Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Физический факультет
205 группа

Кагиров Ринат Рустамович

Курсовая работа

Вселенная с несколькими отскоками

Руководитель научной работы
КАНДИДАТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК СЕРГЕЙ АНДРЕЕВИЧ МИРОНОВ
12 мая 2021г.

Москва, 2021 г.

1 Введение

Последние исследования показали, что теории Хорндески и их расширения, предлагают замечательные точки зрения для решения различных космологических проблем, таких как эволюция с отскоком или Гинезисом. Была показана в работах [1, 3, 4] возможность существования устойчивой эволюции с одним отскоком. В данной работе рассматривается возможность существования устойчивого решения с несколькими отскоками в рамках расширенных теорий Хорндески.

2 Основы

Из классического действия Эйнштейна-Гильберта и принципа наименьшего действия были получены уравнения поля в случае отсутствия материи ($T_{\mu\nu} = 0$) и $\Lambda = 0$:

$$\mathcal{S} = \int R\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \tag{1}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \tag{2}$$

Далее было получено квадратичное действие S^2 путем замены:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3}$$

где $\eta_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$ плоский метрический тензор и его малые возмущения, соответственно.

$$\mathcal{S}^{(2)}_{\mathrm{EH}} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\sigma h_{\mu\nu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu h\right)^2 + \left(\partial^\nu h_{\mu\nu}\right)^2 + \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} \tag{4}$$

Из уравнений поля (2) путем той же замены (3) были получены EOM[1]:

$$-\partial_\lambda\partial^\lambda h_{\mu\nu} + \partial^\lambda\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial^\lambda\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\mu\partial_\nu h^\lambda_\lambda = 0 \tag{5}$$

Далее пользуясь ADM формализмом [5] было получено крайне важное в дальнейшем уравнение распространения гравитационных волн:

$$\Box h^{(TT)} = 0 \tag{6}$$

Где индексы TT означают бесследовость и поперечность.

2.1 Теории Хорндески

В данном разделе обсуждаются теории Хорндески. В теориях Хорндески упомянутое действие Эйнштейна-Гильберта модернизируется следующим образом (сигнатура: - + + +):

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_{\mathcal{BH}}\right) \tag{7}$$

где

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \tag{8}$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X)\Box\pi \tag{9}$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X)R + 2G_{4X}(\pi, X)\left[(\Box\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu}\right] \tag{10}$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X)G^{\mu\nu}\pi_{;\mu\nu} + \frac{1}{3}G_{5X}\left[(\Box\pi)^3 - 3\Box\pi\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} + 2\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\rho}\pi^{\nu}_{;\rho}\right] \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{BH}} = F_4(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'} + \\ + F_5(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'}\pi_{;\sigma\sigma'}\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\pi -$ скалярное (галилеонное) поле, $X = g^{\mu\nu}\pi_{,\mu}\pi_{,\nu}$, $\pi_{,\mu} = \partial_\mu\pi, \pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\pi, \Box\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\pi, G_{4X} = \partial G_4/\partial X$ и т. д.;

Теория Хорндески является наиболее общей скалярно-тензорной теорией модифицированной гравитации, характеризующейся наличием вторых производных в лагранжиане, которые тем не менее не приводят к появлению производных третьего и более высоких порядков в уравнениях поля.

Было проверено, что для $\mathcal{L}_3 = K(\pi, X)$ действительно не возникает третьих производных при варьировании по π, для других же слагаемых действия (7) вычисления становятся невообразимыми и проводятся с помощью компьютерной алгебры.

