 км, скорость первого объекта 50 км/ч, а второго – 20 км/ч.

Решение.

Составление математической модели.

На рис.1 изображено движение двух тел и их координаты.

Запишем координаты тела 2, движущегося из пункта B в некоторый момент времени t в произвольной точке траектории P_2 : $P_2(S_2 - v_2 t ; 0)$.

Запишем координаты тела 1, движущегося из пункта A в некоторый момент времени t в произвольной точке траектории P_1 : $P_1(0; S_1 - v_1 t)$

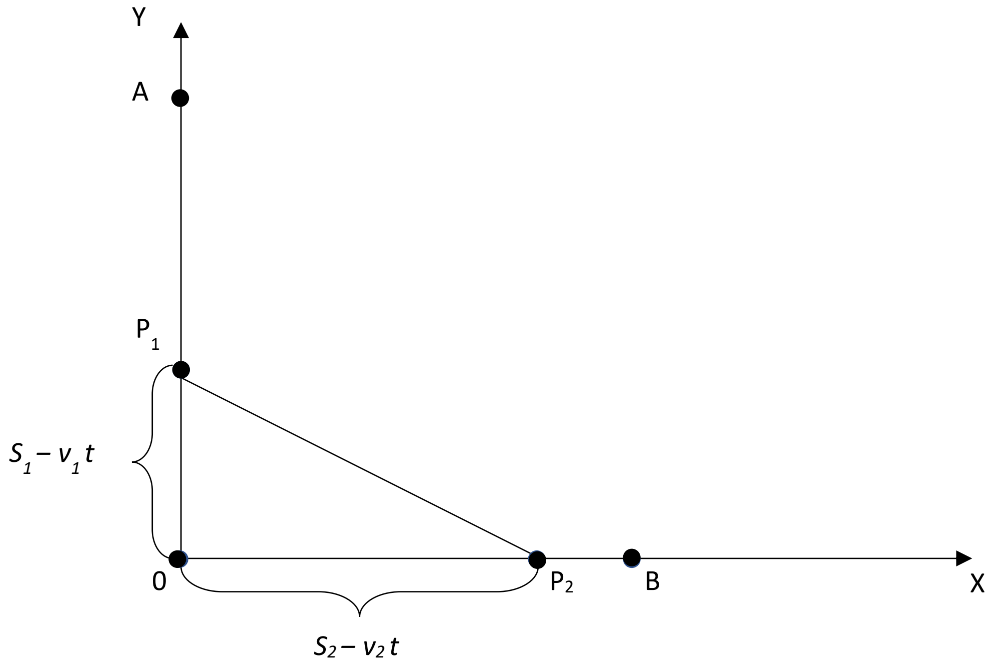


Рис.1.

Расстояние между телами в некоторый момент времени t:

$$\rho(t) = \sqrt{\left(x_{P1} - x_{p2}\right)^2 + \left(y_{\text{p1}} - y_{\text{p2}}\right)^2};\ \rho(t) = \sqrt{(S_2 - v_2 t\quad)^2 + (S_1 - v_1 t\quad)^2}$$

2. Решение задачи внутри модели. Для нахождения минимального значения этой функции исследуем ρ (t) на экстремум с помощью производной:

$$\rho'(t) = \frac{2(S_2 - v_2 t)\cdot(-v_2) + 2(S_1 - v_1 t)\cdot(-v_1)}{2\sqrt{(S_2 - v_2 t)^2 + (S_1 - v_1 t)^2}}$$
$$= \frac{-S_2 v_2 + v_2^2 t - S_1 v_1 + v_1^2 t}{\sqrt{(S_2 - v_2 t)^2 + (S_1 - v_1 t)^2}}$$

$\rho'(t) = 0$

$t(v_2^2 + v_1^2) - S_2 v_2 - S_1 v_1 = 0$

$t = \frac{S_1 v_1 + S_2 v_2}{v_2^2 + v_1^2}$

При $S_1 = 100$(км), $S_2 = 100$(км), $v_1 = 50$(км/ч), $v_2 = 20$(км/ч), имеем

$t = \frac{100\cdot 50 + 100\cdot 20}{50^2 + 20^2}$

$t = 70/29 \approx 2,4$ (ч)

$$\rho = \sqrt{(100 - 20\cdot\frac{70}{29})^2 + (100 - 50\cdot\frac{70}{29})^2}$$

$\rho = \sqrt{2675,38 + 428,05}$; $\rho \approx 56$ (км)

Ответ: $t \approx 2,4$ ч ; $\rho \approx 56$ км.

19) Известно, что на спутнике Юпитера Ио при извержении вулкана камни горной породы выбрасываются перпендикулярно вверх с начальной скоростью, достигающей 1000 м/ с. Какой наибольшей высоты достигнут камни, если зависимость высоты подъема от времени имеет вид: $H(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где g ускорение свободного падения на Ио, $g = 1,8$ м/с^2(ответ округлите до сотен км).

Решение. Чтобы найти наибольшую высоту подъема камня, надо исследовать функцию на экстремум:

$v(t) = H'(t) = (v_0 t - \frac{gt^2}{2})' = v_0 - gt$.

Так как фактически смысл производной функции H (t), выражающей зависимость подъема камней от времени, состоит в получении скорости подъема камней, то наибольшая высота будет достигнута в момент времени , когда скорость камня обратится в ноль. Далее следует свободное падение вниз. Следовательно, $v(t) = 1000 - 1{,}8t = 0$ при $t \approx 555$.

Тогда $H(555) = 277777{,}5$ (м) $= 277{,}7775$ км ≈ 300 (км).

Ответ: 300 км.

20) Автомобиль движется прямолинейно. Известно, что расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости v км/ч при движении на 4-й передаче приблизительно описывается функцией: $R(v)=0{,}0017v^2-0{,}18v+10{,}2$, $v>30$**.** При какой скорости расход горючего будет минимальным.

Решение. Исследуем расход горючего с помощью производной.

$R`(v)= (0{,}0017v^2-0{,}18v+10{,}2)`$ $R`(v)=0{,}0034v-0{,}18$

$0{,}0034v-0{,}18 = 0 \Rightarrow v\approx 53$

При $v\approx 53$ производная $R`(x)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно это точка минимума. А значит, расход горючего при скорости 53 км/ч будет наименьшим. $R(53) = 5{,}43$(л).

Ответ: 53км/ч.

21) Автомобиль движется прямолинейно по закону $s(t) = 5t^2 + 20t + 2$. Расход топлива в зависимости от скорости меняется по закону $T(v)= (v^2 – 120v + 60)$. При каком значении скорости (км/ч) и при каком значении t (в часах) после начала движения расход топлива будет минимальным?

Решение. Чтобы найти скорость найдем $s'(t)$

$v(t)= s'(t) = (5t^2 + 20t + 2)' = 10t+20$

Подставив $v(t)= 10t +20$ в $T(v)$, получим

$T(v) = ((10t +20)^2 – 120(10t +20) + 60)$

Чтобы найти минимальный расход топлива, исследуем полученную функцию на экстремум.

$T'(v)= 20(10t+20) -1200$

$T'(v)= 20(10t +20) -1200 =0$ при $t = 4$ (ч)

$v(4)= 10\cdot 4+20=60$ (км/ч)

Ответ: v=60 км/ч, t = 4.

22)Некоторая функция изменяется по закону $f(x) = 2x^2 – 4x + 2$. Составьте возможные задачи, изменив условие так, чтобы они стали прикладными в различных естественнонаучных областях: физики, химии, биологии, экономики с использованием при решении производной или интеграла. Переконструированные учащимися задачи.

1. Найти скорость через 30 с после начала движения.

2. Определить вид движения.

3. Известна масса автомобиля m = 1500 кг. Найти кинетическую энергию, спустя 10 с после начала движения.

4.Автомобиль по закону $s = 2t^2 - 4t + 2$. Расход топлива в зависимости от скорости меняется по закону $T = (v^2 – 120 v + 60)$. При каком значении t (в часах) после начала движения расход топлива будет минимальным?

5.Известна масса автомобиля m=1500 кг. Записать зависимость импульса p от t.

6.Определить, какое расстояние прошёл автомобиль, если его импульс равен 10500кг*м/с.

7. Количество электричества, протекающее через проводник, меняется по закону $q= 2t^2 - 4t + 2$. Найти силу тока в момент времени t=3.

8.Найти силу тяги двигателя автомобиля после 10с движения, если масса 1500кг.

9. Автомобиль по закону $s = 2t^2 - 4t + 2$. Найти моменты времени, когда тело было неподвижно.

10. Зависимость концентрации вещества n, участвующего в химической реакции от времени t имеет вид : $n (t) = 2t^2 - 4t + 2$. В какой момент времени скорость химической реакции минимальна?

11. Найти работу силы тяги двигателя спустя 10 сек после начала движения.

12. Определить массу стержня длины L=10 м, если плотность стержня меняется по закону $\rho=2x^2 - 4x+ 2$ кг/м, где x – расстояние от одного из концов стержня.

23) Вашему вниманию представлены три графика зависимости некоторых величин от времени. Все величины, графики которых представлены, взаимосвязаны между собой. Восстановите условие задачи и предложите некоторые вопросы по сконструированному вами условию.

1) $y = x^2 - 2x + 2$ 2) $y = 2x - 2$ 3) $y = \frac{3(2x-2)^2}{2}$

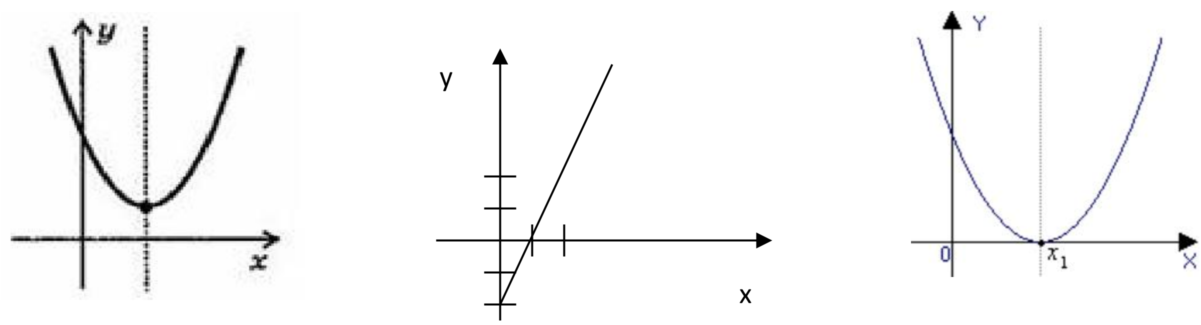


Рис. 2

Возможные ответы учащихся.

Задан следующий закон движения материальной точки $s(t)=t^2 - 2t+2$ массой 3кг

а) Найти выражение для скорости движения тела в общем виде.

б) В какой момент времени скорость материальной точки была рана нулю. в) Найти кинетическую энергию материальной точки при t =4 с.

г)В какой момент времени кинетическая энергия материальной точки равна 0?

д) Найти ускорение материальной точки.

е) Определить силу, которая под воздействием которой движется тело.

ж) Сделать вывод о характере движения материальной точки.

Задачи по химии с применением производной

1) Выбрать из предложенных задач ту, в которой используется понятие, представленное в таблице 1.

а) Сколько теплоты выделится при растворении 200 г оксида меди (II) (CuO) в соляной кислоте (водный раствор HCl), если термохимическое уравнение реакции: $CuO + 2HCl = CuCl2 + H_2O + 63{,}6$ кДж

б) При окислении аммиака (NH3) кислородом в присутствии катализатора образуется оксид азота (II) и вода. Какой объём кислорода вступит в реакцию с 20 л аммиака? в) Зависимость между массой вещества M, получаемого химической реакции и временем t выражается уравнением выражается уравнением: $M(t) = At^2 + Bt$, где A и B – постоянные. Найдите зависимость скорости реакции от времени.

Таблица 1

Взаимосвязь химических и математических понятий

Понятие на языке химии	Обозначение	Понятие на языке математики
Количество вещества в момент времени t_0	c=c(e)	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t – t$	Приращение аргумента
Изменение Количества вещества	$\Delta c = c(t+ t) – c(t)$	Приращение функции
Средняя скорость химической реакции	$\Delta c/\Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Скорость химической реакции в данный момент времени	Lim $\Delta c/\Delta t= c\,'(t)$ $\Delta t\to 0$	Производная

2) Зависимость между количеством вещества n, получаемого в ходе химической реакции и временем t выражается в виде уравнения

$n(t) = n_0(1 – e^{кt})$. Найти зависимость скорости химической реакции от времени.

