МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО, ИНФОРМАЦИОННОГО И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДОПУСКАЮ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой алгебры и математического анализа

____
(подпись)

_________________ 20 ____ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
Методика организации онлайн-подготовки выпускников средней школы к ЕГЭ по математике

Выполнил студент группы 3.031.1.16

Коробова Мария Сергеевна

____
(подпись, дата)

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль: Математическое образование

Форма обучения: заочная

Руководитель: кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры и математического анализа, Марина Владимировна Таранова

____
(подпись, дата)

Новосибирск 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Предмет «математика» является важной составляющей школьного образования. Особенностью реализации обучения школьной математике является необходимость индивидуализации учебного процесса, с учётом личных запросов, потребностей, способностей к изучению предмета. Одним из способов индивидуализации является использование электронных ресурсов.

Распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р, принятым в соответствии с Указом Президента РФ от 07.05.2012 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», утверждена Концепция развития математического образования в Российской Федерации, определяющая базовые принципы, цели, задачи и основные направления. Согласно Концепции, математическое образование должно, с одной стороны, «предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе», с другой – «обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности, включая преподавание математики, математические исследования, работу в сфере информационных технологий и др.». Кроме того, «в основном общем и среднем общем образовании необходимо предусмотреть подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования» [1]. В число мер по реализации Концепции, принятых Приказом Министерства Образования и Науки РФ от 03.04.2014 г. № 265, входит «совершенствование системы государственной итоговой аттестации, завершающей освоение основных образовательных программ основного общего и среднего образования по математике, разработка соответствующих контрольных измерительных материалов, обеспечивающих введение различных направлений изучения математики», то есть материалов, предназначенных для различных целевых групп выпускников.

Согласно приказу «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) основного общего образования», «В основе Стандарта лежит системно-деятельностный подход, который обеспечивает … построение образовательной деятельности с учетом индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей обучающихся». Данный Стандарт фиксирует требования к результатам освоения образовательной программы по математике, согласно которым: «В результате изучения предметной области «Математика и информатика» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление, получают представление о математических моделях; овладевают математическими рассуждениями; учатся применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты; овладевают умениями решения учебных задач; развивают математическую интуицию; получают представление об основных информационных процессах в реальных ситуациях» [2].

Сложившаяся практика изучения математики в школах учитывает необходимость преподавания предмета на разном уровне для разных категорий учеников. Ввиду затруднительности составления индивидуальной траектории обучения для каждого учащегося, традиционная практика заключается в разбиении школьной математики на «базовый» и «профильный» уровни. Например, в Федеральный перечень учебников внесен учебник по алгебре для 7 класса авторов Макарычева Ю. Н., Миндюка Н. Г., Нешкова К. И. и других в двух редакциях: авторской (порядковый номер учебника в перечне 1.1.2.4.2.5.1), предназначенной для углублённого обучения, и в редакции Теляковского С. А. (порядковый номер учебника в перечне 1.1.2.4.2.4.1), предназначенной для базового обучения [25]. Также уровень обучения учитывается при проведении государственной итоговой аттестации выпускников школ. Согласно Порядку проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования, «ЕГЭ по математике проводится по двум уровням: ЕГЭ, результаты которого признаются в качестве результатов ГИА общеобразовательными организациями и профессиональными организациями (далее – ЕГЭ по математике базового уровня); ЕГЭ, результаты которого признаются общеобразовательными организациями и профессиональными образовательными организациями, а также в качестве результатов вступительных испытаний по математике при приеме на обучение по образовательным программам высшего образования (далее – ЕГЭ по математике профильного уровня)» [4].

Способом индивидуализации учебной программы может стать использование информационно-коммуникационных технологий. Указом Президента Российской Федерации от 9 мая 2017 г. N 203 утверждена «Стратегия развития информационного общества в Российской Федерации на 2017-2030 годы», которая определяет цели, задачи и меры по реализации внутренней и внешней политики РФ в сфере применения информационных и коммуникационных технологий. Одним из принципов Стратегии является «обеспечение свободы выбора средств получения знаний при работе с информацией». Согласно тому же документу, «Электронные средства массовой информации, информационные системы, социальные сети, доступ к которым осуществляется с использованием сети «Интернет», стали частью повседневной жизни россиян. Пользователями российского сегмента сети «Интернет» в 2016 году стали более 80 млн. человек» [5]. Причем по данным 2018 года, которые опубликовал Росстат, 79,3% населения в возрасте 15-74 лет являются «активными Интернет-пользователями», то есть используют сеть Интернет не реже одного раза в неделю (среди молодежи от 15 до 24 лет этот показатель равен 96,7%), а онлайн-самообразованием занимаются 39,4% населения (среди молодежи от 15 до 24 лет этот показатель равен 94,2%) [17].