2.2 Один отскок

Теории Хорндески дарят прекрасные возможности для рассмотрения различных сценариев эволюции Вселенной, мы рассмотрим отскок. Такая модель предполагает, что изначально происходит сжатие Вселенной, которое в некоторый момент времени (момент «отскока») сменяется расширением [2, 3]

Нас интересуют космологические модели, описываемые пространственно-плоской метрикой Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j.$$

В обзоре [2] было показано, что можно подобрать такие функции методом реконструкции, описывающие (7), что будут выполняться все условия на стабильность решений, а именно:

1. Выполнение уравнений поля, которые следуют из (7)

$$\begin{aligned}\delta g^{00}: \quad F - 2F_X X - 6HK_X X\dot{\pi} + K_\pi X + 6H^2 G_4 + \\ +6HG_{4\pi}\dot{\pi} - 24H^2 X\left(G_{4X} + G_{4XX}X\right) + 12HG_{4\pi X}X\dot{\pi} - \\ -6H^2X^2\left(5F_4 + 2F_{4X}X\right) = 0\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\delta g^{ii}: \quad F - X\left(2K_X\ddot{\pi} + K_\pi\right) + 2\left(3H^2 + 2\dot{H}\right)G_4 - \\ -12H^2G_{4X}X - 8\dot{H}G_{4X}X - 8HG_{4X}\ddot{\pi}\dot{\pi} - \\ -16HG_{4XX}X\ddot{\pi}\dot{\pi} + 2(\ddot{\pi} + 2H\dot{\pi})G_{4\pi} + \\ +4XG_{4\pi X}(\ddot{\pi} - 2H\dot{\pi}) + 2XG_{4\pi\pi} - 2F_4X\left(3H^2X + \right. \\ \left. +2\dot{H}X + 8H\ddot{\pi}\dot{\pi}\right) - 8HF_{4X}X^2\ddot{\pi}\dot{\pi} - \\ -4HF_{4\pi}X^2\dot{\pi} = 0\end{aligned} \tag{14}$$

2. Отсутствие градиентных неустойчивостей и решений с духами (условия на скорость распространения тензорных и скалярных возмущений, точные формулы этих условий мы определим ниже)

Аналогично (4) в работе [4] было получено квадратичное действие для возмущений в теории с лагранжианом (7):

$$S=\int \mathrm{d}t\ \mathrm{d}^3xa^3[(\left(\frac{\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}}{8}\left(\dot{h}^T_{ik}\right)^2-\frac{\mathcal{F}_\mathcal{T}}{8a^2}\left(\partial_i h^T_{kl}\right)^2\right)+\left(-3\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}\dot{\zeta}^2+\mathcal{F}_\mathcal{T}\frac{(\nabla\zeta)^2}{a^2}\right.$$
$$\left.-2\mathcal{G}_\mathcal{T}\alpha\frac{\Delta\zeta}{a^2}+2\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}\dot{\zeta}\frac{\Delta\beta}{a^2}+6\Theta\alpha\dot{\zeta}-2\Theta\alpha\frac{\Delta\beta}{a^2}+\Sigma\alpha^2\right)\Bigg] \tag{15}$$

Со следующими коэффициентами:

$$\mathcal{G}_\mathcal{T}=2G_4-4G_{4X}X+G_{5\pi}X-2HG_{5X}X\dot{\pi}$$

$$\mathcal{F}_\mathcal{T}=2G_4-2G_{5X}X\ddot{\pi}-G_{5\pi}X$$

$$\mathcal{D}=2F_4X\dot{\pi}+6HF_5X^2$$

$$\hat{\mathcal{G}}_\mathcal{T}=\mathcal{G}_\mathcal{T}+\mathcal{D}\dot{\pi}$$

$$\begin{aligned}&\Theta=-K_XX\dot{\pi}+2G_4H-8HG_{4X}X-8HG_{4XX}X^2+G_{4\pi}\dot{\pi}+2G_{4\pi X}X\dot{\pi}\\&-5H^2G_{5X}X\dot{\pi}-2H^2G_{5XX}X^2\dot{\pi}+3HG_{5\pi}X+2HG_{5\pi X}X^2\\&+10HF_4X^2+4HF_{4X}X^3+21H^2F_5X^2\dot{\pi}+6H^2F_{5X}X^3\dot{\pi}\\[1em]&\Sigma=F_XX+2F_{XX}X^2+12HK_XX\dot{\pi}+6HK_{XX}X^2\dot{\pi}-K_\pi X-K_{\pi X}X^2\\&-6H^2G_4+42H^2G_{4X}X+96H^2G_{4XX}X^2+24H^2G_{4XXX}X^3\\&-6HG_{4\pi}\dot{\pi}-30HG_{4\pi X}X\dot{\pi}-12HG_{4\pi XX}X^2\dot{\pi}+30H^3G_{5X}X\dot{\pi}\\&+26H^3G_{5XX}X^2\dot{\pi}+4H^3G_{5XXX}X^3\dot{\pi}-18H^2G_{5\pi}X-27H^2G_{5\pi X}X^2\\&-6H^2G_{5\pi XX}X^3-90H^2F_4X^2-78H^2F_{4X}X^3-12H^2F_{4XX}X^4\\&-168H^3F_5X^2\dot{\pi}-102H^3F_{5X}X^3\dot{\pi}-12H^3F_{5XX}X^4\dot{\pi}.\end{aligned} \tag{16}$$