Решение. Скорость химической реакции есть производная концентрации вещества:

$V(t) = n'(t) = (n_0(1 – e^{кt}))' = n_0(- к\, e^{кt}) = - n_0\, к\, e^{кt}$.

Ответ: $V(t) = - n_0\, к\, e^{кt}$.

3)Найти скорость химической реакции в момент времени, равный 10 с, если концентрация исходного продукта меняется по закону $C_{исх.}= -50\, e^{– 0,2\, t} + 55$.

Решение. Скорость химической реакции есть производная концентрации вещества:

$V(t) = C_{исх.}'(t) = (-50\ e^{-0,2\ t} + 55)' = -10\ e^{-0,2\ t}$

$V(10) = -10\ e^{-0,2\cdot 10} = -10\ e^{-2}$

Ответ: $V(10) = -10\ e^{-2}$.

4) Вашему вниманию представлено термохимическое уравнение реакции сгорания водорода в кислороде: $2H_2$(г) + O_2(г) = $2H_2O$(ж) +484 кДж. При этом зависимость числа молей реагирующих веществ от времени определяется уравнением $n(t) = 3t^2 - 12t + 6$ (число молей водорода относится к числу молей кислорода как 2:1). Найдите минимальное значение выделяемой теплоты при заданной зависимости $n(t) = 3t^2 - 12t + 6$.

Решение. Для нахождения минимального числа молей при заданной зависимости исследуем n(t) на экстремум.

$n'(t) = (3t^2 - 12t + 6)' = 6t - 12$

$n'(t) = 6t - 12 = 0$ при $t = 2$

При t = 2 производная n′(t) меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, n(t) имеет при этом значении t минимум.

Найдем количество молей, вступающих в реакцию при t =2:

$n(2) = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 6 = 12$

Так как число молей водорода относится к числу молей кислорода как 2:1, то всего имеем 4 порции по 3 моля реагирующих веществ. Каждая порция из 3 молей (2 моля H_2(г) и один моль O_2(г)) при реакции дает на выходе выделение 484 кДж теплоты. Следовательно, при поступлении 4 порций молей имеем:

$4 \cdot 484 = 1936$(кДж).

Ответ: 1936 кДж.

5) Концентрация раствора изменяется с течением времени по закону:

$c = \frac{100t}{1+5t}$. Найти зависимость скорости растворения от времени.

Решение. Скорость растворение вычислим с помощью производной:

$v(t) = c'(t) = (\frac{100t}{1+5t})' = \frac{100}{(1+5t)^2}$

Ответ: $v(t) = \frac{100}{(1+5t)^2}$

6) Известно, что в некоторой химической реакции масса поступающего катализатора зависит от времени $m_k(t) = 0{,}24t - 0{,}003t^2$. Скорость же зависит от массы катализатора следующим образом: $v(m_k) = \ln(m_k + 10)$. Определите, в какой момент времени скорость реакции была максимальной.

Решение. Так как $v(m_k)$ — монотонно возрастающая функция, то большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Найдем максимум m_k .

$$m_k'(t) = 0{,}24 - 0{,}006t$$

Приравнивая производную к нулю, находим t=40 с, производная меняет знак с плюса на минус, значит это точка максимума. Следовательно, скорость химической реакции максимальна в момент времени t = 40 с.

Ответ: t=40 с.

7) В химической лаборатории проводится опыт: исследуют, как зависит скорость химической реакции от температуры и эмпирическим путем получили следующую зависимость скорости реакции в диапазоне температур 25^0 С – 175^0 С: $v(t) = -t^2 + 100t$. Определите, при какой температуре будет максимальная скорость химической реакции.

Решение. Чтобы найти скорость химической реакции, надо исследовать функцию v(t) на экстремум.

$v'(t) = (-t^2 + 100t)' = -2t + 100$

$v'(t)' = -2t + 100 = 0$ при t =50. При этом произвольная меняет знак с плюса на минус. Значит, при t =50 скорость химической реакции имеет максимум.

Ответ: при t =50.

Задачи по биологии с применением производной

1.Составьте таблицу по образцу таблицы 2 для следующей задачи по биологии и решите ее: зависимость суточного удоя y в литрах от возраста коров t в годах определяется уравнением $y(t) = -9{,}3 + 6{,}86t - 0{,}49t^2$, где t >2. Найдите возраст дойных коров, при котором суточный удой будет максимальным.

Таблица 2

Взаимосвязь биологических и математических понятий

Понятие на языке биологии	Обозначение	Понятие на языке математики
Численность в момент времени t_1	N = N(t)	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t - t_0$	Приращение аргумента
Изменение численности популяции	$\Delta N = N(t) - N(t_0)$	Приращение функции
Средняя скорость изменения численности популяции	$\Delta N/\Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Скорость изменения численности в данный момент t_0	$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta N/\Delta t = N'(t)$	Производная функции

2. Космическая экспедиция в результате исследования планеты обнаружила колонию микроорганизмов. Для изучения в питательную среду внесли 1000 микроорганизмов. Опытным путем обнаружили, что численность популяции возрастает по закону $\mathrm{N}(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$, где t – время в часах. В какой момент времени рост численности микроорганизмов сменяется убылью?

Решение. Возрастание функции сменяется убыванием в точке максимума. Найдем производную N(t):

$$N'(t) = 1000 \cdot \frac{100 - t^2}{(100 + t^2)^2}$$

Приравнивая производную нулю, имеем: при t=10 N’(t) меняет знак с плюса на минус, значит t=10 точка максимума.

Ответ: t=10 ч.

3) Известно, что численность популяции бактерии Escherihia Coli (кишечная палочка) каждый час возрастает на четверть от предыдущего значения. Найдите функцию скорости роста популяции. Прежде, чем приступать к решению задачи, надо составить формулу, выражающую зависимость численности популяции от времени).

Решение. Зависимость численности популяции от времени имеет вид

$$N(t) = n_0 \cdot 1{,}25^n$$

Скорость роста популяции есть производная функции, выражающую зависимость численности популяции от времени:

$$v(t) = N'(t) = n_0 \cdot 1{,}25^n \cdot \ln 1{,}25$$

4) На некоторой планете населением 10 млрд. человек при вторжении инопланетян произошло инфицирование населения. Причем за первый день заразилось десятая часть населения, а в каждый следующий день заражалась десятая часть оставшегося (здорового населения). Найдите скорость инфицирования населения в конце третьего дня вторжения.

Решение. Количество незараженных людей к концу n-го дня $N_{\text{зд}}(n) = 10 \cdot 0{,}9^n$ млрд. чел. Тогда зависимость количества зараженных от времени

$$N_{\text{инф}}(n) = 10 - 10 \cdot 0{,}9^n = 10 \cdot (1 - 0{,}9^n) \text{ млрд. чел.}$$

Скорость инфицирования есть производная количества инфицированных по времени: $v(n) = N'_{\text{инф}}(n) = -10 \cdot 0{,}9^n \cdot \ln 0{,}9$

Подставляя n=3, округлив до сотых имеем: $v(n) = 0{,}77$ млрд. чел.

Ответ: 0,77 млрд. чел.

5) Численность таежного клеща *Ixodes persulcatus*, переносящего энцефалит и болезнь Лайма, в благоприятных условиях имеет экспоненциальный рост, при этом за 2 года их количество увеличилось в 3 раза. В начале наблюдения численность популяции клеща в экспериментальном районе составляла 1000 особей. В результате противоэпидемиологических мероприятий удается

уничтожать k клещей в год. Найдите k, если известно, что противоэпидемиологические мероприятия начали проводится через 6 лет после начала наблюдения, после этого популяция клещей перестала увеличиваться.

Решение. Численность клещей в благоприятных условиях меняется по закону:

$$N_б(t) = 1000 \cdot \sqrt{3}^t$$

С учетом противоэпидемиологических мероприятий: $N(t) = 1000 \cdot \sqrt{3}^t - kt$

Условие прекращения роста популяции — скорость роста равна нулю.

Скорость роста популяции есть производная численности:

$$v(t) = N'(t) = 1000 \cdot \sqrt{3}^t \cdot \ln\sqrt{3} - k$$

Подставляя t=6, приравнивая скорость к нулю имеем:

$$k = 1000 \cdot \sqrt{3}^6 \cdot \ln\sqrt{3} \approx 20000 \text{ особей}$$

Ответ: k=20000 особей.

Задачи по экономике с применением производной

1) Вашему вниманию представлена таблица 3. Выполните следующее задание: выстроите все горизонтали, найдя ошибки

Таблица 3

Взаимосвязь экономических и математических понятий

Экономическое понятие	Обозначение	Математическое понятие
TC– себестоимость (издержки) зависят от q (объём произведённой продукции)	TC = TC (q).	Приращение аргумента
Изменение q (объёма произведённой продукции)	TC/q	Функция y=f(x), определенная в некоторой окрестности точки x_0

Величина затрат по себестоимости при некотором объеме произведенной продукции	ΔTC=TC(q)-TC(q_0) = = TC (q_0+Δq) –TC (q_0)	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Среднее приращение затрат на производство, т.е. приращение затрат на единицу произведённой продукции	Δ q = q – q_0	Приращение функции
Предельные затраты на производство (себестоимость)	Lim (ΔTC/ Δq) =TC'(q) Δq→0	Производная функции

2) Объём продукции u, выпускаемой предприятием в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + 7{,}5t^2 + 100t$, где t – время(ч); причём $0 \leq t \leq 8$. Вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня.

Решение. Производительность труда z(t) выражается формулой $z(t) = u'(t)$.

Тогда $z(t) = u'(t) = -2{,}5\,t^2 + 15t + 100$

$z'(t) = u''(t) = -5t + 15$ — скорость изменения производительности труда

Производительность труда через 1 ч после начала работы

$z(1) = -2{,}5 \cdot 12 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5$ (единиц продукции в час)

$z'(1) = -5 \cdot 1 + 15 = 10$ (единиц продукции в час за час)

Производительность труда за 1 ч до окончания работы:

$z(7) = -2{,}5 \cdot 72 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5$ (единиц продукции в час)

И скорость изменения производительности труда:

$z'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$ (единиц продукции в час за час)

Ответ: производительность труда через 1 ч после начала работы 112, 5 единиц продукции в час; скорость изменения производительности труда — 10 единиц в час за час, за 1 ч до окончания рабочего дня производительность труда 82, 5 единиц продукции в час, скорость изменения производительности труда —-20 единиц продукции в час за час.

Комментарий для учителя. Вопрос учащимся: чем можно объяснить полученные результаты?

3) При производстве тепловыделительных элементов (ТВЭЛ), представляющих собой наборные урановые стержни, зависимость общих затрат ТС от объема произведенной продукции q имеет вид:

$TC(q) = 2q + \sqrt{q-1}$, при этом $q > 1$

1) Определить предельные затраты производства при объёме выпуска
2) $q_1 = 2$ ед. и $q_2 = 10$ ед.
3) Выгодно ли данному предприятию наращивать производство, если функция общих затрат не изменится?

Решение. Предельные затраты это производная функции общих затрат:

$MC(q) = TC'(q) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{q-1}}$, при этом q>1

Найдем $MC(2) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = 2{,}5$ (дес. тыс .руб) и

$MC(10) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{10-1}} = 2\frac{1}{6} \approx 2.17$(дес.тыс.руб)

Для ответа на этот вопрос необходимо определить промежутки монотонности функции предельных затрат MC(q).

$MC'(q) = -\frac{1}{4\sqrt{(q-1)^3}} < 0,$ при $q > 1$

Таким образом, MC(q) убывает при q>1, т. е. при увеличении объема произведенной продукции предельные затраты уменьшаются.

Вывод. С ростом производства предельные затраты (затраты на каждую следующую единицу продукции) уменьшаются, следовательно, в данном случае увеличивать объём производства выгодно.

4) Общие затраты на производство продукции объёма q задаются функцией $TC(q) = 1000(q^2 + 5q + 4)$. Производитель реализует продукцию по цене Р=25000 (руб.). Найти объем продукции q_0, при котором прибыль П будет максимальной, и величину этой прибыли.

Решение. Записываем исходную формулу для вычисления величины, максимальное значение которой надо найти.

Прибыль равна разности между общим доходом TR и общими затратами TC: $\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = P * q - TC(q)$, так как цена постоянна и не зависит от q.