В данное время существуют разные подходы к цифровизации разных аспектов образования. Например, один из них – проект «Программа «Цифровая платформа персонализированного образования для школы»» [24]. Согласно методическому пособию «Персонализированная модель образования», «В России … благодаря развитию информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) школа перестала быть единственным источником знаний о мире, утратила монополию на образование» [23]. Авторы данной модели образования поддерживают идею, что классно-урочная система не обеспечивает необходимого качества образования, так как не учитывает индивидуальных запросов, потребностей, интересов и способностей учащихся. В связи с этим авторы Персонализированной модели образования считают необходимым повсеместное использование ИКТ в ежедневной практике учащихся как на уроках, так и во время самостоятельной работы.

В то время как использование ресурсов «Цифровой платформы персонализированного образования для школы» требует полной перестройки учебного процесса в школе и соответственной переподготовки учителей, другие цифровые ресурсы позволяют организовать только самостоятельную работу учащихся вне школы. Учащиеся повторяют пройденные темы и выполняют домашние задания, используя разные электронные платформы. Например, существует цифровая платформа для обучения основным школьным предметам «Яндекс. Учебник». Согласно документу «Заключение по научной и педагогической экспертизе интернет-сервиса «Яндекс. Учебник» по предмету «Математика»», заверенному сотрудниками Казанского Федерального Университета, «…Введение нового материала производит учитель, используя интернет-сервис как один из инструментов для тренинга, повторения и обобщения изученного материала наряду с учебниками, дидактическими материалами, методическими разработками и др. ... Интернет-сервис предлагает задания с постепенным нарастанием уровня сложности в пределах выбранной темы, что позволяет учителю при отборе учебного содержания ориентироваться на уровень освоения учебной программы разными учениками, осуществляя в обучении дифференцированный подход вплоть до индивидуализации процесса обучения». На сайте утверждается, что пользователями сервиса являются «более 100 000 учителей и 1,9 миллиона учеников из 20 000 школ в 48 регионах России» [16].

Таким образом, использование цифровых ресурсов стало повсеместной практикой. Цифровые ресурсы могут повысить эффективность обучения за счет индивидуализации учебной программы. В данной работе описывается один из вариантов реализации учебной программы посредством онлайн-курса и исследуется эффективность обучения на конкретной электронной платформе.

Объект исследования: процесс организации подготовки выпускников к единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике на электронной платформе.

Предмет исследования: условия использования цифровых инструментов для повышения эффективности подготовки выпускников к ЕГЭ по математике.

Цель работы: разработка методических рекомендаций повышения эффективности процесса подготовки выпускников к ЕГЭ по математике посредством онлайн-курса.

Задачи работы:

1. Актуализация сущности понятия онлайн-курса и раскрытие ключевых понятий по теме исследования;
2. Систематизация и описание авторских наработок по методике организации содержания онлайн-курсов для выпускников к ЕГЭ по математике и их корректировка;
3. Проектирование дидактических материалов онлайн-курса;
4. Публикация онлайн-курса;
5. Исследование данных, полученных во время работы онлайн-курса.

Структура работы представлена введением, в котором обосновывается актуальность исследования, ставятся цель, объект, предмет и задачи исследования; двух глав; заключения; библиографического списка; трёх приложений. Работа содержит 83 страницы, 15 рисунков, 13 таблиц.

ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

1.1. Проблемы реализации онлайн-обучения в современной школе

Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ (ред. от 30.04.2021) «Об образовании в Российской Федерации» в статье 16 определяет «электронное обучение» следующим образом: «Под электронным обучением понимается организация образовательной деятельности с применением содержащейся в базах данных и используемой при реализации образовательных программ информации и обеспечивающих ее обработку информационных технологий, технических средств, а также информационно-телекоммуникационных сетей, обеспечивающих передачу по линиям связи указанной информации, взаимодействие обучающихся и педагогических работников. Под дистанционными образовательными технологиями понимаются образовательные технологии, реализуемые в основном с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном (на расстоянии) взаимодействии обучающихся и педагогических работников» [3].

В тексте закона используются общие термины: электронное обучение, дистанционные образовательные технологии. Для уточнения методологии исследования данной работы отдельно определим некоторые виды обучения.

Очное обучение – обучение, осуществляемое при непосредственном личном контакте учителя и обучающегося в специально созданных для этого условиях.

Дистанционное обучение – обучение, осуществляемое без непосредственного личного контакта учителя и обучающегося, на расстоянии. Возможно, как с использованием сети Интернет, так и без такового.

Онлайн-обучение – обучение, осуществляемое исключительно посредством сети Интернет, не предполагающее непосредственного личного контакта учителя и обучающегося. Онлайн-обучение является частным случаем дистанционного обучения.

Смешанное обучение – обучение, предполагающее сочетание очного и дистанционного форматов; часть учебной программы осваивается дистанционно, часть – при непосредственном личном контакте учителя и обучающегося.

Таким образом, онлайн-обучение изначально предполагает использование цифровых сред, не предполагает личного контакта, не предполагает создание классической образовательной среды (например, учебного кабинета), что необходимо учитывать на всех этапах реализации обучения.

