Реферат

Объём 19 с., 4 гл., 4 теоремы, 2 леммы, 1 замечание, 6 источников.

Устойчивость нулевого решения, нормальная форма, нетривиальные решения, состояния равновесия, теория синхронизации автоколебательных систем

Цель работы – для системы из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка найти все возможные состояния равновесия и исследовать их на устойчивость. В процессе работы строилась и анализировалась нормальная форма данной системы. А также для полученных периодических решений выписаны асимптотические формулы.

Содержание

Введение

В выпускной квалификационной работе рассмотрена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которая возникает в теории синхронизации автоколебательных систем

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + (1+\delta_1\varepsilon)x_1 + c(1+\delta_3\varepsilon)x_2 = -\dot{x}_1 x_1^2 + a x_1^3, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + c(1+\delta_4\varepsilon)x_1 + (1+\delta_2\varepsilon)x_2 = -\dot{x}_2 x_2^2 + a x_2^3, \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $c, a, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in R,\ \ c > 0,\ \ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, то есть интерпретируем параметр ε как малый. Рассматриваемая система возникает при изучении математической модели радиофизики (см. монографию О. Блакьер, ссылка на которую имеется в списке литературы в данной дипломной работе)[1]. Естественно, она может иметь и другие приложения при изучении автоколебательных систем.

Во-первых, в работе будет изучаться вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия, если $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 > 0$.

Во-вторых, будет изучаться вопрос о структуре окрестности нулевого решения системы дифференциальных уравнений (0.1), в случае близком к резонансу собственных частот колебаний линеаризованной в нуле системы дифференциальных уравнений (0.1), если $\varepsilon = 0$. Бифуркации будут изучаться, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Предварительно рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + c x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_2 + c x_1 = 0. \end{aligned}$$

У данной системы найдём те значения параметра c, при которых у нее есть периодические решения с частотами σ и 3σ.

В таком случае одним из центральных моментов будет вопрос о существовании у системы (0.1) периодических по t решений. Для этого будут использованы методы теорем нелинейных систем (теорем нелинейных колебаний). Среди них следует отметить метод периодических многообразий нормальных форм (Пуанкаре-Дюлака), асимптотические методы анализа.

Подчеркнём, что при анализе вопросов, связанных с бифуркациями автоколебаний, ограничемся рассмотрением случая, когда $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то есть в этой части работы ε интерпретируем как малый неотрицательный (или положительный) параметр.

1 Устойчивость нулевого решения

Для анализа устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений (0.1), как обычно, используем теорему об устойчивости по первому (линейному) приближению.
Это означает, что вместо системы дифференциальных уравнений (0.1) следует рассмотреть систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + (1+\delta_1\varepsilon)x_1 + c(1+\delta_3\varepsilon)x_2 = 0, \\ &\ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + c(1+\delta_4\varepsilon)x_1 + (1+\delta_2\varepsilon)x_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь считаем, что $c, a, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in R,\ \ c > 0,\ \ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений системы дифференциальных уравнений (1.1).

У системы дифференциальных уравнений (1.1) будем искать решения в форме Эйлера, то есть

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{\lambda t}p_1, \\ x_2 &= e^{\lambda t}p_2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $p_1, p_2 \in C(R)$.

Подстановка равенств (1.2) в уравнения (1.1) приводит нас к системе алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)p_1 + c(1+\delta_3\varepsilon)p_2 = 0, \\ &c(1+\delta_4\varepsilon)p_1 + (\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_2\varepsilon)p_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Система алгебраических уравнений (1.3) имеет ненулевые решения, если её определитель равен 0. В нашем случае должно быть выполнено равенство

$$(\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)(\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_2\varepsilon) - c^2(1+\delta_3\varepsilon)(1+\delta_4\varepsilon) = 0. \tag{1.4}$$

После упрощения равенства (1.4) получим, что λ следует искать как корень уравнения

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{1.5}$$

где

$$a_3 = -4\varepsilon, \quad a_2 = 2 + (\delta_1+\delta_3)\varepsilon + 4\varepsilon^2,$$
$$a_1 = -4\varepsilon(1 + \frac{\delta_1+\delta_2}{2}\varepsilon),$$
$$a_0 = (1-c^2) + \Big[(\delta_1+\delta_2) - c^2(\delta_3+\delta_4)\Big]\varepsilon + (\delta_1\delta_2 - c^2\delta_3\delta_4)\varepsilon^2,$$

кроме того $a_4 = 1$.