С учетом данных из условия задачи, имеем:

$\Pi(q) = 25000 * q - 1000(q^2 + 5q + 4) = 1000(-q^2 + 20q - 4)$

По смыслу задачи объём продукции q может принимать любое положительное значение, т. е. $q\epsilon(\ 0;\ +\infty)$

Функцию $\Pi(q)$исследуем на экстремум на промежутке (0;+ ∞)

$\Pi'(q) = 0 \Rightarrow\ -2q + 20 = 0\ \Rightarrow q = 10$. При q=10 производная меняет свой знак при переходе через эту точку с «+» на «–», значит q=10 — точка максимума.

$$\Pi_{max} = \Pi(10) = 1000(-10^2 + 20 * 10 - 4) = 96000(\text{руб.})$$

Интерпретируем результаты: максимальная прибыль в 96000 руб. достигается при объёме производства 10 единиц.

Примечание для учителя.

Полезно задать учащимся следующие вопросы:

а) Как можно объяснить то, что П (0) =-4000? Почему в реальной ситуации прибыль может быть отрицательной?

б) Почему в реальной ситуации увеличивать или уменьшать объем выпущенной продукции может быть экономически невыгодно?

5) Общие затраты конкурентной фирмы $TC = a + bq^2$, где q — объём произведенной продукции (ед.) При какой цене фирма будет производить продукцию с минимальными средними затратами?

Комментарий. В данном контексте под ценой подразумевается стоимость выпуска единицы продукции для производителя, т. е. значение функции предельных затрат при некотором объеме производства.

Решение. По определению средние затраты $AC(q) = \frac{TC(q)}{q} = \frac{a}{q} + bq$. Найдем объем выпущенной продукции q_0, при котором средние затраты будут минимальны. Чтобы исследовать функцию средних затрат, найдем ее производную: $AC'(q) = -\frac{a}{q^2} + b$, находим экстремум этой функции: $AC'(q_0) = 0 \Rightarrow q_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$, функция средних затрат принимает свое минимальное значение при $q=q_0$. Таким образом, мы нашли объем выпущенной продукции q_0, при котором средние затраты будут минимальны. Тогда цена (себестоимость единицы продукции) может быть рассчитана по формуле:

$$MC(q_0) = TC'(q_0) = 2bq_0 = 2b\sqrt{\frac{a}{b}} = 2\sqrt{ab}$$

Задачи по физике с применением интеграла

1)Скорость некоторой материальной точки задается формулой

$v(t) = 4t^3 – 2t +1$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 4 с движения.

Решение.

$$s = \int_0^4 (4t^3 - 2t + 1)dt = (t^4 - t^2 + t)\Big|_0^4 = 256 - 16 + 4 = 244 \text{ (м)}.$$

Ответ: 244 м.

2)Зависимость изменения скорости тела от времени $v=v(t)$ представлена на графике (рис. 3). Известно, что $v(t)$ квадратичная функция. Найти путь, пройденный телом за 3-ю секунду его движения. Указание к задаче: задать функцию $v=v(t)$ аналитически используя ее график.

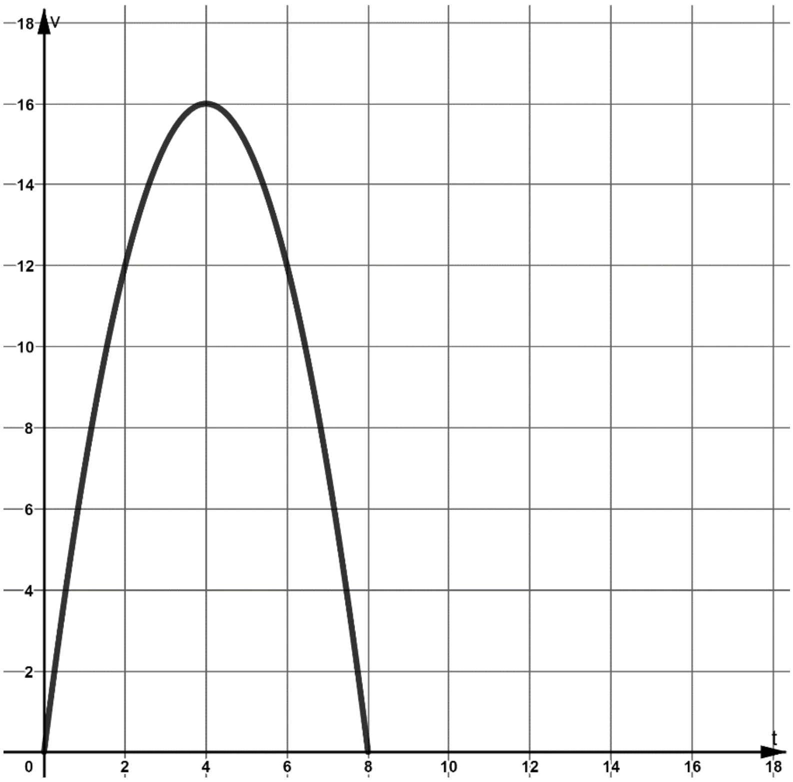


Рис.3.

Решение. Можно заметить, что график данной функции получен сдвигом графика функции v(t)= -t ^{2} на 4 единичных отрезка вправо и на 16 единичных отрезков вверх. Таким образом искомая функция $v(t) = -(t-4)^2 + 16 = -t^2 + 8t$

Тогда путь за 3-ю секунду:

$$s = \int_2^3 (-t^2 + 8t)dt = (-\frac{t^3}{3} + 4t^2)\Big|_2^3 = 13\frac{2}{3} \text{ (м)}$$

Ответ: $s = 13\frac{2}{3}$ м

3)Скорость движения тела задана уравнением v(t)=3(4t- t^2) м/с. Найдите путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение. Скорость движение тела равна нулю в начале движения и в момент остановки. Приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно t, получим 3(4t- t^2) =3t(4-t) =0 при t_1=0 и t_2=4. Следовательно,

$$s = \int_0^4 (12t - 3t^2)dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 6 * 4^2 - 4^3 = 32 \text{ (м)}.$$

Ответ: 32 м.

4) Скорость тела задана уравнением $v(t) = 6t^2+1$. Найти уравнение движения, если за первые 4 с движения тело прошло путь s=40 м.

Решение. Путь есть интеграл скорости v(t) :

$$s = \int (6t^2 + 1)dt = 2t^3 + t + C.$$

Подставив в найденное уравнение условия s = 40 м, t = 4 с, получим

$40 = 2\cdot 4^2+4+ C$. Откуда C = 4.

Искомое уравнение примет вид $s(t) = 2t^2 + t +4$.

Ответ: $s(t) = 2t^2 + t +4$.

5) Чтобы взлететь универсальному солдату модели DNTG-2020, ему надо набрать скорость 36 м/с относительно земли. Он разгоняется с ускорением, изменяющимся по закону $a(t) = 2t$ м/с^2. Сможет ли модель DNTG-2020 совершить боевой вылет, если длина участка для разгона 80 м.

Решение. Определим время, которое понадобится солдату чтобы набрать необходимую для взлета скорость. Скорость –интеграл ускорения по времени:

$$v = \int_0^t 2tdt = t^2$$

Имеем: $t^2 = 36,$ откуда $t = 6\ (c)$

Теперь вычислим путь, который пройдет солдат за 6 с. Пройденный это интеграл скорости по времени:

$$s = \int_0^6 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^6 = 72 \text{ (м)}$$

То есть для взлета универсальному солдату DNTG-2020 необходим участок для разгона длиной не менее 72 метров. 72 м <80 м, следовательно солдат сможет взлететь.

Ответ: да, сможет.

6) Универсальному солдату модели DNTG-2020 необходимо подняться вертикально вверх для осуществления обзора боевых действий. Его скорость изменяется по закону v(t) = 19,6–9,8t м/с. Найти наибольшую высоту подъема универсального солдата.

Решение. Найдем время, в течение которого солдат поднимался вверх: 19,6–9,8t =0 (в момент наибольшего подъема скорость равна нулю); t = 2 с. Поэтому

$$s = \int_0^2 (19{,}6 - 9{,}8t)dt = (19{,}6\,t - \frac{9{,}8t^2}{2})\Big|_0^2 = 19.6\ (\text{м})$$

Ответ: 19,6 м.

7) Микророботу DNTG-M1 необходимо растянуть пружину с силой 10 Н на 2 см. Какую работу он при этом совершает?

Решение. По закону Гука сила F, с которой микроробот растягивает пружину, пропорциональна растяжению пружины, т.е. F = kx. Используя условие, находим k $=\frac{10}{0{,}02}$ =500 (Н/м), то есть F(x) = 500x. Получаем

$$A = \int_0^{0{,}02} 500x\,dx = \frac{500x^2}{2}\Big|_0^{0{,}02} = 0{,}1\ (\text{Дж}).$$

Ответ: 0,1 Дж.

8) С Экзопланеты в созвездии Лебедя в 1000 световых лет от Земли HAT-P-7B, на которой ночью идут дожди, из кристаллов рубинов и сапфиров, одновременно стартовали грузовой корабль с ценным грузом, скорость которого при разгоне описывается уравнением v(t)= $110t^2$+ t (м/с) и боевой космолет, скорость которого при разгоне описывается уравнением v(t)= $110t^2$+50t (м/с). Тела начали двигаться прямолинейно из одного пункта в одном направлении. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 секунд после начала движения?

Решение. Очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 10 секунд. Учитывая, что расстояния есть соответствующие интегралы скорости по времени, имеем:

$$\int_0^{10} (110t^2 + 50\,\mathrm{t}\,)\,dt \;- \int_0^{10} (110t^2 +\ \mathrm{t}\,)\,dt$$

$$= (220t + 50)\left|\begin{matrix}10\\0\end{matrix}\right. - \ (220t + 1)\left|\begin{matrix}10\\0\end{matrix}\right. = 500 \ - \ 10 = 490$$

Следовательно, расстояние между кораблями будет 490 м.

Ответ: 490 м.

9) На расстоянии 0,2 м друг от друга расположены электрические заряды q_1=1 нКл, q_2=4 нКл. Найти работу по перемещению зарядов, если расстояние увеличилось до 0,4 м. Сила взаимодействия между двумя зарядами $F = k\ \frac{q_1 q_2}{r^2}$

Решение.

$$A \ = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr \ = \int_{r_1}^{r_2} k\ \frac{q_1 q_2}{r^2}\,dr = kq_1q_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = kq_1q_2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2}$$

Подставив $k=9\cdot10^{9}$, $q_1=1\cdot10^{-9}$ Кл, $q_2=4\cdot10^{9}$ Кл, r_1=0,2 м, r_2=0,4 м, получим : $A = 90\cdot10^{-9}$Дж = 90 нДж

Ответ: 90 нДж.

10) На планету *Глизе 581с* в 20 световых годах от Земли (192 триллиона км) в созвездии Весов, прибыла исследовательская экспедиция. При жесткой посадке корабля отвалился элемент конструкции массой 100 кг. Его необходимо поднять со дна небольшого кратера глубиной 50 м. Какую работу при этом надо совершить против сил тяготения. Ускорение свободного падения на Глизе 581 равно 1,6g. (Во время подъема считать ускорение свободного падения постоянным, а g=10 м/с^2)

Решение. Во время подъема на элемент действует сила тяжести F=1,6mg, работа есть интеграл

$$A = \int_0^{50} 1{,}6mg\cdot ds = 1{,}6mgs|_{10}^{50} = 6400\ (\text{Дж})$$

Ответ: А=6400 Дж.

11) Вычислите количество электричества, проходящего по проводнику за промежуток времени [3;4], если сила тока задается формулой $I(t) = 3t^2+2t$. Решение.

$$q = \int_3^4 \left(3t^2 - 2t\right)dt = \left(t^3 - t^2\right)\Big|_3^4 = 4^3 - 4^2 - 3^3 + 3^2 = 30Кл$$

Ответ: 30 Кл.

12) Найти количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг жидкого натрия от T_1=300 К до T_2=600 К , если теплоемкость 1 кг жидкого натрия в диапазоне температур 300К- 1500 К хорошо приближается формулой

$$C(T) = \frac{T^2}{1800} - T + 1700 .$$

Решение. Количество теплоты есть интеграл теплоемкости:

$$Q = \int_{300}^{600} \left(\frac{T^2}{1800} - T + 1700\right)\mathrm{dt} = \left(\frac{T^3}{5400} - \frac{T^2}{2} + 1700\mathrm{T}\right)\Big|_{300}^{600} = 410000 \text{ Дж}$$

Ответ: Q=410000 Дж.

13) Вычислите массу участка стержня в кг от x_1= 3 м до x_2 = 6 м, считая от начала стержня, если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2+ 2x$.

Решение. Для нахождения массы стержня надо вычислить интеграл:

$$m = \int_3^6 (x^2 + 2x)dx = (x^3/3 + x^2)\Big|_3^6 = \frac{216}{3} + 36 - \frac{27}{3} - 9 = \frac{56}{3} + 12 = 90$$

Ответ: 90 кг.