Из структуры квадратичного действия (15) видно, что α и β — нединамические степени свободы. Варьируя действие (15) по этим переменным, получим два уравнения связи:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\beta}{a^2}&=\frac{1}{\Theta}\left(3\Theta\dot{\zeta}-(\mathcal{G}_\mathcal{T}+\mathcal{D}\dot{\pi})\frac{\Delta\zeta}{a^2}+\Sigma\alpha\right),\\ \alpha&=\frac{\mathcal{G}_\mathcal{T}\dot{\zeta}}{\Theta}\end{aligned} \tag{17}$$

Решив эти два уравнения, действие (15) можно переписать в терминах только динамических степеней свободы:

$$\begin{aligned}S=\int \mathrm{d}t\ \mathrm{d}^3xa^3\Bigg[&\tfrac{\mathcal{G}_\mathcal{T}}{8}\left(\dot{h}^T_{ij}\right)^2-\tfrac{\mathcal{F}_\mathcal{T}}{8a^2}\left(\partial_k h^T_{ij}\right)^2+\\&+\mathcal{G}_\mathcal{S}\dot{\zeta}^2-\mathcal{F}_\mathcal{S}\tfrac{(\nabla\zeta)^2}{a^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{18}$$

Где введены обозначения:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{S}} = \frac{\Sigma \mathcal{G}_{\mathcal{T}}^2}{\Theta^2} + 3\mathcal{G}_{\mathcal{T}},$$
$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{a}\frac{d\xi}{dt} - \mathcal{F}_{\mathcal{T}}, \tag{19}$$
$$\xi = \frac{a(\mathcal{G}_{\mathcal{T}} + \mathcal{D}\dot{\pi})\mathcal{G}_{\mathcal{T}}}{\Theta}.$$

Таким образом, действие (15) содержит одну скалярную ζ и две тензорных h_{ij}^T степени свободы. Квадраты скоростей звука для скалярных и тензорных мод имеют следующий вид соответственно.

$$c_{\mathcal{T}}^2 = \frac{\mathcal{F}_{\mathcal{T}}}{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}}, \quad c_{\mathcal{S}}^2 = \frac{\mathcal{F}_{\mathcal{S}}}{\mathcal{G}_{\mathcal{S}}}. \tag{20}$$

Именно на эти величины накладываются ограничения:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}} \geq \mathcal{F}_{\mathcal{T}} > \epsilon > 0, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{S}} \geq \mathcal{F}_{\mathcal{S}} > \epsilon > 0. \tag{21}$$

2.3 Несколько отскоков

После анализа полученных результатов [1, 2, 3, 4] для одного отскока возникает логичный вопрос: возможно ли подобрать такие функции в (7), которые будут описывать бесконечное количество отскоков (Cyclic Universe). В этом разделе мы занимаемся поиском этих функций и их анализом.

Основная идея совпадает с методом построения устойчивых решений, описанных в [1, 2, 3, 4].

Мы взяли за масштабный фактор следующую зависимость (исходя из того, что в момент отскока $H(t_{bounce}) = 0$, а $a(t_{bounce}) \neq H'(t_{bounce}) \neq 0$)

$$a(t) = 2 - \cos(t) \tag{22}$$

Которому соответствует:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{Sin}(t)}{2 - \mathrm{Cos}(t)} \tag{23}$$

$$\dot{\mathrm{H}} = \frac{-1 + 2\cos(t)}{(-2 + \cos(t))^2} \tag{24}$$

Далее нам нужно подобрать такие функции в (7), чтобы выполнялись два упомянутых условия.