Зачастую дистанционное обучение сводится к попытке оцифровки традиционного очного обучения, без переосмысления процесса. Подобная практика была широко распространена во время эпидемии 2020 года: большинство учебных заведений экстренно перешло на дистанционное обучение. В рамках проводимого исследования был проведён опрос, в котором учителям было предложено поделиться своим мнением о дистанционном обучении. В анкетировании приняло участие 177 респондентов. Полный текст анкеты представлен в Приложении Б. Респонденты отмечали следующие проблемы дистанционного обучения:

1. Недостаток обратной связи: не вижу, что ученики делают, что они пишут в тетради, отвлекаются ли, понимают ли?

Данная проблема вызвана попыткой использовать в дистанционном обучении методы, привычные для очного обучения, а именно попыткой реализовать очное занятие посредством видеосвязи.

2. Технические проблемы с оборудованием, доступом к сети Интернет, доступностью сайтов.

Данную проблему реже отмечают жители больших городов, чаще – жители регионов.

3. Списывание.

Учителя хотят провести проверочную работу в формате, характерном для очного обучения, в условиях дистанционного обучения, и отмечают трудность контроля списывания.

4. Нет личного контакта: нет «эмпатии», «обмена энергией», «не вижу глаз», «нельзя вместе попить чай».

Для некоторых респондентов личный контакт с учащимися является важным фактором личной мотивации, «любви к профессии».

5. Недостаток самодисциплины учащихся.

Учителя отмечают, что условия дистанционного обучения способствуют тому, что обучающиеся отвлекаются от занятий, а без непосредственного контакта затруднительно проконтролировать действия учащегося.

6. Много времени тратится на подготовку и организацию.

Респонденты, отметившие такой недостаток, также сообщили, что используют инструменты, характерные для онлайн-обучения, а не только оцифровывают опыт очного обучения. Например, они готовят презентации, находят образовательные игры, задают домашние задания посредством специальных платформ, индивидуализируют учебную программу.

7. Вредно для зрения.

Учителя считают, что продолжительная работа за компьютером плохо влияет на зрение, опираясь в этом мнении на субъективные ощущения.

8. Трудная проверка домашних заданий.

Для очного обучения характерно выполнение домашних заданий от руки на бумаге. При переходе к дистанционному обучению некоторые учителя воспроизводят эту практику, предлагая учащимся присылать фотографии выполненных от руки работ. Проверка фотографии менее удобна, чем проверка бумажной тетради.

9. Важная роль родителей.

Респонденты отмечают, что в условиях дистанционного обучения теряют возможность контроля учащегося, и ожидают, что обязанности по контролю дисциплины учащихся возьмут на себя их родители.

Респонденты смогли сформулировать и преимущества дистанционного обучения: не тратится время на дорогу; работа в комфортном месте; удобный график; возможность записывать занятия; возможность использовать разные интерактивные форматы; улучшение посещаемости; безопасность в условиях эпидемии; улучшение дисциплины на уроке; открытость для родителей.

1.2. Специфические требования к реализации онлайн-обучения

Анализируя недостатки дистанционного образования, озвученные респондентами, и не теряя преимуществ, можно сформулировать специфические требования к онлайн-обучению, которое изначально проектируется как обучение посредством сети Интернет, и не является оцифровкой очного обучения.

Первым требованием является адекватный выбор способа организации обучения. Многие озвучиваемые недостатки дистанционного обучения могут быть нивелированы адекватным выбором формы взаимодействия. В таблице 1 приведены варианты альтернативных средств организации обучения в зависимости от цели, которую ставит учитель по организации обучения. В Приложении А приведен тезаурус.

Таблица 1 – Примеры способов организации обучения

Цель по организации обучения	**Способы организации в очном обучении**	**Способы организации в онлайн-обучении**
Организовать восприятие учащимися теоретического материала;	Посещение лекции, чтение учебника;	Посещение вебинара, просмотр видеозаписи, чтение статьи, прослушивание аудиоматериалов;
Организовать выполнение учащимися заданий для выработки умений;	Работа на семинаре, выполнение домашнего задания с оформлением на бумаге;	Работа на семинаре, выполнение домашнего задания с автоматической проверкой или в электронном виде;

Продолжение таблицы 1

Организовать совместную работу учащихся;	Работа в парах, группах;	Групповой звонок, чат, использование интерактивных инструментов для совместной работы;
Организовать практическую работу учащихся;	Лабораторная работа;	Работа в диалоговом тренажере, видеотренажере, симуляции, приложении VR/AR;
Организовать проверку знаний учащихся.	Самостоятельная работа с контролем преподавателя.	Самостоятельная работа с использованием прокторинга либо платформы, позволяющей собирать и анализировать данные о поведении учащегося.

Вторым требованием является проектирование обучения с возможностью измерения эффективности обучения. В некоторых ситуациях онлайн-обучение конкурирует с очным обучением, и субъективное отношение к онлайн-обучению хуже ввиду его новизны, поэтому онлайн-обучению приходится доказывать свою эффективность, а также постоянно изменяться на основе полученных данных об эффективности. В связи с этим учебная программа часто изначально продумывается так, чтобы можно было численно измерить пользу от каждого элемента обучения.