Критерий Рауса-Гурвица содержит две части.

Первая из них - это необходимые условия: $a_0, a_2, a_2, a_3 > 0$. В нашем случае это означает, что при малых ε должны быть выполнены неравенства

$$\begin{aligned} -4\varepsilon &> 0, \\ 1 - c^2 &> 0, \end{aligned}$$

т.е. $c \in (0,1),\ \ \varepsilon < 0$.

Если одно из двух последних неравенств не имеет места, то есть $\varepsilon > 0$ или $c > 1$, это значит, что нулевое решение неустойчиво.

Если же $c \in (0,1)$, $\varepsilon < 0$, то следует проверить достаточные условия, то есть справедливость неравенств

$$\Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2 > 0,$$
$$\Delta_2 = (a_1a_2 - a_0a_3) > 0.$$

Следовательно, все условия критерия Рауса-Гурвица будут выполнены, если

$$\Delta_3 > 0.$$

Отметим, что $\Delta_3 = \Delta_3(\varepsilon)$, но $\Delta_3(0) = c^2 > 0$.

Если же $c^2 = 0$, то ответ ещё более простой: нулевое решение асимптотически устойчиво, если $\varepsilon < 0$.

Действительно, характеристическое уравнение в этом случае может быть записано в виде

$$(\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon)(\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_2\varepsilon) = 0,$$

то есть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ находим как корни уравнений

$$\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_1\varepsilon = 0,$$
$$\lambda^2 - 2\varepsilon\lambda + 1 + \delta_2\varepsilon = 0,$$

у которых корни лежат в левой полуплоскости, если $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 \ll 1$.

Лемма 1. *Нулевое решение системы дифференциальных уравнений (0.1) асимптотически устойчиво, если $\varepsilon < 0$, $c \in (0,1)$.*

Лемма 2. *Нулевое решение системы дифференциальных уравнений (0.1) неустойчиво, если либо $\varepsilon > 0$ или при $\varepsilon < 0$ выполнено неравенство $c > 1$.*

Если же $c = 0$, то задача несодержательна, но с формальной точки зрения при $\varepsilon < 0$ также получим асимптотическую устойчивость нулевого решения.

Если $\varepsilon = 0$, то характеристический полином (1.5) имеет вид

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + (1 - c^2) = 0.$$

Если $1 - c^2 > 0$, то есть в нашем случае $c \in (0,1)$, то получим критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейного уравнения (0.1).

Если $c = 1$, то $\lambda^4 + 2\lambda^2 = 0$ и $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$ также критический случай.
Итак, далее рассмотрим систему дифференциальных уравнений (0.1), если $\varepsilon > 0$, то есть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, а $c \in (0,1)$.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях реализации резонанса 1:3.
Как уже отмечалось при $\varepsilon = 0$ и $c \in (0,1)$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1) при $\varepsilon = 0$ и $c \in (0,1)$. Итак, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + cx_2 = 0,\\ \ddot{x}_2 + cx_1 + x_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Систему (1.6) можно записать в векторной форме

$$\ddot{x} + A(c)x = 0, \tag{1.7}$$

где

$$A(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица имеет собственные числа λ_1, λ_2. При этом

$$\lambda_1 = 1 + c,$$
$$\lambda_2 = 1 - c.$$

Напомним, что при $\varepsilon = 0$ характеристичекое уравнение (1.4) имеет корни

$$\pm i\sigma_1 \; (\sigma_1 = \sqrt{1+c}),$$
$$\pm i\sigma_2 \; (\sigma_2 = \sqrt{1-c}).$$

Добавим, что собственное число $\lambda_1 = 1 + c$ матрицы A отвечает собственному вектору $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а $\lambda_2 = 1 - c$ собственному вектору $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что при $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = 9$

$$\lambda_1 = 1 + c, \quad \lambda_2 = 1 - c,$$

то есть $\sqrt{1+c} = 3\sqrt{1-c}$. Следовательно $(1+c) = 9(1-c)$ и окончательно получим, что резонанс 3:1 реализуется при $c = \dfrac{4}{5}$.