14) Универсальному солдату модели DNTG-2020 необходимо на ракете подняться на высоту h = 1600 км для изучения характеристик новой модели ракеты RDNTG-2020 . Какую работу нужно совершить, чтобы запустить ракету массой 4000 кг (масса ракеты включает массу солдата) с поверхности Земли на указанную высоту. Какую работу нужно совершить против сил тяготения, чтобы вывести ракету на нужную высоту?

Работа есть интегралы силы:

$$A = \int\limits_{R_3}^{h+R_3} G\frac{M_3 m}{r^2}dr = GM_3 m\int\limits_{R_3}^{h+R_3}\frac{dr}{r^2} = GM_3 m(-\frac{1}{r})\Big|_{R_3}^{h}$$

Подставляя $M_3=6\cdot10^{24}$ кг, $R_3=6{,}4\cdot10^{6}$ м, $G=6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{м^3}{кг\cdot с^2}$, m=4000 кг, $h=10^6$ м,

Получаем $A=3{,}38\cdot10^{13}$ Дж.

Ответ: $A=3{,}38\cdot10^{13}$ Дж.

Задачи по химии с применением интеграла

1)Зависимость скорости некоторой химической реакции от времени представлена на графике (рис. 4). Горизонтальная ось – ось времени (в минутах), вертикальная ось – скорость химической реакции (в моль/(л*мин). Найти изменение концентрации вещества в ходе химической реакции.

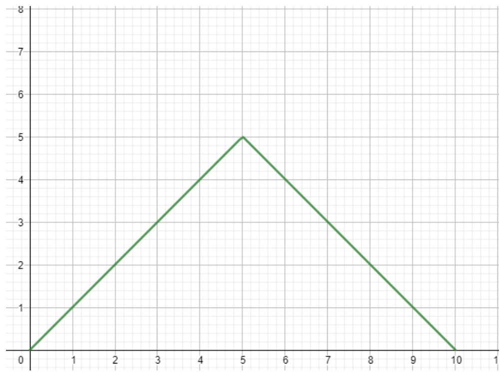


Рис.4

Решение. Изменение концентрации вещества есть интеграл скорости химической реакции по времени, следовательно изменение концентрации численно равно площади под графиком зависимости скорости от времени, то есть площади треугольника. С=25 моль/л.

Ответ: 25 моль/л.

2) При получении меди из раствора медного купороса электролитическим методом, сила тока в цепи менялась по закону $\mathrm{I(t)} = \frac{1}{\mathrm{t+2}}$, где t - время электролиза, измеренное в часах. Известно, что масса (в граммах) осажденной меди прямо пропорциональна заряду, прошедшему через цепь: $\mathrm{m_{Cu}}(q) = 2\mathrm{q}$.

Вычислите массу меди, выделившейся на катоде за 2 часа электролиза. (Ответ приведите в граммах и округлите до сотых).

Решение. Заряд, прошедший через цепь, есть интеграл силы тока по времени:

$$q(t) = \int_0^t I(t)dt$$

Тогда масса осажденной меди за два часа равна:

$$\mathrm{m_{Cu}} = 2\int_0^2 \frac{1}{\mathrm{t}+2}dt = 2(ln3 - ln2) \approx 0{,}35 \text{ г}$$

Ответ: m=0,35 г.

3) Для получения синтетического каучука в двух реакторах проводят полимеризацию изопрена при разных условиях. При этом скорость полимеризации в первом реакторе постоянна и равна 100 моль в час, а во втором имеет вид $v(t) = 20t$ моль в час. Когда второй реактор начинает производить больше каучука чем первый, первый реактор останавливают. Сколько часов проработает первый реактор?

Решение:

Найдем какое количество каучука будет получено в реакторах за T часов.

$$m_1 = \int_0^T 100dt = 100T, \qquad m_2 = \int_0^T 20tdt = 10T^2$$

Первый реактор остановят, когда $m_1 = m_2$, тогда $100T=10T^2$, откуда T=10 ч.

Ответ: T=10 ч.

Задачи по биологии с применением интеграла

1) Скорость роста популяции бактерии Yersinia Pestis (чумная палочка) зависит от времени следующим образом $V(t)=1000\cdot 1.5^t$ (время в часах). На

сколько изменилась численность бактерии за первые два часа. Округлите до сотен.

Решение. Изменение численности есть интеграл скорости роста популяции:

$$\Delta N = \int_{0}^{2} 1000 \cdot 1.5^{\mathrm{t}} \mathrm{d}t = 1000 \cdot \frac{1{,}5^{t}}{\ln 1{,}5} \Big|_{0}^{2} \approx 3100 \text{ (бактерий)}$$

Ответ: ΔN=3100 бак.

2) В космической лаборатории исследуют взятый образец растения «Planta aenigma» с планеты Икс. Опытным путем обнаружили, что закон скорости накопления биомассы у одного такого растения определяется уравнением $v(t) = 2 + \sqrt{t}$, где t- время в днях от распускания почек. Выясните, как изменится биомасса в промежутке времени от 10 до 20 дней.

Решение. Прирост биомассы есть интеграл скорости роста биомассы по времени:

$$\Delta m = \int_{9}^{16} (2 + \sqrt{t}) dt = (2t + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{1{,}5}) \Big|_{9}^{16} = 38\frac{2}{3} \text{ кг.}$$

Ответ: $\Delta m = 38\frac{2}{3}$ кг.

3) Скорость роста численности населения измеряется в миллионах человек в год и имеет вид $v(t) = \alpha \cdot \beta^{t}$ (см. рис.5), Время t измеряется в годах. Найдите прирост населения в млн человек за 4 год. Округлите до сотых.

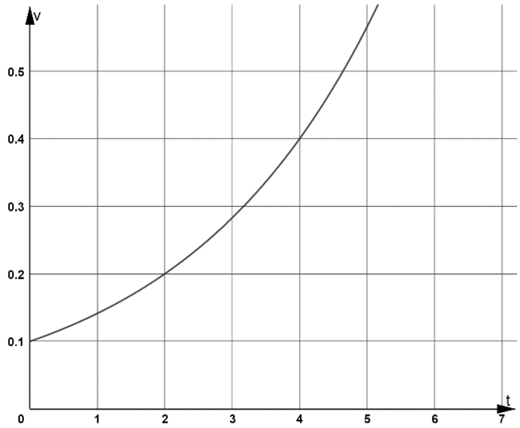


Рис. 5

Решение. Из графика на рис. 5можно получить зависимость $v(t) = 0{,}1 \cdot \sqrt{2}^t$.

Прирость численности есть интеграл скорости по времени: $\Delta N = \int_3^4 0{,}1 \cdot \sqrt{2}^t dt = 0{,}1 \cdot \sqrt{2}^t \cdot \frac{1}{\ln\sqrt{2}} \Big|_3^4 \approx 0{,}34$ млн. чел.

Ответ: ΔN=0,34 млн. чел.

Задачи по экономике с применением интеграла

1) Определить объем продукции q (в штуках), произведенной рабочим за 8 часов, если зависимость производительности труда от времени имеет вид

$z(t) = -t^2 + 8t$.

Решение: Если функция z(t) характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 6$ есть определенный интеграл:

$$q(t) = \int_0^6 (-t^2 + 8t)dt = (-\frac{t^3}{3} + 4t^2)\Big|_0^6 = -72 + 144 = 72$$

Ответ: 72 штуки.

2) Поступление товара в магазин (в штуках) имеет зависимость

$v_п(t) = 75 - 0{,}5t + 0{,}007t^2$, реализация товара определяется следующим образом: $v_р = 60 - 0{,}6t + 0{,}004t^2$, где t – дни периода работы организации. Найдите какое количество товара q не продалось в магазине за первые 10 дней работы?

Решение. Определим, какое количество товара не реализуется за один день работы магазина. $v_{зап} = v_1 - v_2 = 15 + 0{,}1t + 0{,}003t^2$. Тогда количество не реализованного товара за 10 дней можно найти , вычислив определённый интеграл:

$q = \int_0^{10} (15 + 0{,}1t + 0{,}003t^2)dt = (15t + 0{,}1\frac{t^2}{2} + \frac{0{,}003t^3}{3})\Big|_0^{10} = 156$ (штук)

Ответ: 156 штук.

3) С Экзопланеты в созвездии Лебедя в 1000 световых лет от Земли HAT-P-7B, на которой ночью идут дожди, из кристаллов рубинов и

сапфиров, стартовал грузовой корабль с ценным грузом. Стоимость перевозки одной тонны груза на один километр имеет зависимость

C(s)= 2,8 s+2 (космодолларов / км). Клиент, заказавший перемещение груза находится на космической станции, находящейся на расстоянии 200 км от поверхности планеты. Определите затраты на перевозку одной тонны ценного груза.

Решение. Чтобы найти общие затраты по перемещению груза на расстояние 200 км . надо вычислить интеграл:

$$З(s) = \int_0^{100} (2{,}8\ \mathrm{s} + 2)ds = \left(2{,}8\frac{s^2}{2} + 2s\right)\Big|_0^{100} = 14000 + 200 = 14200$$

Ответ: 14200 космодолларов.

4) Найти объём сыра (кг), изготовленного молочным цехом за 1 неделю(7 дней) , если ежедневная производительность этого цеха задана функцией z(t) = - $0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$, где t – время в часах, рабочий день составляет 7 часов (Результат округлите до целых) .

Решение. Найдем объём плавленого сыра q , произведенного цехом за один день, то есть $(0 \le t \le 7)$:

$$q = \int_0^7 (-0{,}0033t^2 - 0{,}089\mathrm{t} + 20{,}96)dt = \left(-0{,}0033\,\frac{t^3}{3} - 0{,}089\frac{t^2}{2} + 20{,}96t\right)\Big|_0^7 = -0{,}0033 \cdot 7^3 - 0{,}0445 \cdot 49 + 20{,}96 \cdot 7 = 144{,}1622(\text{кг})$$

За 7 дней: 144,1622·7 = 1009,1354 ≈1009 (кг)

Ответ: 1009 кг.

5)Найти среднее время, требуемое на изготовление одного изделия от x_1=50 до x_2 =75, если функция изменения затрат времени имеет вид:

$t(x) = 100x^{-\frac{1}{2}}$ (в часах).

Решение. Используя экономическую формулу для нахождения среднего времени, затраченного на изготовление единицы продукции в период от x_1 изделий до x_2 изделий $t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$ имеем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{75-50}\int_{50}^{75} 100x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{100}{25}\int_{50}^{75} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 8\,x^{\frac{1}{2}}\ \Big|_{50}^{75}\ \approx 12{,}7$$

Ответ: 12, 7 ч.

2.2. Методика работы с задачами прикладной направленности при изучении тем «Производная» и «Интеграл»

Методика работы с задачами прикладной направленности при изучении тем «Производная» и «Интеграл»:

1)задачи прикладной направленности в пределах учебных тем целесообразно группировать по отраслям науки и решать в определенной последовательности (от более знакомой отрасли к менее знакомой), что позволяет более быстро и четко понять отрасль применения прикладной задачи, углубить знания из смежных дисциплин и расширить мировоззрение учащихся;

2) задачи прикладной направленности должны обладать вариативностью (подвижностью), а именно: при переходе от одной стадии обучения к другой типы задач должны меняться от обычных текстовых задач, содержащих элементы вымышленных жизненных ситуаций и задач из различных разделов школьных дисциплин, до реально существующих задач, содержащих реальные зависимости процессов из физики, химии, биологии, экономики;

3) целесообразно давать задачи парами для демонстрации дифференциально - интегральной связей, так как во многих задачах прикладной направленности приходится в одних случаях по заданной функции находить производную, а в других – по заданной производной восстанавливать функцию, то есть находить интеграл («отрабатывать цепочку» в двух направлениях) ;

4) для развития творческих способностей и развитию познавательного интереса к математике следует предлагать учащимся творческие задания на конструирование своих задач по заданному условию;

5)для оптимизации образовательного процесса можно проводить объяснение нового материала с использованием компьютерной презентации как источника учебной информации и наглядного пособия(визуальное представление определений, формул, теорем и их доказательств, качественных чертежей к задачам, предъявление подвижных зрительных образов в качестве основы для осознанного овладения научными фактами обеспечивает эффективное усвоение учащимися новых знаний и умений);

6)при работе с прикладными задачами необходимо демонстрировать межпредметные связи, которые можно реализовать при проведении интегрированных уроков математики с другими предметами(такие способы подачи информации обладают ярко выраженной прикладной направленностью и несомненно вызывают познавательный интерес у учащихся).

1. Пример реализации методики работы с задачами прикладной направленности: группировать задачи по отраслям науки и решать в определенной последовательности (от более знакомой отрасли к менее знакомой).