Третьим требованием является использование учебной аналитики. Достоинство цифровых инструментов заключается в упрощении работы с данными. Электронные ресурсы позволяют собирать и обрабатывать данные об активности учащихся: фиксировать «цифровой след», в который может входить информация о времени взаимодействия с учебными материалами, выбор учебных материалов из предложенных, факт выполнения заданий. Полноценное использование учебной аналитики позволяет заменить контроль учителем во время очных занятий.

Четвёртым требованием является индивидуализация обучения. Цифровые инструменты имеют большой потенциал для этого. Для индивидуализации учебной программы нужно в первую очередь исследовать целевую аудиторию учебного курса, и подбирать форматы и материалы с учётом этой аудитории, оставляя возможность каждому учащемуся влиять на свою траекторию обучения.

Соблюдение данных требований позволяет решить некоторые проблемы дистанционного обучения, сформулированные педагогами. Связь проблем и требований отражена в таблице 2.

Таблица 2 – проблемы онлайн-обучения и способы их решения

Требование к онлайн-обучению	**Какие проблемы решает соблюдение требования**
Адекватный выбор способа организации обучения;	Недостаток обратной связи, списывание, трудная проверка домашних заданий;
Измерение эффективности обучения;	Предвзятость по отношению к онлайн-обучению всех участников процесса обучения;
Использование учебной аналитики;	Недостаток обратной связи, списывание, отсутствие мониторинга действий учащегося;
Индивидуализация обучения.	Трудность реализации индивидуального подхода в условиях группового очного обучения.

1.3. Технология реализации онлайн-обучения

Онлайн-обучение можно реализовать различными способами, в рамках данной работы рассмотрим организацию обучения с помощью онлайн-курса.

Онлайн-курс – способ реализации конкретной учебной программы посредством онлайн-обучения. У онлайн-курса есть цель, программа, начало и завершение.

Для формулировки технологии реализации онлайн-обучения обратимся к тематической литературе.

Согласно учебному пособию «Методика преподавания математики в средней школе» авторов Ю. М. Колягина и др.: «Методика математики – раздел педагогики, исследующий закономерности обучения математике на определенном уровне ее развития в соответствии с целями обучения, поставленными обществом. Методика математики призвана дать ответы на три основных вопроса, связанных с обучением. 1. Зачем обучать математике? 2. Что изучать из математики? 3. Как обучать математике?» [20]. Таким образом, технология должна включать постановку целей, отбор вопросов для изучения, и выбор способов организации обучения.

В англоязычных источниках используется термин педагогический дизайн (Instructional Design) – систематизированное построение образовательного опыта с использованием педагогической теории и принципов для обеспечения высокого качества обучения. В статье «Reclaiming Instructional Design» уточняется, что «педагогика – это наука, а педагогический дизайн – это технология, основанная на этой науке» [30]. Различные модели педагогического дизайна, как правило, включают в себя этапы анализа целевой аудитории, постановки целей обучения, выбора способов организации обучения, а также исследования эффективности обучения.

Технология реализации онлайн-курса включает следующие шаги:

1. Анализ целевой аудитории.

Согласно определению из маркетинга, «целевая аудитория – это совокупность потребителей, принимающих покупательские решения, а также сил, оказывающих на них влияние» [6]. Применительно к образовательному онлайн-курсу, целевая аудитория – это потенциальные или существующие обучающиеся курса, а также люди, оказывающие на них влияние (например, родители обучающихся). Для каждого учебного курса формулируется описание целевой аудитории. Проектирование онлайн-курса начинается с изучения целевой аудитории: их потребностей, интересов, ожидания от обучения, психологических особенностей. На данном этапе используются инструменты маркетинга.

Для исследования целевой аудитории можно использовать следующие инструменты:

1.1. Проблемное интервью – беседа с респондентом, в ходе которой выясняется, какие проблемы касательно образования есть у респондента, как он их решает сейчас, какие сценарии использования образовательных материалов для него приемлемы. По результатам серии интервью формулируются гипотезы о проблемах представителей целевой аудитории, которые бы мог решить онлайн-курс, а также о свойствах сегмента аудитории, для которых актуален данный формат обучения [18].

1.2. Анкетирование и опросы – автоматизированный инструмент для статистической проверки сформированных гипотез. Одним из инструментов изучения аудитории в онлайн-курсах является анкетирование, проводимое среди учеников до начала обучения. Данные анкет позволяют адаптировать онлайн-курс под ожидания аудитории.

Целевой аудиторией онлайн-курса по математике являются учащиеся школ, абитуриенты университетов, и их родители. В ходе исследования и анализа требуется выяснить, почему с точки зрения целевой аудитории существующее общее обязательное образование является субъективно недостаточным, почему есть потребность в дополнительных или альтернативных форматах изучения математических дисциплин, а также уточнить описание аудитории, у которой есть эта сформированная потребность.

2. Постановка целей обучения.