В работе предполагается изучить динамику решений системы дифференциальных уравнений (0.1), если реализуется случай близкий к резонансу 3:1, то есть анализу (0.1) при $c = \dfrac{4}{5}$.

В конце данного раздела отметим, что $A^* = A$. Естественно матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 = \dfrac{9}{5}, \;\; \lambda_2 = \dfrac{1}{5}$. Им соответствуют элементы h, H.

В нашем случае $A^*(c) = A(c)$, то есть матрица симметричная. Поэтому она также имеет собственные векторы h, H, отвечающие $\lambda_1, \; \lambda_2$ соответственно. Подчеркнём, что

$$h = a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; H = b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2 Нормальная форма системы нелинейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + (1+\delta_1\varepsilon)x_1 + c(1+\delta_3\varepsilon)x_2 = -\dot{x}_1 x_1^2 + a x_1^3, \\ \ddot{x}_2 - 2\varepsilon\dot{x}_2 + c(1+\delta_4\varepsilon)x_1 + (1+\delta_2\varepsilon)x_2 = -\dot{x}_2 x_2^2 + a x_2^3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $0 < \varepsilon << 1$.Точкой обозначена производная по t, штрихом производная по s. Пусть $u = u(t,s)$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = u^{'}.$$

Решения системы дифференциальных уравнений (2.1) будем искать в следующем виде

$$\begin{aligned} x_1(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(t,s) + \varepsilon u_2(t,s) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,s) + \dots, \\ x_2(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}v_1(t,s) + \varepsilon v_2(t,s) + \varepsilon^{3/2}v_3(t,s) + \dots, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где многоточием обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по сравнению $\varepsilon^{3/2}$, т.е. слагаемые, имеющие порядок (ε^2) или $(\varepsilon^{5/2})$. Наконец, $s = \varepsilon t$ - медленное время. Справедливы следующие равенства

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_j}{\partial s}, \qquad \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial v_j}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_j}{\partial s}, \qquad j = 1,2,3.$$

Аналогичную формулу можно указать для второй производной

$$\frac{d^2u_j}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u_j^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_j}{\partial^2 s}, \qquad \frac{d^2v_j}{dt^2} = \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial v_j^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_j}{\partial^2 s}, \quad j = 1,2,3.$$

Отметим, что справедливы формулы

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} = \varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u_1^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u_2^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 s}\right) + \\ + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u_3^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial^2 s}\right), \end{aligned}$$

$$-2\varepsilon\frac{dx_1}{dt} = -2\varepsilon\left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)\right),$$

$$(1+\delta_1\varepsilon)x_1 = (1+\delta_1\varepsilon)(\left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)\right)),$$

$$c(1+\delta_3\varepsilon)x_2 = c(1+\delta_3\varepsilon)(\left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_3}{\partial s}\right)\right)),$$

$$x_1^3 = \left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)\right)^3,$$

и, кроме того $\dot{x}_1 x_1^2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{du}(x_1^3)$.

Аналогичные формулы справедливы для x_2

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial v_1^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial^2 s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial v_2^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_2}{\partial^2 s}\right) + \\ + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial v_3^2}{\partial t\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v_3}{\partial^2 s}\right),$$

$$-2\varepsilon\frac{dx_2}{dt} = -2\varepsilon\left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_3}{\partial s}\right)\right),$$

$$(1+\delta_4\varepsilon)x_1 = (1+\delta_4\varepsilon)(\left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_3}{\partial s}\right)\right)),$$

$$(1+\delta_2\varepsilon)x_2 = (1+\delta_2\varepsilon)(\left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_3}{\partial s}\right)\right)),$$

$$x_2^3 = \left(\varepsilon^{1/2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial s}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_2}{\partial s}\right) + \varepsilon^{3/2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial v_3}{\partial s}\right)\right)^3,$$

и, кроме того $\dot{x_2}x_2^2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dv}(x_2^3)$.