Выполнить задания по таблицам, выполнение которых приведет к понятиям производной в химии, биологии, экономике

Выбрать из предложенных задач ту, в которой используется понятие, представленное таблице 4.

а) Сколько теплоты выделится при растворении 200 г оксида меди (II) (CuO) в соляной кислоте (водный раствор HCl), если термохимическое уравнение реакции: $CuO + 2HCl = CuCl2 + H_2O + 63{,}6$ кДж

б) При окислении аммиака (NH3) кислородом в присутствии катализатора образуется оксид азота (II) и вода. Какой объём кислорода вступит в реакцию с 20 л аммиака?

в) Зависимость между массой вещества М, получаемого химической реакции и временем t выражается уравнением выражается уравнением: $M(t) = At^2 + Bt$, где А и В – постоянные. Найдите зависимость скорости реакции от времени.

Таблица 4

Взаимосвязь химических и математических понятий

Понятие на языке химии	Обозначение	Понятие на языке математики
Количество вещества в момент времени t_0	с=с(е)	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t - t$	Приращение аргумента
Изменение Количества вещества	$\Delta c = c(t+ t) - c(t)$	Приращение функции
Средняя скорость химической реакции	$\Delta c/\Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Скорость химической реакции в данный момент времени	$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta c/\Delta t = c'(t)$	Производная

Б) Составьте таблицу по образцу таблицы 5 для следующей задачи по биологии и решите ее : зависимость суточного удоя у в литрах от возраста коров t в годах определяется уравнением $y(t) = -9{,}3 + 6{,}86t - 0{,}49t^2$, где $t > 2$. Найдите возраст дойных коров, при котором суточный удой будет максимальным.

Таблица 5

Взаимосвязь биологических и математических понятий

Понятие на языке биологии	Обозначение	Понятие на языке математики
Численность в момент времени t_1	$N = N(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t - t_0$	Приращение

		аргумента
Изменение численности популяции	$\Delta N = N(t) - N(t_0)$	Приращение функции
Средняя скорость изменения численности популяции	$\Delta N/\Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Скорость изменения численности в данный момент t_0	$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta N/\Delta t = N'(t)$	Производная функции

в) Задачи по экономике с применением производной при решении

1) Вашему вниманию представлена таблица6. Выполните следующее задание: выстроите все горизонтали, найдя ошибки

Таблица 6

Взаимосвязь экономических и математических понятий

Экономическое понятие	Обозначение	Математическое понятие
TC– себестоимость (издержки) зависят от q (объём произведённой продукции)	TC = TC (q).	Приращение аргумента
Изменение q (объёма произведённой продукции)	TC/q	Функция y=f(x), определенная в некоторой окрестности точки x_0
Величина затрат по себестоимости при некотором объеме произведенной продукции	$\Delta TC=TC(q)-TC(q_0) =$ $= TC(q_0+\Delta q) - TC(q_0)$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Среднее приращение затрат на производство, т.е. приращение затрат	$\Delta q = q - q_0$	Приращение функции

на единицу произведённой продукции		
Предельные затраты на производство (себестоимость)	Lim (ΔTC/ Δq) =TC'(q) $\Delta q \to 0$	Производная функции

2. Пример реализации методики работы с задачами прикладной направленности: использование набора задач, обладающих принципом вариативности, то есть при переходе от одной стадии обучения к другой типы задач должны меняться от обычных текстовых задач, содержащих элементы вымышленных ситуаций до реально существующих задач, содержащих реальные зависимости процессов из физики, химии, биологии, экономики.

(Задачи распределены не только в соответствии с заявленным принципом, но и по в порядке возрастания сложности)

1) Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t) = t^3 + 3t^2$. Найдите зависимость скорости и ускорения тела от времени.

2) Известно, что на спутнике Юпитера Ио при извержении вулкана камни горной породы выбрасываются перпендикулярно вверх с начальной скоростью, достигающей 1000 м/ с. Какой наибольшей высоты достигнут камни, если зависимость высоты подъема от времени имеет вид: $H(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}$, где g ускорение свободного падения на Ио, g = 1,8 м/с^2(ответ округлите до сотен км).

3) Источник тока с электродвижущей силой 20 В и внутренним сопротивлением 5 Ом подключен к прибору сопротивлением R. Чему должно быть равно сопротивление R прибора, чтобы потребляемая мощность была наибольшей?

3. Пример реализации методики работы с задачами прикладной направленности: демонстрация дифференциально -интегральной связи.

Задание 1. Распределите задачи на две группы: решаемые с помощью производной или интеграла. (Слева напротив поставьте или букву П или И)

1) Известно, что тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $s(t)= t^2+2$. Найдите кинетическую энергию тела через 3с после начала движения.

2) Дана электрическая цепь, в которой заряд q на пластинах конденсатора изменяется по закону $q = 10^{-6}\cos 10^{4} t$. Записать закон зависимости силы тока в цепи от времени $I= I(t)$.

3)Определить объем продукции q (в штуках), произведенной рабочим за 8 часов, если зависимость производительности труда от времени имеет вид $z(t) = - t^2 + 8t$.

4)Пусть при протекании химической реакции количество некоторого вещества задается зависимостью: $p(t) = 0{,}5\, t^{2} + 3t +3$ (моль) . Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

5) Вычислите массу участка стержня в кг от $x_1= 3$ м до $x_2 = 6$ м, считая от начала стержня, если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2+ 2x$

6)Зависимость между количеством вещества n, получаемого в ходе химической реакции и временем t выражается в виде уравнения $n(t) = n_0(1 – e^{\kappa t})$. Найти зависимость скорости химической реакции от времени.

7)Космическая экспедиция в результате исследования планеты обнаружила колонию микроорганизмов. Для изучения в питательную среду внесли 1000 микроорганизмов. Опытным путем обнаружили, что численность популяции возрастает по закону $\mathrm{N}(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$, где t – время в часах. В какой момент времени рост численности микроорганизмов сменяется убылью?

8)Объём продукции u, выпускаемой предприятием в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + 7{,}5t^2 + 100t$, где t – время(ч); причём $0\leq t \leq 8$) Вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня.

9) Вычислите количество электричества, проходящего по проводнику за промежуток времени [3;4], если сила тока задается формулой $I(t) = 3t^2+2t$.

10)Скорость роста численности популяции бактерий имеет вид $v(t) = 100 \cdot 2^t$

Время t измеряется в часах. Найдите увеличение численности популяции за 4 часа.

Задание 2. Соотнесите величину и формулу, которая его описывает.

υ(t)- скорость	υ´ (t), где υ(t)- скорость тела
a (t)- ускорение	x´(t), где x(t)-пройденный путь
I (t) - сила тока	q´ (t), где q (t)- количество электричества
C(t) - теплоемкость	Q´ (t), где Q (t) -количество теплоты
$\rho(l)$ - линейная плотность	φ’(t), где φ(t) – угол поворота
ω (t) - угловая скорость	m´(l), m (l)-масса неоднородного стержня
a (t) - угловое ускорение	ω´ (t), где ω (t) - угловая скорость
N(t) - мощность	V ´ (t), где V - объем продукции
П(t) -производительность труда	A´ (t), где A – работа
v(t) скорость роста популяции	N´(t), где N(t) – численность популяции
A (t)– работа	$\int_{x_2}^{x_1} \rho(x)dx$, где ρ(l) - линейная плотность
m(x) –масса тонкого стержня	$\int_{t_2}^{t_1} N(t)dt$, где N(t)-мощность
N(t) – численность популяции	$\int_{t_2}^{t_1} I(t)dt$, где I(t) –сила тока
q(t) – количество электричества	$\int_{t_2}^{t_1} v(t)dt$, v – скорость роста популяции

Задание 3. Некоторая функция изменяется по закону f(x) = 2x ^{2} – 4x + 2 . Составьте возможные задачи, изменив условие так, чтобы они стали прикладными из физики, химии, биологии, экономики с использованием при решении производной или интеграла.

Переконструированные учащимися задачи.

1) Материальная точка движется по закону s(t) = 2t ^{2} - 4t + 2. Найти скорость через 30 с после начала движения.

2) Тело движется по закону s(t) = 2t ^{2} - 4t + 2. Определить вид движения.

3)Движение автомобиля можно описать уравнением $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Известна масса автомобиля $m = 1500$ кг. Найти кинетическую энергию, спустя 10 с после начала движения.

4)Зависимость силы тока от времени имеет вид $I(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Найти заряд, проходящий через проводник за первые 2 секунды.

5) Движение машины описывается уравнением $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Известна ее масса $m=1500$ кг. Получить зависимость импульса p от t (Авторская задача Басманова Александра).

6) Движение машины описывается уравнением $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$, ее масса $m=1500$ кг. Определить, какое расстояние прошёл автомобиль, если его импульс равен 10500кг*м/с (Авторская задача Басманова Александра).

7) Количество электричества, протекающее через проводник, меняется по закону $q= 2t^2 - 4t + 2$. Найти силу тока в момент времени $t=3$.

8) Автомобиль по закону $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Найти моменты времени, когда тело было неподвижно.

9) Зависимость концентрации вещества n, участвующего в химической реакции от времени t имеет вид: $n(t) = 2t^2 - 4t + 2$. В какой момент времени скорость химической реакции минимальна?

10) На некоторой планете «Каторан» в пустыне «Красные пески» осуществляет посадку летающая тарелка. У экзоящера – обитателя этой планеты - от испуга повышается адреналин в крови. Скорость повышения адреналина имеет зависимость $v(t) = -(2t^2 - 4t + 2)$. Найти концентрацию адреналина в первые 3 секунды после испуга животного (Авторская задача Гулуева Тамерлана).

11) На некоторой планете «Каторан» в пустыне «Красные пески» скорость роста популяции экзоящеров имеет зависимость от времени (t в годах) $v(t) = -(2t^2 - 4t + 2)$. Найти число особей, появившихся за первые два года размножения (Авторская задача Гулуева Тамерлана.).

12) Определить массу стержня длины L=10 м от x_1=1 м до x_2= 2 м, если плотность стержня меняется по закону $\rho(x)=2x^2 - 4x+ 2$ кг/м, где x – расстояние от одного из концов стержня.

13) Дано изменение силы трение качения колеса $F(s) =2x^2 - 4x+ 2$. Известно, что тело (автомобиль) проехало 2 м. Найти работу силы трения качения. (Авторская задача Ивановой Алены)

14) Дан закон движения тела от времени $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Найти ускорение в момент времени t = 47 с.

Примечание. У самых интересных задач подписан автор.

4. Пример реализации методики работы с задачами прикладной направленности для развития творческих способностей и развития познавательного интереса к математике.

Задание 1. Вашему вниманию представлены три графика зависимости некоторых величин от времени (см.рис.6). Все величины, графики которых представлены, взаимосвязаны между собой. Восстановите условие задачи и предложите некоторые вопросы по сконструированному вами условию.

1) $y= x^2 – 2x+2$ 2) $y = 2x-2$ 3) $y = \frac{3(2x-2)^2}{2}$

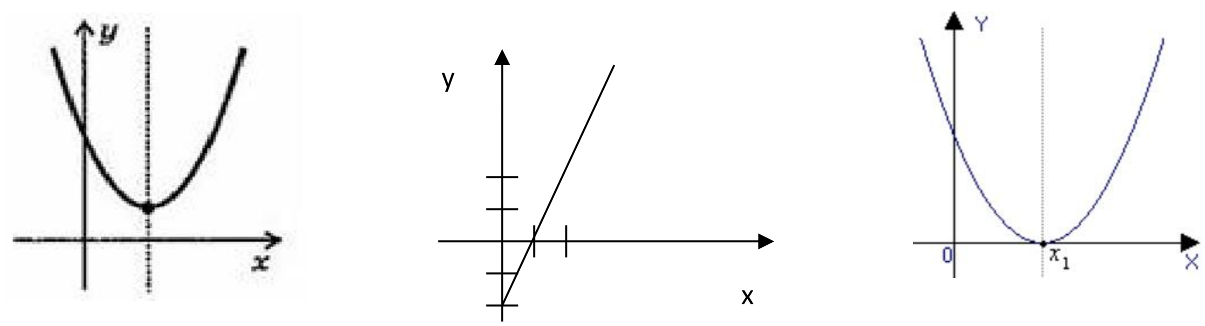


Рис. 6

Возможные ответы учащихся.

Задан следующий закон движения материальной точки $s(t)=t^2 - 2t+2$ массой 3кг.

а) Найти выражение для скорости движения тела в общем виде .

б) В какой момент времени скорость материальной точки была рана нулю.

в) Найти кинетическую энергию материальной точки при t=4 с.