Цели обучения нужны по следующим причинам:

— Измерение достижений и не достижений целей для исследования эффективности обучения;

— Создание проверочных материалов на основе поставленных целей для измерения достижения целей;

— Создание учебной программы и подбор необходимых учебных материалов исходя из поставленных целей.

Существует несколько методик постановки целей обучения. Кратко рассмотрим некоторые из них.

В русскоязычной практике ориентация на цели – системообразующий фактор персонализированной модели образования. Авторы методического пособия «Шкалирование учебных целей в персонализированной модели образования» дают следующее определение: «… учебная цель – те действия, которые сможет выполнить ученик, класс задач, которые он сможет решить». В модели персонализированного образования формулируется три уровня целей: 1) «целевой» уровень – «чего требуется достичь?», 2) «базовый» уровень – «какие элементарные знания и умения необходимо для этого освоить?», 3) «сверхцелевой» уровень – «как можно применить достигнутые результаты и развивать их дальше?». Таким образом «получается шкала учебной цели – структурированный по уровням ожидаемый результат» [26].

В мировой практике одной из наиболее распространенных является «таксономии целей обучения» автора Б. Блума. Согласно таксономии Б. Блума, учебные цели можно распределить по следующим уровням: знание, понимание, применение, анализ, синтез, оценка. В таблице 3 приведены уровни и глаголы, соответствующие заданиям на каждом уровне [29].

Таблица 3 – Таксономия Б. Блума: глаголы

Уровень освоения	Глаголы
Знание;	Составьте, определите, опишите, обозначьте, перечислите, установите соответствие, вспомните, назовите, установите порядок, воспроизведите, выберите;
Понимание;	Классифицируйте, обоснуйте, опишите, обсудите, отличите, объясните, обобщите, приведите примеры, перефразируйте;
Применение;	Примените, измените, вычислите, используйте, проиллюстрируйте, предскажите, покажите;
Анализ;	Проанализируйте, вычислите, составьте каталог, сравните, противопоставьте, отличите, исследуйте, смоделируйте, расспросите, испытайте;
Синтез;	Совместите, согласуйте, составьте, постройте, создайте, спроектируйте, разработайте, измените, организуйте, спланируйте, пересмотрите, расскажите, напишите;
Оценка;	Определите, оспорьте, оцените, защитите, опишите, обоснуйте, интерпретируйте, предскажите.

Целью обучения по учебной программе по математике является способность к самостоятельному решению задач по конкретной теме. В случае школьной математики можно ориентироваться на ФГОС [2], а также взять за основу документы, опубликованные ФГБНУ «ФИПИ» в разделах рекомендаций по ЕГЭ: «Спецификация», «Кодификатор требований» и «Кодификатор элементов» [7]. Каждая цель, связанная с навыком решения задач, по одной из существующих классификаций целей разбивается на более детализированные, например, уточняются методы решения задач, используемые формулы и теоремы. Автор онлайн-курса определяет список целей, ориентируясь на официальные документы и учебники, но не обязан охватывать полное содержание общего образования, выбирая среди элементов содержания те, которые считает необходимым для данного онлайн-курса.

Кроме предметных математических целей, онлайн-курс может содержать и прочие. Достижение целей, связанных с цифровой грамотностью, позволит улучшить качество подготовки учащихся посредством цифровых инструментов. Освоение организационных правил проведения экзаменов позволит учащимся избежать снижения объективных результатов экзамена. Также в онлайн-курсе могут быть предусмотрены цели, связанные с психологическим комфортом участника экзамена.

3. Выбор форматов, инструментов.

В зависимости от поставленных целей выбираются средства реализации обучения. На данном этапе также утверждается способ обучения: очный, онлайн или смешанный. Разрабатывается мотивационная стратегия, в том числе игрофикация.

Перечислим некоторые доступные технические инструменты, которые используются в онлайн-обучении, классифицированные по формату потребления контента:

1. Видео: эксперт в кадре, интервью, скринкаст, анимация, скрайбинг, вебинар.
2. Текст: конспект видео, статья, инфографика, виджет.
3. Аудио: аудиокнига, подкаст.
4. Общение: звонок с учителем, чат-бот.
5. Действие: диалоговый тренажер, видеотренажер, игра, симуляция, приложение VR/AR.
6. Взаимодействие: групповой звонок, интерактивные инструменты для совместной работы, групповой проект, чат.

Для удобства навигации ученика по программе онлайн-курса используются сайты, специализированные платформы. Для контроля достижения учебных целей используются тесты, проверочные задания, созданные с помощью перечисленных выше инструментов.

4. *Разработка учебного контента*

Учебный контент должен служить достижению целей и соответствовать выбранному формату обучения, адаптироваться под инструменты онлайн-обучения.

Например, при создании заданий для учащегося должен быть грамотно реализован способ ввода ответа на задание. Если предполагается, что учащийся вводит ответ с помощью устройства ввода (клавиатуры или экранной клавиатуры) для автоматической проверки, то ответ не должен содержать сложных элементов (например, формул), должен быть однозначным (например, если ответ может быть выражен обычной и десятичной дробями, то в тексте задания должно быть оговорено, какая дробь требуется, либо задание технически реализовано так, чтобы принимать оба варианта ответа в качестве верных).