Отметим, что в правых частях равенств (2.2) присутствуют функции $u_1(t,s)$, $v_1(t,s)$, которые выберем следующим образом

$$u_1(t,s) = z_1(s)e^{3i\sigma t} + \overline{z_1}(s)e^{-3i\sigma t} + z_2(s)e^{i\sigma t} + \overline{z_2}(s)e^{-i\sigma t},$$

$$v_1(t,s) = z_1(s)e^{3i\sigma t} + \overline{z_1}(s)e^{-3i\sigma t} - z_2(s)e^{i\sigma t} - \overline{z_2}(s)e^{-i\sigma t},$$

или в векторном виде

$$\begin{pmatrix} u_1(t,s) \\ v_1(t,s) \end{pmatrix} = z_1(s)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3i\sigma t} + \overline{z_1}(s)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3i\sigma t} + z_2(s)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{i\sigma t} + \overline{z_2}(s)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-i\sigma t}.$$

Функции $u_2(t,s)$, $v_2(t,s)$, $u_3(t,s)$, $v_3(t,s)$ зависят от своих переменных гладко, по переменной t имеют период $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ и кроме того справедливы равенства

$$\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\sigma}(u_k+v_k)e^{\pm 3i\sigma t}dt = 0,$$

$$\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\sigma}(u_k-v_k)e^{\pm i\sigma t}dt = 0, \qquad k=2,3.$$

Приравнивая коэффициенты при ε, получим систему

$$\begin{gathered} \ddot{u}_2 + u_2 + cv_2 = 0, \\ \ddot{v}_2 + cu_2 + v_2 = 0. \end{gathered}$$

Откуда замечаем, что с необходимостью $u_2 = v_2 = 0$.

Приравнивая слагаемые при $\varepsilon^{3/2}$, получим уже неоднородную систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{aligned} \ddot{u}_3 + u_3 + cv_3 &= \Phi_1(t,s), \\ \ddot{v}_3 + cv_3 + u_3 &= \Phi_2(t,s), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\Phi_1 = -2(i\sigma_1 z_1' q_1 - i\sigma_1 \overline{z_1}' \overline{q_1}) - 2(i\sigma_2 z_2' q_2 - i\sigma_2 \overline{z_2}' \overline{q_2}) + 2(i\sigma_1 z_1 q_1 - i\sigma_1 \overline{z_1 q_1}) + 2(i\sigma_2 z_2 q_2 - i\sigma_2 \overline{z_2 q_2}) - \\ - \delta_1[(z_1q_1 + \overline{z_1}q_1) + (z_2q_2 + \overline{z_2}q_2)] - c\delta_3[(z_1q_1 + \overline{z_1 q_1}) - (z_2q_2 + \overline{z_2}q_2)] + F_1,$$

$$\Phi_2 = -2(i\sigma_1 z_1' q_1 - i\sigma_1 \overline{z_1}' \overline{q_1}) + 2(i\sigma_2 z_2' q_2 - i\sigma_2 \overline{z_2}' \overline{q_2}) + 2(i\sigma_1 z_1 q_1 - i\sigma_1 \overline{z_1 q_1}) - 2(i\sigma_2 z_2 q_2 - i\sigma_2 \overline{z_2 q_2}) - \\ - c\delta_4[(z_1q_1 + \overline{z_1}q_1) + (z_2q_2 + \overline{z_2}q_2)] - \delta_2[(z_1q_1 + \overline{z_1}q_1) - (z_2q_2 + \overline{z_2}q_2)] + F_2,$$

$$F_1 = -\frac{1}{3}\frac{d}{dt}[(z_1q_1 + \overline{z_1}q_2) + (z_2q_1 + \overline{z_2}q_2)]^3 + a[(z_1q_1 + \overline{z_1}q_2) + (z_2q_1 + \overline{z_2}q_2)]^3,$$

$$F_2 = -\frac{1}{3}\frac{d}{dt}[(z_1q_1 + \overline{z_1}q_2) - (z_2q_1 + \overline{z_2}q_2)]^3 + a[(z_1q_1 + \overline{z_1}q_2) - (z_2q_1 + \overline{z_2}q_2)]^3,$$

где $q_1 = e^{i\sigma_1 t}$, $q_2 = e^{i\sigma_2 t}$, $\sigma_1 = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $\sigma_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ясно, что $q_2^3 = q_1$. Поэтому дальнейшие обозначения могут быть упрощены. Вместо q_2 будем считать q, а q_1 заменим на q^3.