г)В какой момент времени кинетическая энергия материальной точки равна 0?

д) Найти ускорение материальной точки.

е) Определить силу, которая под воздействием которой движется тело.

ж) Сделать вывод о характере движения материальной точки.

Задание 2. Вашему вниманию представлена задача с фантастическим сюжетом. Решите задачу различными способами, один из которых с применением интеграла и помните, что не всякое простое решение будет красивым, и не всякое красивое решение является простым, но всякое простое решение является рациональным.

С Экзопланеты в созвездии Лебедя в 1000 световых лет от Земли HAT-P-7B, на которой ночью идут дожди, из кристаллов рубинов и сапфиров, одновременно стартовали грузовой корабль с ценным грузом, скорость которого при разгоне описывается уравнением $v(t)= 110t^2+ t$ (м/с) и боевой космолет, скорость которого при разгоне описывается уравнением $v(t)= 110t^2+50t$ (м/с). Тела начали двигаться прямолинейно из одного пункта в одном направлении. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 секунд после начала движения?

5. Пример реализации методики работы с задачами прикладной направленности: использование компьютерной презентации как источника учебной информации и наглядного пособия

– для повышения степени наглядности;

– для получения быстрой обратной связи;

– для создания эмоциональной окраски учебной информации;

– для активизации познавательной деятельности учащихся.

Презентация «Применение производной» (см. приложение 1).

6. Реализация методики работы с задачами прикладной направленности методики: работа с математической моделью.

Задание 1. Полезно показать учащимся работу по составлению математической модели при решении задачи, а затем предложить проделать аналогичные действия с другой задачей.

Два объекта движутся из пунктов А и В по двум прямолинейным трассам, которые пересекаются под прямым углом, в направлении точки пересечения траекторий движения. Найдите момент времени, в который расстояние между объектами наименьшее. Найдите наименьшее расстояние, если в начальный момент времени расстояние объектов от точки пересечения траекторий движения были соответственно 100 км и 100 км, скорость первого объекта 50 км/ч, а второго – 20 км/ч.

Решение. Составление математической модели.

На рис.1 изображено движение двух тел и их координаты.

Запишем координаты тела 2, движущегося из пункта В в некоторый момент времени t в произвольной точке траектории P_2 : $P_2(S_2 - v_2 t\ ;\ 0)$.

Запишем координаты тела 1, движущегося из пункта А в некоторый момент времени t в произвольной точке траектории P_1 : $P_1(0;\ S_1 - v_1 t)$

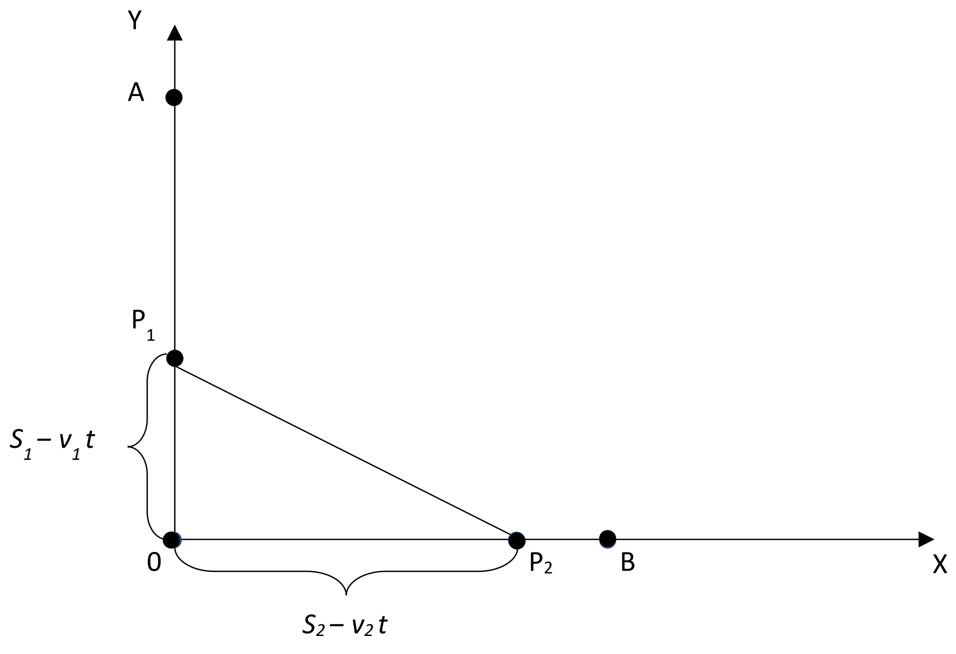


Рис.7

Расстояние между телами в некоторый момент времени t:

$\rho(t) = \sqrt{\left(x_{P1} - x_{p2}\right)^2 + \left(y_{\text{p}1} - y_{\text{p}2}\right)^2}$; $\rho(t) = \sqrt{(S_2 - v_2 t \quad)^2 + (S_1 - v_1 t \quad)^2}$

2. Решение задачи внутри модели. Для нахождения минимального значения этой функции исследуем ρ (t) на экстремум с помощью производной:

$$\rho'(t) = \frac{2(S_2 - v_2 t) \cdot (-v_2) + 2(S_1 - v_1 t) \cdot (-v_1)}{2\sqrt{(S_2 - v_2 t)^2 + (S_1 - v_1 t)^2}}$$

$$= \frac{-S_2 v_2 + v_2^2 t - S_1 v_1 + v_1^2 t}{\sqrt{(S_2 - v_2 t)^2 + (S_1 - v_1 t)^2}}$$

$\rho'(t) = 0$

$t(v_2^2 + v_1^2) - S_2 v_2 - S_1 v_1 = 0$

Производная равна нулю при $t = \frac{S_1 v_1 + S_2 v_2}{v_2^2 + v_1^2}$. При этом значении t с минуса на плюс. Следовательно, это точка минимума.

3. Интерпретация результатов.

При $S_1 = 100$(км), $S_2 = 100$(км), $v_1 = 50$(км/ч), $v_2 = 20$(км/ч), имеем

$t = \frac{100 \cdot 50 + 100 \cdot 20}{50^2 + 20^2}$

$t = 70/29 \approx 2,4$ (ч)

$$\rho = \sqrt{(100 - 20 \cdot \frac{70}{29})^2 + (100 - 50 \cdot \frac{70}{29})^2}$$

$\rho = \sqrt{2675,38 + 428,05}$; $\rho \approx 56$ (км)

Ответ: $t \approx 2,4$ ч ; $\rho \approx 56$ км.

Решите следующую задачу с составлением математической модели.

Источник тока с электродвижущей силой 20 В и внутренним сопротивлением 5 Ом подключен к прибору сопротивлением R. Чему должно быть равно сопротивление R прибора, чтобы потребляемая мощность была наибольшей?

2.3. Констатирующий эксперимент и его результаты

В данном параграфе описана деятельность при организации методической работы с набором задач прикладной направленности с использованием производной и интеграла в физике, химии, биологии, экономике и ее основные этапы.

На начальном этапе анализируется сложившаяся ситуация в конкретном классе, выяснятся состояние проблемы в настоящее время. В качестве основного метода рассматривается тестирование.

Для результативности создаваемой методики необходимо владеть информацией о реальном состоянии проблемы в практике школы. Поэтому необходимо получить предварительные данные о состоянии знаний по прикладной направленности при решении задач по физике, химии, биологии, экономике с применением производной и интеграла.

Работа проводилась в 11 классе ГБОУ школы 594 города Санкт-Петербурга в 2019/2020 учебном году. Успеваемость в данном классе на начало освоения курса алгебры и начал математического анализа была низкая, 5 человек в 9 классе не сдали ОГЭ. До 10 класса у учащихся неоднократно менялись учителя и общий уровень знаний оставлял желать лучшего.

Для оценки уровня прикладных знаний в ходе констатирующего эксперимента при работе с задачами из физики, химии, биологии, экономики был разработан тест с соответствующими заданиями прикладной направленности из указанных естественнонаучных областей (см. приложение 2). Тестирование осуществлялось в группе учащихся в количестве 25 человек на уроке. Результаты анализа представлены на столбчатой диаграмме(рис.8).

Рис.8

Анализ результатов констатирующего эксперимента показал следующее:

- чуть менее половины учащиеся группы обладают элементарными прикладными знаниями по физике;

- представление о приложениях производной и интеграла в химии и биологии продемонстрировали отдельные учащиеся (по химии – 6 человек, по биологии – 4 человека);

- у учащихся отсутствуют представления о приложениях производной и интеграла в экономике.

Вывод по результатам анализа констатирующего эксперимента:

- для учащихся наиболее знакомой предметной областью является физика, наименее знакомой – экономика, поэтому структурирование средств прикладной направленности в данной работе осуществляется в соответствии с полученным результатом: физика, химия, биология, экономика;

- необходимо уделять время для решения задач прикладной направленности при изучении производной и интеграла.

Реализация отдельных приемов методики работы с задачами прикладной направленности с применением производной и интеграла из физики, химии, биологии и экономики осуществлялась с группой из 10 человек 11 класса 594 школы Московского района на элективных занятиях, на дополнительных занятиях в часы консультации преподавателя, частично на уроках в продолжение всего учебного года. Самым интересным был результат, полученный при выполнении учащимися творческого задания: некоторая функция изменяется по закону $f(x) = 2x^2 – 4x + 2$. Составьте возможные задачи, изменив условие так, чтобы они стали прикладными из физики, химии, биологии, экономики с использованием при решении производной или интеграла.

Сконструированные учащимися задачи.

1) Материальная точка движется по закону $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Найти скорость через 30 с после начала движения.

2) Тело движется по закону $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Определить вид движения.

3)Движение автомобиля можно описать уравнением $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Известна масса автомобиля $m = 1500$ кг. Найти кинетическую энергию, спустя 10 с после начала движения.

4)Зависимость силы тока от времени имеет вид $I(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Найти заряд, проходящий через проводник за первые 2 секунды.

5) Движение машины описывается уравнением $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Известна ее масса $m=1500$ кг. Получить зависимость импульса p от t (Авторская задача Басманова Александра).

6) Движение машины описывается уравнением $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$, ее масса $m=1500$ кг. Определить, какое расстояние прошёл автомобиль, если его импульс равен 10500кг*м/с (Авторская задача Басманова Александра).

7) Количество электричества, протекающее через проводник, меняется по закону $q= 2t^2 - 4t + 2$. Найти силу тока в момент времени $t=3$.

8) Автомобиль по закону $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Найти моменты времени, когда тело было неподвижно.

9) Зависимость концентрации вещества n, участвующего в химической реакции от времени t имеет вид: $n(t) = 2t^2 - 4t + 2$. В какой момент времени скорость химической реакции минимальна?

10) На некоторой планете «Каторан» в пустыне «Красные пески» осуществляет посадку летающая тарелка. У экзоящера – обитателя этой планеты - от испуга повышается адреналин в крови. Скорость повышения адреналина имеет зависимость $v(t) = -(2t^2 - 4t + 2)$. Найти концентрацию адреналина в первые 3 секунды после испуга животного (Авторская задача Гулуева Тамерлана).

11) На некоторой планете «Каторан» в пустыне «Красные пески» скорость роста популяции экзоящеров имеет зависимость от времени (t в годах) $v(t) = -(2t^2 - 4t + 2)$. Найти число особей, появившихся за первые два года размножения (Авторская задача Гулуева Тамерлана.).

12) Определить массу стержня длины L=10 м от x_1=1 м до x_2= 2 м, если плотность стержня меняется по закону $\rho(x)=2x^2 - 4x+ 2$ кг/м, где x – расстояние от одного из концов стержня.

13) Дано изменение силы трения качения колеса $F(s) =2x^2 - 4x+ 2$. Известно, что тело (автомобиль) проехало 2 м. Найти работу силы трения качения.
(Авторская задача Ивановой Алены)

14) Дан закон движения тела от времени $s(t) = 2t^2 - 4t + 2$. Найти ускорение в момент времени t = 47 с.

Примечание. У самых интересных задач подписан автор.

Результаты анализа выполнения творческого задания по конструированию задач (см.рис.9) показали, что первенство имеют опять физические задачи, на следующей месте оказались задачи по химии, далее следуют прикладные задачи по биологии, и на последнем месте оказалась экономика. В связи с этим структурирование средств прикладной направленности целесообразно осуществлять в соответствии с полученным результатом: физика, химия, биология, экономика.