Рассмотрим частный случай. Ответом на уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ является $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. Такой ответ затруднительно ввести с помощью клавиатуры, а также он неоднозначен: допустима альтернативная запись $x = \pm\frac{7\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Один из способов упростить запись ответа – задать дополнительный вопрос, например: «В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$», тогда ответом станет число 2, которое можно ввести с помощью клавиатуры. Однако данный вопрос усложняет задание, заставляя учащегося выполнять дополнительное действие.

5. *Создание и размещение онлайн-курса.*

Данный шаг включает техническую реализацию, настройку выбранных инструментов.

В выборе подходов следует учитывать, что изучение математической дисциплины должно включать изучение теоретического материала, реализованного с помощью видео, текста, общения с преподавателем. В виду специфики предмета, не представляется возможным обойтись только аудиоформатом, взаимодействием группы без преподавателя.

Практика реализации онлайн-курсов по математике показывает, что существуют некоторые специфичные для математики требования к инструментам, которые описаны далее.

При использовании текстовых форматов должна быть предусмотрена возможность публикации формул: либо с помощью вставки изображений, либо платформа должна поддерживать TeX – систему компьютерной верстки, разработанную в целях создания компьютерной типографии. В системе TeX формулы можно вводить с помощью специального кода, который платформа визуализирует в привычную для учащихся запись.

При использовании инструментов, разработанных для англоязычных пользователей, нужно учитывать региональную специфику математических обозначений. Например, такие инструменты по умолчанию используют запись десятичной дроби через точку, а не через запятую, и обозначают тангенс символами tn в отличие от tg.

6. Разработка методов оценки эффективности.

Оценка эффективности производится следующим образом: ставятся гипотезы, формулируются методы проверки гипотез, собираются данные, делается вывод о правдивости гипотезы на основе анализа данных. В качестве данных может исследоваться следующая информация: доходимость (доля учеников, дошедших до каждого следующего этапа онлайн-курса), достижение учебных целей по результатам промежуточного и итогового контролей, время взаимодействия с курсом и отдельными его элементами, выбор элементов курса, регулярность взаимодействия с курсом, субъективная удовлетворённость учащихся.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

В ходе исследования были получены следующие результаты:

1. Онлайн-обучение – обучение, осуществляемое исключительно посредством сети Интернет, не предполагающее непосредственного личного контакта учителя и учащегося. Онлайн-обучение является частным случаем дистанционного обучения. Онлайн-обучение противопоставляется очному обучению.

2. Актуализированы специфические требования к реализации онлайн-обучения: адекватный выбор технических инструментов; проектирование обучения с возможностью измерения эффективности обучения; использование учебной аналитики; индивидуализация обучения.

3. Процесс проектирования онлайн-курса с учётом специфических требований включает следующие шаги:

1. Анализ целевой аудитории.
2. Постановка целей обучения.
3. Выбор форматов, инструментов.
4. Разработка учебного контента.
5. Создание и размещение онлайн-курса.
6. Разработка методов оценки эффективности.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОНЛАЙН-КУРСА

2.1. Исследование целевой аудитории онлайн-курса по математике

Данная работа ставит целью разработку методических рекомендаций повышения эффективности процесса подготовки к ЕГЭ посредством онлайн-курса. В данной главе будет описан процесс реализации онлайн-курса для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Первым этапом разработки было исследование целевой аудитории.

При подготовке онлайн-курса было проведено 10 проблемных интервью, которые выявили следующую проблему: учащиеся средних школ и непрофильных классов изучают курс математики на базовом уровне, однако некоторые из учащихся планируют поступать в университеты на направления, связанные с математикой, где от абитуриентов требуется высокий балл ЕГЭ. Учащиеся считают, что после освоения программы их учебного заведения невозможно получить требуемый балл, так как некоторые темы профильного экзамена ими не изучаются или изучаются недостаточно глубоко. Представители целевой аудитории говорят о необходимости дополнительных занятий помимо обязательного общего образования, однако некоторые из них добавляют, что дополнительные индивидуальные занятия с репетитором по разным причинам им недоступны: нет репетитора в их населенном пункте, нехватка времени и невозможность сформировать расписание регулярных занятий, дороговизна занятий и другое.

По результатам интервью было сформулировано несколько гипотез, которые перечислены в таблице 4. Затем выбран метод проверки гипотезы и проведена проверка. Результаты также представлены в таблице 4. В таблице 4 CTR (Click Through Rate) – это эффективность объявления: количество переходов по объявлению, поделённое на количество показов, измеряется в процентах.