Замечание 1. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида*

$$\ddot{V} + AV = f(t),$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ *имеет период* $\dfrac{2\pi}{3\sigma}$. *Тогда уравнение для* $V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ *разрешимо в классе* $\dfrac{2\pi}{3\sigma}$ *периодических функций тогда и только тогда, если справедливы равенства*

$$\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\sigma} (f_1 + f_2) e^{\pm 3i\sigma t} dt = 0,$$

$$\frac{\sigma}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\sigma} (f_1 - f_2) e^{\pm i\sigma t} dt = 0.$$

Последние два равенства называются условиями разрешимости.

Если $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} e^{3i\sigma t}$ *или* $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} e^{-3i\sigma t}$, *где* $f_1,\ f_2 \in R$, *то условие разрешимости приобретает вид*

$$f_1 + f_2 = 0.$$

Если же $f(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} e^{i\sigma t}$ *или* $f(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} e^{-i\sigma t}$, *то условие разрешимости выглядит следующим образом*

$$g_1 - g_2 = 0.$$

Используем условия разрешимости для анализа системы дифференциальных уравнений (2.3) (смотри замечание 1). Из этих условий вытекает, что $z_1(s)$, $z_2(s)$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} {z_1}'(s) &= z_1 - \frac{d_1}{4i\sigma_1}z_1 - \frac{1}{4}\Big[2z_1|z_1|^2 + 4z_1|z_2|^2\Big] + \frac{a}{4i\sigma_1}\Big[6z_1|z_1|^2 + 12z_1|z_2|^2\Big], \\ {z_2}'(s) &= z_2 + \frac{d_2}{4i\sigma_2}z_2 - \frac{1}{4}\Big[4z_2|z_1|^2 + 2z_2|z_2|^2\Big] + \frac{a}{4i\sigma_2}\Big[12z_2|z_1|^2 + 6z_1|z_1|^2\Big], \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $d_1 = (\delta_1 + \delta_2) + c(\delta_3 + \delta_4), \quad d_2 = c(\delta_3 + \delta_4) - \delta_1 - \delta_2.$

Система (2.4) называется нормальной формой.

3 Анализ нормальной формы

В этом разделе рассмотрим систему дифференциальных уравнений, нормальная форма которой получена во втором разделе

$$
\begin{aligned}
{z_1}'(s) &= z_1 - \frac{d_1}{4i\sigma_1} z_1 - \frac{1}{4}\Big[2z_1|z_1|^2 + 4z_1|z_2|^2\Big] + \frac{a}{4i\sigma_1}\Big[6z_1|z_1|^2 + 12z_1|z_2|^2\Big],\\
{z_2}'(s) &= z_2 + \frac{d_2}{4i\sigma_2} z_2 - \frac{1}{4}\Big[4z_2|z_1|^2 + 2z_2|z_2|^2\Big] + \frac{a}{4i\sigma_2}\Big[12z_2|z_1|^2 + 6z_1|z_1|^2\Big].
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Перепишем систему дифференциальных уравнений (3.1) в тригонометрической форме. Для этого положим

$$
\begin{cases} \rho_j = \rho_j(s), \\ \varphi_j = \varphi_j(s), \\ j = 1, 2, \end{cases} \qquad
\begin{cases} z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, \end{cases} \qquad
\begin{cases} z_1^{'} = \rho_1^{'} e^{i\varphi_1} + i\rho_1\varphi_1^{'} e^{i\varphi_1}, \\ z_2^{'} = \rho_2^{'} e^{i\varphi_2} + i\rho_2\varphi_2^{'} e^{i\varphi_2}, \end{cases}
$$