Так как существует определенный произвол в выборе функций, для удобства будем искать их в следующем виде:

$$\begin{array}{l} F(\pi, X) = f_0(\pi) + f_1(\pi)X + f_2(\pi)X^2, \\ K(\pi, X) = k_1(\pi)X, \\ G_4(\pi, X) = \frac{1}{2} + g_{40}(\pi) + g_{41}X, \\ G_5(\pi, X) = 0 \\ F_4(\pi, X) = f_{40}(\pi), \\ F_5(\pi, X) = 0 \end{array} \tag{25}$$

Без ограничения общности можно считать, что: $\pi(t) = t$, следовательно $X = 1$, а производные функций (25) выражаются следующим образом:

$$\begin{array}{l} F_X = f_1(t) + 2f_2(t), \quad F_{XX} = 2f_2(t), \\ K_X = k_1(t), \quad G_{4X} = g_{41} \end{array} \tag{26}$$

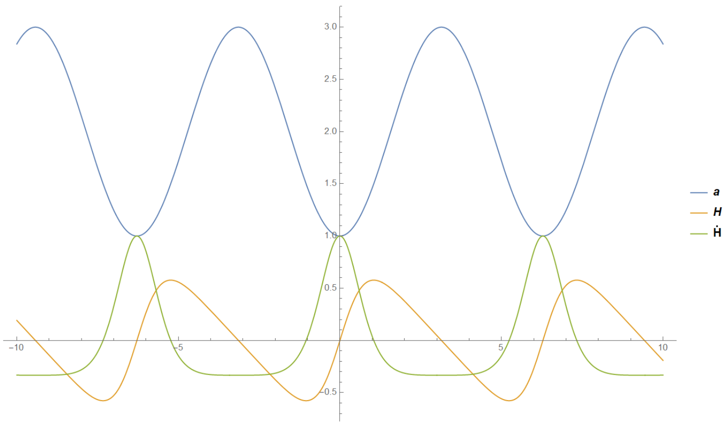

Рис. 1: Зависимости $a(t), H(t)$ и $\dot{H}(t)$

Ясно, что уравнения поля и условия на скорость света не определяют точно нужные нам функции, поэтому они будут выбраны из удобства и некоторых других условий.Например, должна выполняться запрещающая теорема (no-go теорема), ограничивающая поведение $\xi(t)$, а именно - эта функция должна быть монотонно возрастающей на всем решении. Тогда:

$$\begin{aligned}
&\Theta = \cos(t)\\
&\mathcal{D} = 2\sin(t)\\
&\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \mathcal{F}_{\mathcal{T}} = 1\\
&f_0 = b + c_0\sin(\alpha t)
\end{aligned} \tag{27}$$

Таким образом мы можем точно определить интересующий нас лагранжиан с тремя параметрами, которые изменяют решения при их варьировании.

Далее подставив (27) и выраженные функции в уравнения поля (13-14), были найдены неизвестные функции f_1 и f_2:

$$f_1 = -2c_0\cos(\alpha t) - 2b - 68\sin(t) + 51\cos(t) + \frac{170-213\sin(t)}{\cos(t)-2} + \frac{3-108\sin(t)}{(\cos(t)-2)^2} + 111 \tag{28}$$

$$f_2 = c_0\cos(\alpha t) + b + 53\sin(t) - 17\cos(t) + \frac{3(56\sin(t)+1)}{(\cos(t)-2)^2} + \frac{219\sin(t)-52}{\cos(t)-2} - 36 \tag{29}$$

Теперь у нас есть все функции (с точностью то постоянных коэффициентов), которые понадобятся для полного описания лагранжиана (7).

2.4 Анализ устойчивости

Далее нам нужно подобрать такие коэффициенты α, c_0, b, чтобы выполнялись условия на скорости распространения возмущений скалярных мод (21), так как тензорные мы положили равными 1.