Таблица 4 – Гипотезы в рамках исследования целевой аудитории

Гипотеза	Инструмент проверки	Показатель подтверждения гипотезы	Результат
Среди аудитории учащихся впускных классов, активных пользователей сети Интернет, есть сегмент учащихся, которые имеют потребность в дополнительных занятиях по подготовке к ЕГЭ по математике;	Таргетированная реклама в социальных сетях, нацеленная на аудиторию учащихся выпускных классов, с предложением пройти онлайн-курс для подготовки к ЕГЭ по математике;	CTR > 0,1% при более чем 10 000 показах;	CTR = 0,47%. Гипотеза подтверждена;
Среди аудитории учащихся выпускных классов, активных пользователей сети Интернет, есть сегмент учащихся, которые самостоятельно ищут возможности дополнительных занятий по подготовке к ЕГЭ по математике;	Размещение анонса онлайн-курса в каталоге курсов платформы Stepik;	За первый месяц публикации онлайн-курс собирает более 100 подписчиков, перешедших из каталога Stepik;	Гипотеза подтверждена;

Продолжение таблицы 4

Учащиеся могут освоить решение простых задач профильного ЕГЭ по математике (№№1-12) в своих учебных заведениях и имеют запрос на дополнительное изучение задач с оформлением решения (№№13-19).	Создание онлайн-курса «Задачи с оформлением» и уточнением в описании, что в данном курсе разбираются только задачи №№13-19.	Отсутствие запроса на задачи №№1-12 при данном позиционировании.	Наличие 1 запроса на задачи №№1-12 из 1128 посетителей сайта. Гипотеза частично подтверждена.

Таким образом уточнена целевая аудитория онлайн-курса: учащиеся 11 класса школы без углубленного изучения математики, абитуриенты специальностей, учитывающих результаты профильного ЕГЭ по математике, которые уже освоили простые темы и осознают потребность в дополнительной подготовке к экзамену, в связи с чем самостоятельно ищут возможности дополнительного обучения в сети Интернет.

2.2. Организация обучения посредством онлайн-курса по математике

По результатам исследования целевой аудитории была уточнена цель онлайн-курса: подготовка учащихся средней школы (без углублённого изучения математики) к выполнению задач №№13-19 (с оформлением решения) в профильном ЕГЭ по математике.

Нумерация заданий использована исходя из демоверсии ЕГЭ 2021 года [7].

На уровне «синтез» таксономии Б. Блума [29] данная цель детализируется на учебные цели, соответствующие решению конкретных задач в профильном ЕГЭ по математике, а именно:

1) Решать и оформлять решение трудного уравнения (задача №13);
2) Решать и оформлять решение стереометрической задачи (задача №14);
3) Решать и оформлять решение трудного неравенства (задача №15);
4) Решать и оформлять решение планиметрической задачи (задача №16);
5) Решать и оформлять решение текстовой задачи (кредиты, вклады, оптимизация) (задача №17);
6) Решать и оформлять решение задания с параметром (задача №18);
7) Решать и оформлять решение текстовой задачи теории чисел (задача №19).

Кроме предметных целей, в онлайн-курсе присутствует организационная цель на уровне «знание» таксономии Б. Блума: знание правил проведения экзамена.

Так как целевой аудиторией курса выбраны учащиеся, которые самостоятельно осознают потребность в обучении и ищут соответствующие материалы, к онлайн-курсу представлены следующие требования:

1. Возможность доступа учащимся ко всем материалам онлайн-курса без привязки ко времени, так как учащиеся самостоятельно формируют свое расписание.
2. Возможность выбора необходимой темы без ограничения последовательности изучения тем.
3. Возможность структурирования большого количества учебной информации так, чтобы учащиеся могли свободно ориентироваться в учебных материалах, формируя индивидуальную траекторию обучения.

В связи со спецификой учебных целей к онлайн-курсу представлены следующие требования:

4. Возможность донесения до учащихся теоретической информации посредством видео и текста.
5. Возможность учащимся самостоятельно решать задачи и получать обратную связь.

6. Возможность проверки оформления решений, выполненных учащимися: автоматической или личной от преподавателя.

Для анализа данных и выводов об эффективности онлайн-курса требуется следующая функциональность:

7. Анкеты обратной связи для учащихся.
8. Сбор данных об активности учащихся: запись на курс, просмотр каждого элемента содержания, успешность выполнения заданий, время работы на курсе и прочее.

Также остаются актуальными специфические требования к инструментам реализации онлайн-курса по математике, подробно рассмотренные в Главе 1 данной работы:

9. Поддержка платформой системы TeX для визуализации математических формул.
10. Возможность ввода учащимися ответов на задания с помощью клавиатуры или экранной клавиатуры.

По результатам изучения доступных инструментов и с учётом требований были выбраны следующие:

1) Одностраничный сайт для представления онлайн-курса [13],
2) Образовательная платформа «Stepik» для создания структуры курса и проверочных заданий,
3) Видео в формате «эксперт в кадре» для подачи теоретической информации,
4) «Google Формы» для создания анкет обратной связи.