где $\rho_j, \varphi_j \in R; \rho_j > 0$. Подставим последние равенства в систему (3.1).
После преобразований и сокращения на $e^{i\varphi_1}$ и $e^{i\varphi_2}$ первого и второго равенства, соответственно, уравнения системы (3.1) перепишутся в следующем виде

$$
\begin{aligned}
\rho_1^{'} + i\rho_1\varphi_1^{'} &= (1 + i\frac{d_1}{12\sigma})\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1\rho_2^2 - i(\frac{a}{2\sigma}\rho_1^3 + \frac{a}{\sigma}\rho_1\rho_2^2),\\
\rho_2^{'} + i\rho_2\varphi_2^{'} &= (1 - i\frac{d_2}{4\sigma})\rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3 - \rho_2\rho_1^2 - i(\frac{3a}{\sigma}\rho_2\rho_1^2 + \frac{3a}{\sigma}\rho_2^3).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

В равенствах (3.2) выделим действительные и мнимые части. В результате получим систему из четырёх действительных уравнений

$$
\begin{aligned}
\rho_1^{'} &= \rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1\rho_2^2,\\
\varphi_1^{'} &= \frac{d_1}{12\sigma} - \frac{a\rho_1^2}{2\sigma} - \frac{a\rho_2^2}{\sigma},\\
\rho_2^{'} &= \rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3 - \rho_2\rho_1^2,\\
\varphi_2^{'} &= -\frac{d_2}{4\sigma} - \frac{3a\rho_1^2}{\sigma} - \frac{3a\rho_2^2}{2\sigma}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Систему дифференциальных уравнений (3.3) перепишем в ином порядке. Сначала систему для амплитудных переменных $\rho_1,\ \rho_2$:

$$
\begin{aligned}
\rho_1^{'} &= \rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1\rho_2^2,\\
\rho_2^{'} &= \rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3 - \rho_2\rho_1^2,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

а также систему для $\varphi_1,\ \varphi_2$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1^{'} &= \frac{d_1}{12\sigma} - \frac{a\rho_1^2}{2\sigma} - \frac{a\rho_2^2}{\sigma},\\
\varphi_2^{'} &= -\frac{d_2}{4\sigma} - \frac{3a\rho_1^2}{\sigma} - \frac{3a\rho_2^2}{2\sigma}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Отметим, что в нашем случае справедливы равенства $\sigma_1 = 3\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$, где $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. В окончательной редакции эти обозначения будут использованы в численном виде.

Прежде всего исследуем систему дифференциальных уравнений (3.4) для амплитудных переменных.

Основой вопрос, который представляет интерес - это вопрос о состояниях равновесия системы (3.4). Система дифференциальных уравнений (3.4) может иметь ненулевые состояния равновесия трёх типов

$$C_1 : \rho_1 \neq 0, \quad \rho_2 = 0,$$

$$C_2 : \rho_1 = 0, \quad \rho_2 \neq 0,$$

$$C_3 : \rho_1, \rho_2 \neq 0.$$

Перейдём к анализу системы (3.4) и найдём её состояния равновесия.

Первый случай $\rho_2 = 0$, $\rho_1 \neq 0$.
При $\rho_2 = 0$ получим, что справедливо равенство

$$\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 = 0, \qquad \rho_1^2 = 2.$$

Итак, C_1 имеет следующие координаты

$$C_1 : \rho_1 = \sqrt{2}, \qquad \rho_2 = 0.$$

Исследуем его устойчивость. Нам потребуется матрица Якоби, которая задаётся следующим образом:

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \rho_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \rho_2} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \rho_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \rho_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{3}{2}\rho_1^2 - \rho_2^2 & -2\rho_1\rho_2 \\ -2\rho_1\rho_2 & 1 - \dfrac{3}{2}\rho_2^2 - \rho_1^2 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

если $f_1 = \rho_1 - \dfrac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1\rho_2^2$, $f_2 = \rho_2 - \dfrac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1^2\rho_2$.

Подставим в найденную матрицу координаты состояния равновесия C_1

$$J_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим, что

$$\lambda_1 = -1 < 0, \qquad \lambda_2 = -2 < 0.$$

Итак, справедливо утверждение

Теорема 1. *Состояние равновесия C_1 системы (3.4) асимптотически устойчиво.*

Второй случай $\rho_1 = 0$, $\rho_2 \neq 0$.
При $\rho_1 = 0$ справедливо следующее равенство

$$\rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3 = 0, \qquad \rho_2^2 = 2.$$

Итак, координаты состояния равновесия

$$C_2 : \rho_1 = 0, \qquad \rho_2 = \sqrt{2}.$$

Исследуем его устойчивость.