Предоставим здесь явные выражения для функций, входящих в коэффициенты при квадратичном действии:

$$\mathcal{G}_\tau = 1 \tag{30}$$

$$\mathcal{F}_\tau = 1 \tag{31}$$

$$\mathcal{F}_\mathcal{S} = \frac{\cos(t) - 2\left(2\tan^2(t) + \tan(t)\sec(t) + 1\right)}{\cos(t) - 2} \tag{32}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_\mathcal{S} = \tfrac{1}{8(1-2\sec(t))^2}\sec^4(t)\left(32c_0(\cos(t)-2)^2\cos(\alpha t) + \right.\\ 2(91-64b)\cos(t) + 4(4b+105)\cos(2t) + 144b - 16\sin(t) - \\ \left. 236\sin(2t) + 64\sin(3t) - 126\cos(3t) + 3\cos(4t) - 415\right)\end{gathered} \tag{33}$$

$$\xi(t) = (2\sin(t)+1)(-(\cos(t)-2))\sec(t) \tag{34}$$

$$\begin{gathered}c_\mathcal{S}^2(2(\cos(t)-2)(-8\sin(t) + 3\cos(t) + 4\cos(2t) + \cos(3t) - 12))/\\ \left(32c_0(\cos(t)-2)^2\cos(\alpha t) + 2(91-64b)\cos(t) + 4(4b+105)\cos(2t) + \right.\\ \left. 144b - 16\sin(t) - 236\sin(2t) + 64\sin(3t) - 126\cos(3t) + 3\cos(4t) - 415\right)\end{gathered} \tag{35}$$

$$c_\mathcal{T}^2 = 1 \tag{36}$$

Далее были построены графики полученных функций скорости при различных коэффициентах α, c_0, b для того, чтобы определить те самые коэффициенты, удовлетворяющие условиям устойчивости.

Представлены зависимости $c_\mathcal{S}^2(t)$ при различных коэффициентах α, c_0, b. Нашим условиям удовлетворяет случай при $b > 12$, а α, c_0 можно выбирать в достаточно широких диапазонах, что подтверждает устойчивость найденных решений. (Рис. 2-5)

Также были построены зависимости $F_s(t), G_s(t), \xi(t)$ при найденных значениях параметров. (Рис. 6-8).

Итак, мы получили такие значения параметров при которых выполняются условия на устойчивость решений, причем все коэффициенты удовлетворяют им с достаточно широкой окрестностью.

2.5 Заключение

Было проведено исследование современных теорий эволюции Вселенной. В рамках расширенной теории Хорнденски были построены устойчивые решения для нескольких отскоков.