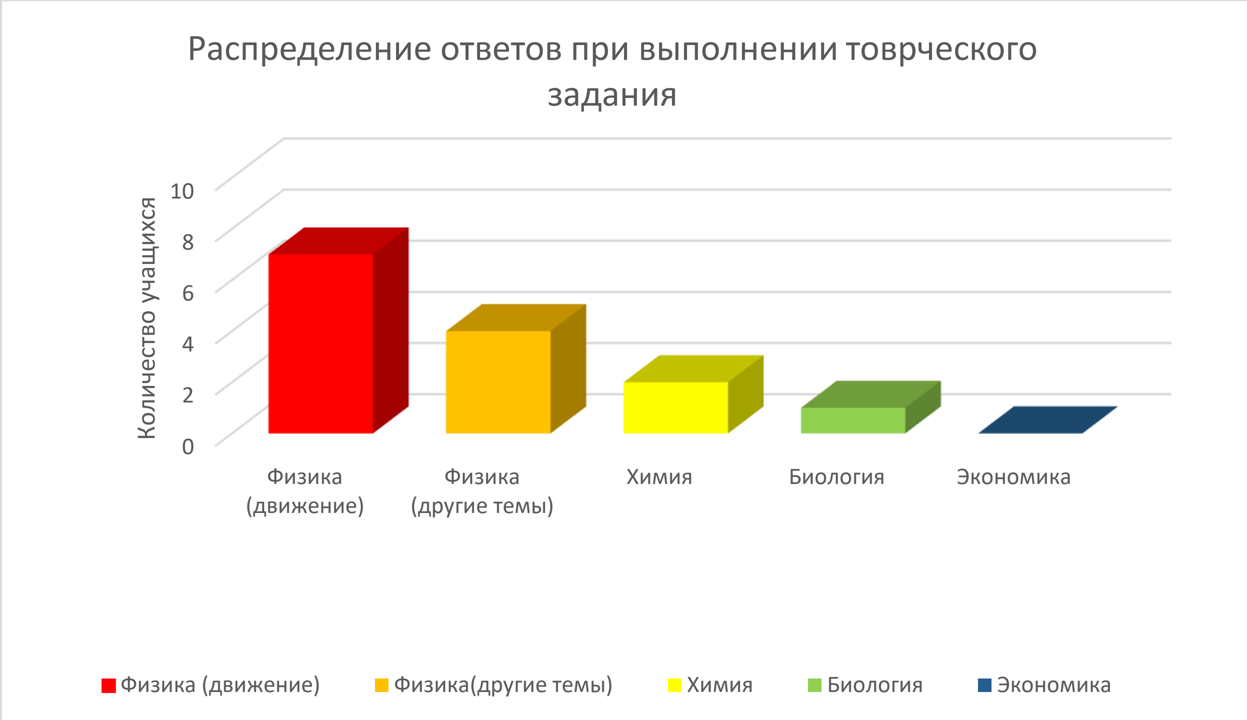


Рис.9

Выводы по главе 2.

В данной главе представлен разработанный набор задач по применению элементов интегрального и дифференциального исчисления для реализации прикладной направленности школьного курса, представлена методика работы с задачами прикладной направленности. Представленная методика направлена не только на расширение знаний прикладной направленности, обобщение и структурирование материала прикладной направленности, но и на развитие творческих способностей учащихся и развитие познавательного интереса к изучению математики ввиду рассмотрения совершенно новых заданий различного содержания. При анализе результатов констатирующего эксперимента и экспериментальной работы при выявилось, что учащиеся обладают низким уровней знаний приложений производной и интеграла в других дисциплинах: физике, химии, биологии, учащиеся продемонстрировали полное отсутствие интерпретаций между данными понятиями в математике и соответствующими понятиями в экономике. Это во многом связано с тем, что состав задач прикладной направленности в школьных учебниках ограничен, отсутствует разнообразие имеющегося материала, в процессе обучения математике недостаточно внимания уделяется решению задач прикладной направленности, связь изучаемого материала и его применения в других областях знаний осуществляется эпизодически или вообще не осуществляется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Даная выпускная квалификационная работа посвящена обучению применения элементов интегрального и дифференциального исчисления для реализации прикладной направленности школьного курса математики. Представленное в работе исследование содержит следующие результаты:

Теоретические результаты исследования состоит в следующем:

1.Изучены современные трактовки понятия «прикладная направленность» и выбрана наиболее приемлемая для данной работы, представленная в диссертации В.П. Кизиловой.

2.Установлен факт о незначительном количестве задач прикладной направленности в отдельных учебниках для 10-11классов по алгебре и началам математического анализа.

3. Разработан набор задач прикладной направленности по физике, химии, биологии, экономике с использованием производной и интеграла.

4. Разработана конкретная методика работы с задачами прикладной направленности с использованием производной и интеграла.

Экспериментальные результаты.

При проведении констатирующего эксперимента с учащимися 11 класса 594 школы Московского района установлено, что учащихся демонстрируют низкий уровень знаний при работе с задачами прикладной направленности из естественнонаучных областей с использованием производной и интеграла. Наиболее знакомой предметной областью является физика, наименее знакомой – экономика. Это необходимо учитывать при структурировании средств прикладной направленности.

Материалы выпускной квалификационной работы в виде разработанных набора задач и методики работы с набором задач прикладной направленности на естественно-научном содержании с применением производной и интеграла могут быть использованы при проведении факультативных занятий по алгебре и началам математического анализа при проведении обобщающих уроков по теме «Производная» и «Интеграл» , на практических занятиях по дисциплинам естественно научного цикла для усиления прикладной направленности математики, при организации интегрированных уроков математика- физика, математика- химия, математика-биология, математика -экономика для демонстрации взаимного пересечения (проникновения) разных предметных областей, на курсах повышения квалификации учителей математики с целью совершенствования знаний слушателей об основах реализации прикладной направленности математики при изучении производной и интеграла, на занятиях в институтах студентов математиков-методистов для расширения прикладных знаний будущих педагогов в естественно научных областях.

Эффективность использования задач прикладной направленности с применением производной и интеграла обеспечивается систематическим использованием в течение всего учебного процесса и диапазоном охвата основных приложений в физике, химии, биологии и экономике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устав учебных заведений, подведомых университетам. 1804 г. Полное собрание законов Российской империи. Собрание 1. Т. 28. СПб., 1830. № 21501. С. 626-644.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утвержден приказом Министерства образования и науки РФ № 413 от 17 мая 2012 года) с изменениями и дополнениями от: 29 декабря 2014 г., 31 декабря 2015 г., 29 июня 2017 г.
3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. — 11-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 464 с.: ил.
4. Алешинцев И. История гимназического образования в России (XVIII и XIX век). - СПб.: Издание О. Богдановой, 1912. — X, 346, VI с. : табл.- Указ. в конце кн
5. Аракелян К. Г., Болтянский В. Г. Когда и как вводить производную // Математика в школе. 1987. - № 3. - С. 43-47
6. Башмаков М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред. проф. Образования / М.И. Башмаков. – 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 256 с.
7. Борель Э. Как согласовать преподавание в средней школе с прогрессом науки. // Математика в образовании и воспитании. Сост. В. Б. Филиппов. М.: ФАЗИС, 2006.
8. Гербеков Х.А. Дифференциальные уравнения в системе профессиональной подготовки учителя математики в педвузе: автореферат дис. кандидата педагогических наук: 13.00.02 / Моск. обл. пед. ин-т. - Москва, 1991. - 17 с.

9. Дорофеев Г. В. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики // Математики в школе – 1995 – № 5 –с. 12 – 15.
10. Егупова М.В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе. Монография. – М.: МПГУ, 2014 – 220 с.
11. Иванова С. И. Вопрос реализации прикладной направленности обучения математике — довольно сложная и широкая методическая проблема. Иванова С. И. Пути реализации прикладной направленности обучения математике // Молодой ученый. — 2018. — №45. — С. 245-247.
12. Калинин С. И. К вопросу об изучении темы «Производная» // Математика в школе. 1994. - № 4. - С. 59-62.
13. Калинин С. И. О принципах отбора содержания обучения математическому анализу студентов математических специальностей // Математика. Образование: Материалы XV Междунар. конф. Чебоксары: Изд-во Чуваш, ун-та, 2007. - С. 66.
14. Калинин С. И. О совместных занятиях студентов разных курсов при изучении математического анализа // Девятая регион, науч.-метод. конф. «Оптимизация учебного процесса»: Тез. докл. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1994.-С. 17.
15. Калинин С.И. Методическая система обучения студентов педвуза дифференциальному и интегральному исчислению функций в контексте фундаментализации образования: автореферат дис. доктора педагогических наук: 13.00.02 / Калинин Сергей Иванович; [Место защиты: Ин-т содержания и методов обучения Рос. акад. образования]. - Москва, 2009. - 43 с.
16. Калинина Е.А. Школьная реформа Александра I и «положение об училищах» 1804 года. (п. 58 «Власть. Общество. Армия). Сборник

научных статей / сост. и отв. ред. Т. Н. Жуковская. — СПб., 2013. — 268 с. (Труды исторического факультета. Том XI).

17. Капкаева Л. С. Теория и методика обучения математике:частная методика. В 2 ч. Часть 2: учеб. пособие для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2017 — 191 с. — (Серия: Университеты России).
18. Кизилова В.П. Методическая система реализации прикладной направленности обучения математике в классах естественнонаучного направления.: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. – Барнаул, 2009 – 22с.
19. Колягин Ю. М. и Пикан В.В. О прикладной и практической направленности обучения математике // Математика в школе. 1985. – №6- С.27-32
20. Колягин Ю. М. Русская школа и математическое образование. / Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 2001. - 318 с.
21. Костенко И. П. Проблема качества математического образования в свете исторической ретроспективы: монография / И. П. Костенко; ФГБОУ ВПО РГУПС (филиал в г. Краснодаре). – Москва, 2013 – 502 с. Библиогр. с 468–480.
22. Ландау Л. Д., Китайгородский А. И. Физика для всех. Книга 2. Молекулы. М.: Наука, 1982, 207 с.
23. Ланков А.В., проф. К истории развития передовых идей в русской методике математики / М., 1951. - 151 с.
24. Ляликова Е. Р. Приложения определенного интеграла к решению задач экономики//Е. Р. Ляликова. -Текст: непосредственный//Молодой ученый. -2015.-№19(99). -С.11-17.
25. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. Для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш. А. Алимов.

Ю. М. Колягин, М. И. Ткачева, и др.] /- 7-е изд. – М.: Просвещение, 2019. – 463 с.: ил.

26. Мацкин М.С., Мацкина Р.Ю. О преподавании в школе с физико-математическим уклоном. Методический журнал министерства просвещения РСФСР, № 1, стр.93-94

27. Метельский Н.В Очерки истории методики математики: к вопросу о реформе преподавания математики в сред. школе / Под ред. проф. И. Я. Депмана; Предисл. проф. Б. А. Болгарского. - Минск: Вышэйш. школа, 1968. - 340 с.

28. Мехмат МГУ, 80. Математика и механика в Московском университете [Текст] / [редкол.: А. Т. Фоменко (гл. ред.) и др.]. - Москва: Изд-во Московского ун-та, 2013. - 369 с.

29. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа.11 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов – 2-е изд.., стер. - М.: Мнемозина, 2014 – 311 с.: ил.

30. Муравин Г.К., Муравина О.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень .11 кл.: учебник / Муравин Г.К., Муравина О.В. - М.: Дрофа, 2014. 318 [2] с.: ил.

31. Об одном обобщении понятия производной и его применения в математическом анализе//научные труды математического факультета Моск.пед.гос.ун-та; Юбилейный сборник 100 лет.-М. Прометей, 2000.с.27-30.

32. Покровский Н. В. Изучение элементов математического анализа в средней школе. Методический журнал министерства просвещения РСФСР, 1965 № 6, стр.39

33. Пратусевич М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. Для общеобразоват. учреждений: профил. уровень /М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А. Н. Головин. – М.: Просвещение, 2010.- 463 с.: с ил. (с 106).
34. Программа по математике для 9-10 классов средней школы. Методический журнал министерства просвещения РСФСР, № 1, 1973 год, с. 43]
35. Программы средней школы на 1964/65 учебный год. Математика. – М., Просвещение, 1964.
36. Программы средней школы на 1965/66 учебный год. Математика - М., Просвещение, 1965.
37. Программы средней школы. Математика. 1966-1972. - М., Просвещение, с.8
38. Сборник рабочих программ. 10—11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [сост. Т. А. Бурмистрова]. —2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 2018 — 143 с.
39. Сборник трудов V Всероссийской научно-практической конференции для студентов и учащейся молодежи / Юргинский технологический институт. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. 609 с.
40. Соловьева О.В. Методические особенности реализации прикладной направленности курса алгебры основной школы в рамках предпрофильной подготовки учащихся: монография / Соловьева О.В. - М. : Московский педагогический государственный университет, Журнал «Наука и школа» №5, Год: 2010, 84-86 с.
41. Тарасевич Л. С., Гребенников П. И., Леусский А.И. Микроэкономика: Учебник. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Юрайт Издат., 2006. — 374 с. — (Университеты России).
42. Терешин Н.А. Применение методов математического анализа к решению задач в курсе математики средней школы: диссертация ...