Подставим в матрицу (3.6) координаты состояния равновесия C_2

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим, что

$$\lambda_1 = -1 < 0, \qquad \lambda_2 = -2 < 0.$$

Тем самым, справедливо утверждение

Теорема 2. *Состояние равновесия C_2 системы (3.4) асимптотически устойчиво.*

Найдём иные состояния равновесия.
Для нахождения иных состояний равновесий следует считать, что $\rho_2 \neq 0$, $\rho_1 \neq 0$. Тогда рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1^3 - \rho_1\rho_2^2 = 0, \\ \\ \rho_2 - \frac{1}{2}\rho_2^3 - \rho_2\rho_1^2 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Из первого уравнения выражаем

$$\rho_2 \Longrightarrow \rho_2^2 = 1 - \frac{1}{2}\rho_1^2.$$

Подставляем найденное значение ρ_2 во второе уравнение системы, преобразуем и получим, что

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \;\; \rho_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Тем самым получили состояние равновесия

$$C_3 : \rho_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \rho_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Исследуем его устойчивость. Для этого подставим координаты C_3 в матрицу (3.6)

$$J_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения собственных значений состояния равновесия C_3 рассмотрим определитель:

$$det|C_3 - \lambda E| = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} - \lambda & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}.$$

После раскрытия определителя следует, что собственные значения определяются как корни соответствующего характеристического уравнения

$$P_3(\lambda) = (-\frac{2}{3} - \lambda)(-\frac{2}{3} - \lambda) - \frac{16}{9} = 0.$$

По критерию Рауса-Гурвица необходимо и достаточно выполнение неравенства:

$$P > 0, \ \ Q > 0,$$

если характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0.$$

В нашем случае для определения λ_1 и λ_2 получим, что

$$\lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda - \frac{4}{3} = 0,$$

где $P > 0, Q < 0$.
Следовательно, справедлива теорема 3.

Теорема 3. *Состояние равновесия C_3 системы (3.4) неустойчиво.*

4 Основные результаты

Пусть найдено состояние равновесия C_1, то есть $\rho_1 = \sqrt{2}$, $\rho_2 = 0$. Тогда можно найти $\varphi_1(s)$. Для этого следует найти $\varphi_1(s)$ из первого уравнения (3.5)

$$\varphi_1 = \omega_1 s + \varphi_{10},$$

где $\omega_1 = \dfrac{d_1}{12\sigma} - \dfrac{a}{2\sigma}$, при этом $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Отсюда получаем, что

$$z_1(s) = \sqrt{2}e^{i\omega_1 s}, \quad z_2(s) \equiv 0.$$

Итак, последние формулы задали периодическое решение E_1 нормальной формы (2.4). Периодическое решение E_1 устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво).

Асимптотика построения применима при использовании второго состояния равновесия C_2. Ему соответствует периодическое решение нормальной формы (2.4)

$$E_2: \ z_1 \equiv 0, \ \ z_2 = \sqrt{2}e^{i\omega_2 s + i\varphi_{20}},$$

где $\omega_2 = -\dfrac{d_2}{4\sigma} - \dfrac{3a}{\sigma}$, $\varphi_{20} \in R$. Это периодическое решение устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво).

Наконец, состоянию равновесия C_3 соответствует двумерный инвариантный тор T_2, который сформирован решением вида

$$z_1(s) = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\Theta_1 s + i\varphi_{10}}, \quad z_2(s) = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\Theta_2 s + i\varphi_{20}},$$

где $\varphi_{10}, \ \varphi_{20}$ - произвольные действительные постоянные,

$$\Theta_1 = \frac{d_1}{12\sigma} - \frac{a}{3\sigma} - \frac{2a}{3\sigma},$$

$$\Theta_2 = -\frac{d_2}{4\sigma} - \frac{2a}{\sigma} - \frac{a}{\sigma}.$$

В ситуации общего положения частоты $\Theta_1, \ \Theta_2$ несоизмеримы (их отношение иррациональное число). Тор T_2 - седловой.