3 Графики

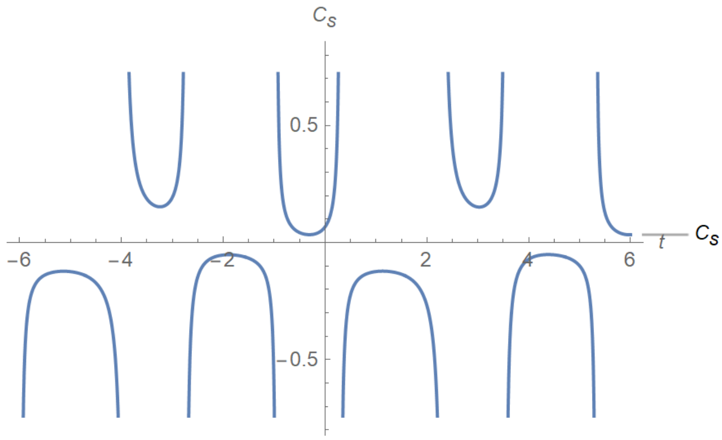

Рис. 2: Неустойчивое решение $c_S^2, b < 5$

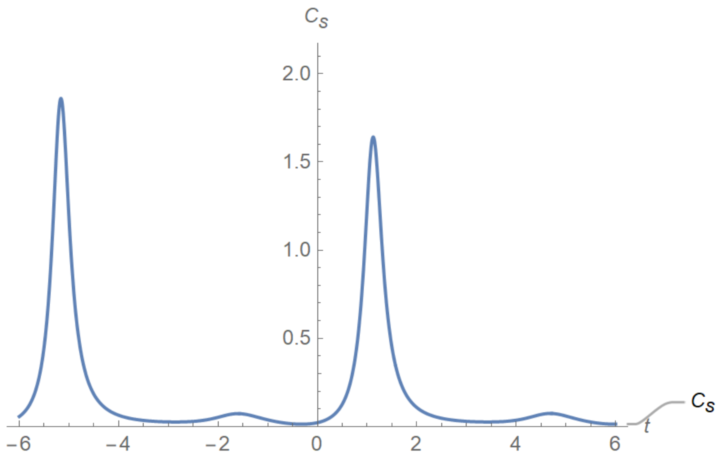

Рис. 3: Сверхсветовое распространение скалярных возмущений, $c_S^2 > 1$. $b = 5.36, \alpha = 0.035, c_0 = 3.94$