кандидата педагогических наук: 13.00.00 / Н.А. Терешин. - Москва, 1971. - 154 с.:ил.

43. Терёшин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: Книга для учителя. – М.: Просвещение,1990 – 96 с.
44. Фирсов В. В. О прикладной ориентации курса математики /В. В. Фирсов// Математика в школе. – 2006 – №6. – с. 2-9.
45. Шапиро И. М. Прикладная и практическая направленность обучения математике в средней общеобразовательной школе / И. М. Шапиро // Педагог: Наука, технология, практика. – 1998. – N 2 – С.72 - 75.
46. Эймонтова Р. Г. Просвещение в России в первой половине XIX века // Вопросы истории. 1986. № 10. С. 78–93.
47. Энгельс Ф., см. Маркс К. и Энгельс Ф., Соч., 2 изд., т. 20, с. 587
48. Эрентраут Е.Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников: Учебное пособие. – Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2004. – 119с.
49. https://school20-kras.edumsko.ru/activity/kadet/post/403909

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

(Презентация)

Реализация прикладной направленности математики при решении задач естественнонаучного содержания с помощью производной

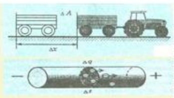
Естественнонаучные направления при реализации прикладной направленности

Прикладная направленность математики при изучении производной и интеграла

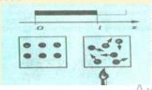
- Физика
- Химия
- Биология
- Экономика

Применение производной в физике.
Задание. Установите соответствие.

Производная в физике



- $\upsilon(t) = x'(t)$ – *скорость*
- $a(t) = \upsilon'(t)$ - *ускорение*
- $I(t) = q'(t)$ - *сила тока*
- $c(t^0) = Q'(t^0)$ - *теплоемкость*
- $p(l) = m'(l)$ - *линейная плотность*
- $к(t) = l'(t)$ - *коэффициент линейного расширения*
- $\omega(t) = \varphi'(t)$ - *угловая скорость*
- $e(t) = \omega'(t)$ - *угловое ускорение*
- $N(t) = A'(t)$ - *мощность*
- $F(x) = A'(x)$ - *сила по перемещению*
- $E(t) = Ф'(t)$- *ЭДС индукции*
- $F(t) = p'(t)$ – *2закон Ньютона*



Применение производной в ЭКОНОМИКЕ
Задание. Поставьте в соответствие экономическим понятиям математическое

Экономическое понятие	Обозначение	Математическое понятие
1. производительность труда		
Объём произведённой продукции *u* за время *t*.	$u = u(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_1 - t_0$	Приращение аргумента
Величина произведённой продукции за некоторое время	$\Delta U = U(t_1) - U(t_0) = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$	Приращение функции
Средняя производительность труда	$\Delta u / \Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Производительность труда в момент времени t_0	$\lim\limits_{\Delta t \to 0} (\Delta u / \Delta t) = u'(t)$	Производная $u'(t)$

Применение в экономике (продолжение) 2. Предельные затраты

Задание. Выстроите все горизонтали, найдя ошибки.

Экономическое понятие	Обозначение	Математическое понятие
С– себестоимость (издержки) зависят от q (объём произведённой продукции)	С = f (q).	Приращение аргумента
Изменение q(объёма произведённой продукции)	$\Delta C/\Delta q$	Функция
Величина затрат по себестоимости при некотором объеме произведенной продукции	$\Delta C=C(q_1)-C(q_0)=C(q_0+\Delta t)-C(q_0)$	Приращение функции
Среднее приращение затрат на производство, т.е. приращение затрат на единицу произведённой продукции	$\Delta q=q_1-q_0$	Производная C ' (q)
Предельные затраты на производство (себестоимость).	$\lim\limits_{\Delta q\to 0} (\Delta C/\Delta q) = C'(q)$	Отношение приращения функции к приращению аргумента

Применение в экономике (продолжение) 3. Предельный доход

Задание. Заполните таблицу (Синим цветом то, что не видно).

Экономическое понятие	Обозначение	Математическое понятие
Доход *R*	R = R (q)	Функция
Изменение q (объёма произведённой продукции)	$\Delta q=q_1-q_0$	Приращение аргумента
Величина дохода при некотором объеме произведенной продукции	$\Delta R= R(q_1) - R(q_0)=R(q_0+\Delta q)-R(q_0)$	Приращение функции
Среднее приращение дохода при производстве, т.е. приращение дохода на единицу произведённой продукции	$\Delta R/\Delta q$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Предельный доход при производстве – *маржинальный доход MR*	$\lim\limits_{\Delta q\to 0} (\Delta R/\Delta q) = R'(q)$	Производная R' (q)

Применение производной в биологии.

Задание. Составить таблицу по образцу для следующей задачи по биологии и решить ее : зависимость суточного удоя у в литрах от возраста коров *x* в годах определяется уравнением $У(x)= -9{,}3+6{,}86x-0{,}49x^2$, , где $x>2$. Найдите возраст дойных коров, при котором суточный удой будет максимальным.

Понятие на языке биологии	Обозначение	Понятие на языке математики
Численность в момент времени t_1	$x = x(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение численности популяции	$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$	Приращение функции
Скорость изменения численности популяции	$\Delta x/\Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Относительный прирост в данный момент	$\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta x/\Delta t$	Производная $P = x'(t)$

Применение производной в химии.

Задание. Выбрать из предложенных задач ту, в которой используется понятие, представленное таблице.

1. Сколько теплоты выделится при растворении 200 г оксида меди (II) (CuO) в соляной кислоте (водный раствор HCl), если термохимическое уравнение реакции:
CuO + 2HCl = CuCl2 + H2O + 63,6 кДж
2. При окислении аммиака (NH3) кислородом в присутствии катализатора образуется оксид азота (II) и вода. Какой объём кислорода вступит в реакцию с 20 л аммиака?
3. Зависимость между массой вещества M, получаемого химической реакции и временем t выражается уравнением выражается уравнением: $M(t) = At^2 + Bt$, где A и B – постоянные. Какова скорость реакции?

Понятие на языке химии	Обозначение	Понятие на языке математики
Количество в-ва в момент времени t_0	$c = c(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение количества в-ва	$\Delta c = c(t+ t) - c(t)$	Приращение функции
Средняя скорость химической реакции	$\Delta c/\Delta t$	Отношение приращён. функции к приращён. аргументу

Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю - есть скорость химической реакции в данный момент времени

$V(t) = c'(t)$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. (Тест)

Задание 1. Блиц- опрос закончите предложение или вставьте пропущенное слово.

Вопросы	Ответы
1. Производная пути по времени – это…	
2. При рассмотрении химических реакций предел отношения изменения массы вещества ко времени, в течение которого оно произошло называется	
3. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента называется Lim (Δy/ Δx) $\Delta x \to 0$	
4. При решении экономических задач предел, к которому стремится отношение изменения объема производимой продукции ко времени, в течение которого это изменение произошло, называется …	
5. Предел отношения изменения значения числа особей организмов ко времени, в течение которого этот процесс происходил, называется …	
6. Чтобы вычислить изменение импульса p=p(t) системы, необходимо найти …. силы по времени.	

7. Численность популяции является … для функции скорости роста популяции	
8. Пройденный путь является … скорости по времени	
9. … это интеграл теплоёмкости тела по температуре	
10. Интегралом линейной плотности неоднородного стержня по его длине Является …	

Задание 2. Распределите задачи на две группы: решаемые с помощью производной или интеграла. (Слева напротив поставьте или букву П или И)

1) Известно, что тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $s(t)= t^2+2$. Найдите кинетическую энергию тела через 3с после начала движения.

2) Дана электрическая цепь, в которой заряд q на пластинах конденсатора изменяется по закону $q = 10^{-6}\cos 10^4 t$. Записать закон зависимости силы тока в цепи от времени $I= I(t)$.

3)Определить объем продукции q (в штуках), произведенной рабочим за 8 часов, если зависимость производительности труда от времени имеет вид $z(t) = - t^2 + 8t$.

4)Пусть при протекании химической реакции количество некоторого вещества задается зависимостью: $p(t) = 0{,}5 t^2 + 3t +3$ (моль). Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

5) Вычислите массу участка стержня в кг от $x_1= 3$ м до $x_2 = 6$ м, считая от начала стержня, если его линейная плотность задается формулой $\rho(x) = x^2+ 2x$

6)Зависимость между количеством вещества n, получаемого в ходе химической реакции и временем t выражается в виде уравнения $n(t) = n_0(1 – e^{кt})$. Найти зависимость скорости химической реакции от времени.

7)Космическая экспедиция в результате исследования планеты обнаружила колонию микроорганизмов. Для изучения в питательную среду внесли 1000 микроорганизмов. Опытным путем обнаружили, что численность популяции возрастает по закону $N(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$, где t – время в часах. В какой момент времени рост численности микроорганизмов сменяется убылью?

8)Объём продукции u, выпускаемой предприятием в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + 7{,}5t^2 + 100t$, где t – время(ч); причём $0 \leq t \leq 8$) Вычислить производительность труда и скорость её изменения через 1 ч после начала и за 1 ч до окончания рабочего дня.

9) Вычислите количество электричества, проходящего по проводнику за промежуток времени [3;4], если сила тока задается формулой $I(t) = 3t^2+2t$.

10)Скорость роста численности популяции бактерий имеет вид $v(t) = 100 \cdot 2^t$ Время t измеряется в часах. Найдите увеличение численности популяции за 4 часа.

Задание 3. Соотнесите величину и формулу, которая его описывает.

υ(t)- скорость	υ′ (t), где υ(t)- скорость тела
a (t)- ускорение	x′(t), где x(t)-пройденный путь
I (t) - сила тока	q′ (t), где q (t)- количество электричества
C(t) - теплоемкость	Q′ (t), где Q (t) -количество теплоты
$\rho(l)$ - линейная плотность	φ’(t), где φ(t) – угол поворота
ω (t) - угловая скорость	m′(l), m (l)-масса неоднородного стержня
a (t) - угловое ускорение	ω′ (t), где ω (t) - угловая скорость
N(t) - мощность	V ′ (t), где V - объем продукции
П(t) -производительность труда	A′ (t), где A – работа

v(t) скорость роста популяции   N´(t), где N(t) – численность популяции

A (t)– работа $\int_{x_2}^{x_1} \rho(x)dx$, где ρ(l) - линейная плотность

m(x) –масса тонкого стержня $\int_{t_2}^{t_1} N(t)dt$, где N(t)-мощность

N(t) – численность популяции $\int_{t_2}^{t_1} I(t)dt$, где I(t) –сила тока

q(t) – количество электричества $\int_{t_2}^{t_1} v(t)dt$, v – скорость роста популяции

Задание 4. Даны функции – зависимости некоторых величин (концентрация вещества, пройденный телом путь, численность популяции, объем произведенной продукции) от времени. Укажите правильные ответы.

1. Если производные этих функций постоянны, то

1) движение равномерное

2) скорость химической реакции увеличивается

3) численность популяции не изменяется

4) производительность труда постоянна

5) функция возрастает

2. Если производные этих функции есть некоторые переменные величины, то

1) движение неравномерное

2) скорость химической реакции изменяется со временем

3) численность популяции не изменяется

4) доход при производстве продукции постоянен

5) или большему значению аргумента соответствует большее значение функция или   меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функция.

3. Если вторая производная этих функций есть положительное число, то

1) движение равноускоренное

2) скорость химической реакции возрастает

3) численность популяции увеличивается

4) себестоимость продукции уменьшается

5) функция в такой точке имеет минимум.

4. Если вторые производные этих функций есть отрицательное число, то

1) движение равнозамедленное

2) скорость растворения некоторого вещества в воде не изменяется

3) численность популяции уменьшается

4) предельный доход при производстве уменьшается

5) функция в такой точке имеет максимум.

5. Если производные функций равны нулю, то

1) движение не происходит

2) скорость растворения кислоты в воде постоянна

3) численность популяции увеличивается

4) предельный доход при производстве достиг экстремального значения

5) функция в такой точке может иметь экстремум

Задание 5. Некоторая функция изменяется по закону $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$. Составьте возможные задачи, изменив условие так, чтобы они стали прикладными из физики, химии, биологии, экономики с использованием при решении производной или интеграла.

Далее запишите переконструированные вами задачи.