Из результатов работы [2,6] вытекает справедливость утверждения.

Теорема 1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ и $c = \dfrac{4}{5}$ у системы дифференциальных уравнений (0.1) есть устойчивый периодический цикл $E_1(\varepsilon)$, соответствующий E_1. Для решений формирующих этот цикл справедлива асимптотическая формула*

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\Big[\sqrt{2}e^{i\sigma_1(\varepsilon)t + i\varphi_{10}} + \sqrt{2}e^{-i\sigma_1(\varepsilon)t + i\varphi_{10}}\Big] + O(\varepsilon),$$

$$x_2(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon),$$

где $\sigma_1(\varepsilon) = \dfrac{3}{\sqrt{5}} + \omega_1\varepsilon, \ \varphi_{10} \in R$.

Циклу $E_2(\varepsilon)$ соответствует предельный цикл E_2. Этот цикл устойчив и для него справедлива асимптотическая формула

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\Big[\sqrt{2}e^{i\sigma_2(\varepsilon)t + i\varphi_{20}} + \sqrt{2}e^{-i\sigma_2(\varepsilon)t - i\varphi_{20}}\Big] + O(\varepsilon),$$

$$x_2(t,\varepsilon) = -x_1(t,\varepsilon),$$

где $\sigma_2(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \omega_2\varepsilon,\ \varphi_{20} \in R.$

Наконец, тору T_2 *соответствует двумерный тор* $T_2(\varepsilon)$. *Этот тор седловой и для решений его формирующих справедлива аимптотическая формула*

$$x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\Big[\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(e^{i\sigma_3(\varepsilon)t+i\varphi_{30}} + e^{-i\sigma_3(\varepsilon)t-i\varphi_{30}}\Big)+\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(e^{i\sigma_4(\varepsilon)t+i\varphi_{40}} + e^{-i\sigma_4(\varepsilon)t-i\varphi_{40}}\Big)\Big]+O(\varepsilon),$$

$$x_2(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}\Big[\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(e^{i\sigma_3(\varepsilon)t+i\varphi_{30}} + e^{-i\sigma_3(\varepsilon)t-i\varphi_{30}}\Big)-\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(e^{i\sigma_4(\varepsilon)t+i\varphi_{40}} + e^{-i\sigma_4(\varepsilon)t-i\varphi_{40}}\Big)\Big]+O(\varepsilon),$$

где $\sigma_3(\varepsilon) = \dfrac{3}{\sqrt{5}} + \Theta_1\varepsilon,\ \ \sigma_4(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \Theta_2\varepsilon,\ \ \varphi_{30}, \varphi_{40} \in R.$

Заключение

В работе исследована задача о синхронизации колебаний, постановку такой задачи, как уже отмечалось, можно найти в монографии О. Блакьер, а также в других работах, посвященных моделированию других радиофизических процессов.
Показано, что даже простейшая нелинейная связь автоколебательной системы приводит к достаточно сложной их динамике. Например, возможен вариант мультистабильности, т.е. когда могут быть реализованы несколько вариантов автоколебательных режимов. С математической точки зрения, автоколебательный режим описывается устойчивым периодическим решением соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Была рассмотрена задача, когда реализуется случай близкий к резонансу 1:3. В рассмотренной задаче оказалось, что наличие резонанса не влияет на динамику, которая практически осталась "нерезонансной".

Список литературы

[1] *Блакъер О.* Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400с.

[2] *Куликов Д. А.* Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабосвязанных осцилляторов. Прикладная математика и механика 2010. Т.74 Вып. 4. С. 543-559.

[3] *Глызин С.Д., Колесов А. Н.* Локальные методы анализа динамических систем. Ярославль: ЯрГу, 2006. С. 92.

[4] *Кузнецов А. П., Паксютов В. И.* О динамике двух осцилляторов Ван-дер-Поля – Дуффинга с диссипативной связью. Изв. вузов прикладная нелинейная динамика. 2003 Т.11. №6. С. 48-64.

[5] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Удм.ГУ. 2000. С. 368.

[6] *Куликов Д. А.* Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов. Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2005. Т. 5. С. 120-132.