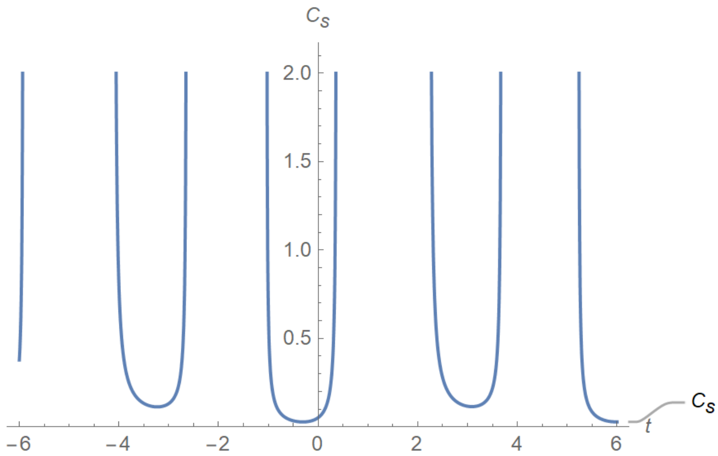

Рис. 4: Неустойчивое решение, сверхсветовое распространение $c_S^2 > 1, b < 0$

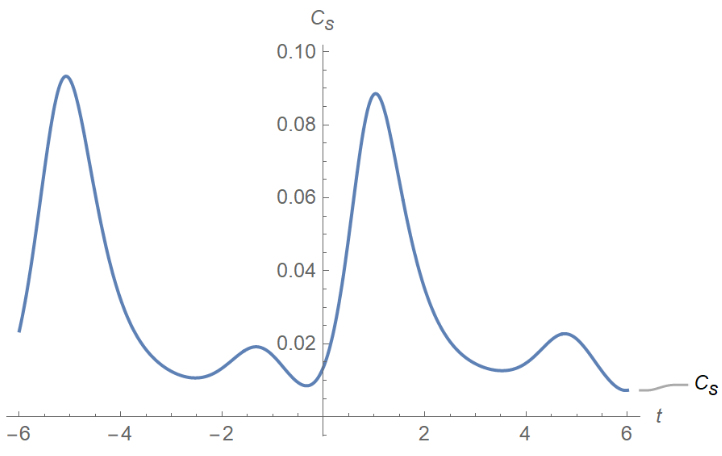

Рис. 5: Устойчивое решение, $0 < c_S^2 < 1, b > 12$

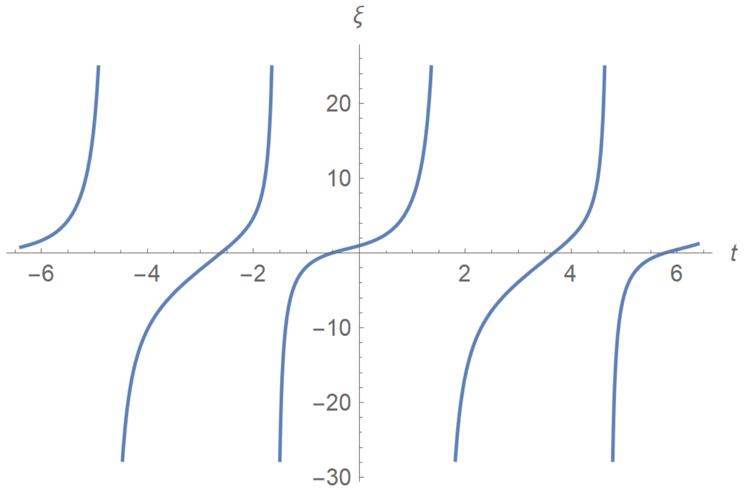

Рис. 6: Устойчивое решение, $\xi(t)$

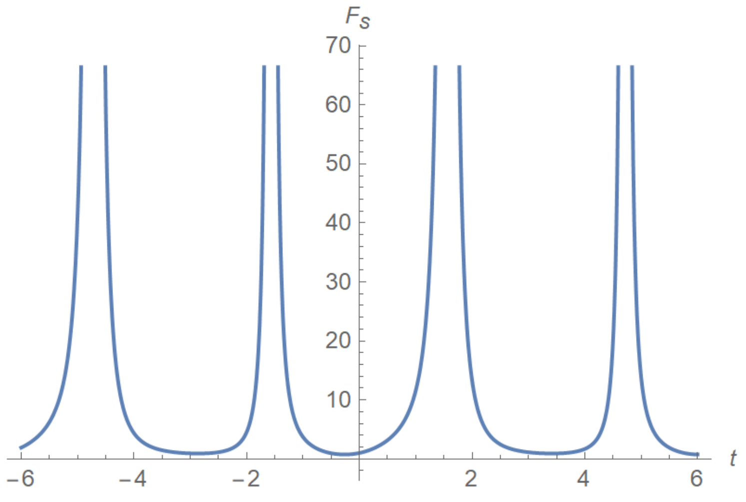

Рис. 7: Устойчивое решение, $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(t)$

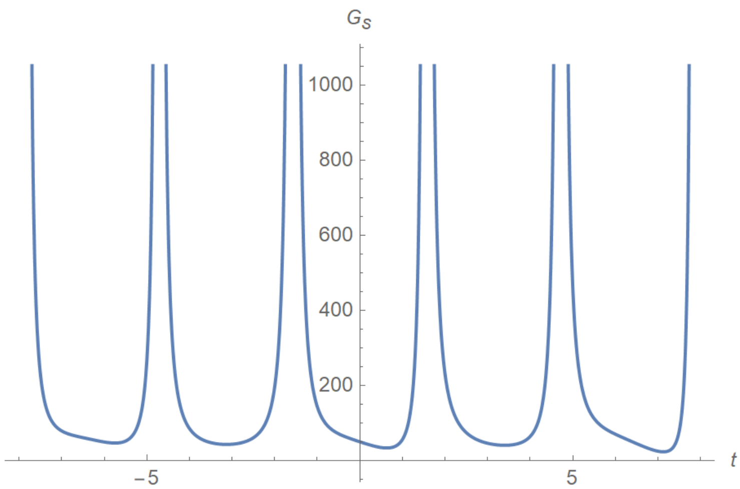

Рис. 8: Устойчивое решение, $\mathcal{G}_{\mathcal{S}}(t)$

Список литературы

[1] Anna Ijjas. Space-time slicing in horndeski theories and its implications for non-singular bouncing solutions. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(02):007, 2018.

[2] R Kolevatov, S Mironov, N Sukhov, and V Volkova. Cosmological bounce and genesis beyond horndeski. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(08):038, 2017.

[3] S Mironov, V Rubakov, and V Volkova. Bounce beyond horndeski with gr asymptotics and γ-crossing. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(10):050, 2018.

[4] S Mironov, V Rubakov, and V Volkova. Genesis with general relativity asymptotics in beyond horndeski theory. *Physical Review D*, 100(8):083521, 2019.

[5] Valery A Rubakov and Dmitry S Gorbunov. *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot big bang theory.* World Scientific, 2011.