2.3. Разработка предметного содержания онлайн-курса по математике (на примере проектирования модуля «задача 13»)

Разработка учебных материалов для выбранного формата и целей состояла из следующих этапов: поиск и изучение учебных материалов на выбранные темы; поиск, отбор и систематизация проверочных заданий, соответствующих заданиям ЕГЭ; уточнение и детализация учебных целей; создание текстовых сценариев для дальнейшей видеосъемки; создание видео: съемка и монтаж; написание текстовых пояснений, инструкций для учащихся онлайн-курса.

Далее будет рассмотрена разработка учебного модуля «Задача 13», входящего в онлайн-курс: поставлены цели, создана структура учебной программы, разработан учебный контент.

На первом этапе рассмотрены и систематизированы задания, которые представлены в «Открытом банке заданий ЕГЭ» [22] и сборниках заданий под редакцией И. В. Ященко [8 – 12, 14,15, 19, 28]. На основе этих материалов для учебного модуля произведена постановка учебных целей. Для этого использована таксономия Б. Блума. Результаты представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Учебные цели модуля «Задача 13»

Уровень освоения	**Учебные цели**
Синтез;	Решать и оформлять решение задания №13 (уравнение) в профильном ЕГЭ по математике;
Анализ;	- Выбирать наиболее рациональный метод решения уравнения из известных; - Обосновывать причины выбора метода решения уравнения; - Обосновывать причины выбора метода отбора корней уравнения;
Применение;	- Применять метод «замена переменной», делать прямую и обратную замену в уравнении; - Раскладывать выражение на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя; - Раскладывать выражение на множители с помощью метода группировки;

Продолжение таблицы 5

	- Логарифмировать и потенцировать выражения и применять это для решения уравнений; - Использовать тригонометрический круг для решения тригонометрических уравнений; - Записывать условия существования ОДЗ; - Учитывать условия существования ОДЗ для выяснения ответа на уравнение; - Выполнять отбор корней с помощью числовой прямой; - Выполнять обор корней с помощью двойного неравенства; - Выполнять обор корней с помощью подбора;
Понимание;	- Понимать метод «замена переменной», объяснять смысл его использования; - Понимать смысл разложения выражения на множители для решения уравнений; - Понимать равносильность переходов, отличать равносильный переход от следствия; - Объяснять смысл использования ОДЗ;
Знание.	- Знать определение логарифма, свойства логарифмов; - Знать основное тригонометрическое тождество; - Знать тригонометрические формулы двойного угла; - Перечислять условия существования ОДЗ; - Знать критерии оценивания задания на экзамене.

Уровень «Оценка» не представлен, так как признан избыточным для достижения цели онлайн-курса.

Данная систематизация позволила выявить следующее деление модуля на уроки (в рамках платформы Stepik онлайн-курс разделяется на модули, модули разделяются на уроки, уроки разделяются на шаги; здесь и далее использована терминология платформы):

1. Замена переменной.
2. Разложение на множители.
3. Равенство логарифмов.
4. Исследование ОДЗ.
5. Смешанные уравнения.
6. Отбор корней.
7. Практикум по решению уравнений.

Согласно документу «Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года по математике», опубликованному ФГБНУ «ФИПИ», задание №13 верно выполнили 0,2% участников ЕГЭ, не преодолевших минимального балла, и 94,4% высокобалльников (участников, набравших более 80 баллов из 100). «… Это задание решают выпускники с отличной и хорошей подготовкой, выпускники со слабой подготовкой к этому заданию, как правило, не приступают» [27]. Таким образом, следует ожидать, что аудитория онлайн-курса будет подготовлена к изучению модуля, а также данный модуль окажется наиболее востребованным из всего содержания онлайн-курса.

Учебный контент модуля «Задача 13» представлен в приложении В. Уроки №№1-6 содержат авторские задания, а урок №7 составлен из заданий реальных вариантов ЕГЭ прошлых лет.

2.4. Исследование результатов онлайн-курса

2.4.1. Поведение учащихся онлайн-курса

Изучим данные о поведении учащихся онлайн-курса с 15 апреля 2020 по 7 июня 2021. За это время на модуль «Задача 13» было подписано 1746 пользователей. Исследовать данные будем следующим образом: ставится гипотеза, формулируется критерии подтверждения гипотезы, рассматриваются статистические данные, делается вывод о подтверждении или опровержении гипотезы.

Гипотеза 1. Представители целевой аудитории самостоятельно ищут материалы для изучения, выбирая из различных вариантов в Интернете. Критерий подтверждения: количество просмотров первого урока будет значительно превышать количество просмотров следующих уроков (в два раза или более).

Данные представлены в таблице 6. Просмотры – это количество уникальных пользователей, посмотревших урок; прохождения – это количество уникальных пользователей, посмотревших все шаги урока и решивших все задания урока.

Таблица 6 – Количество просмотров и прохождений уроков модуля «Задача 13»

Урок	Просмотры	Прохождения
Замена переменной	1400	209
Разложение на множители	552	184
Равенство логарифмов	464	176
Исследование ОДЗ	339	95
Смешанные уравнения	286	127
Отбор корней	371	91
Практикум	267	50

Данные таблицы 6 также представлены в виде диаграммы на рисунке 1.

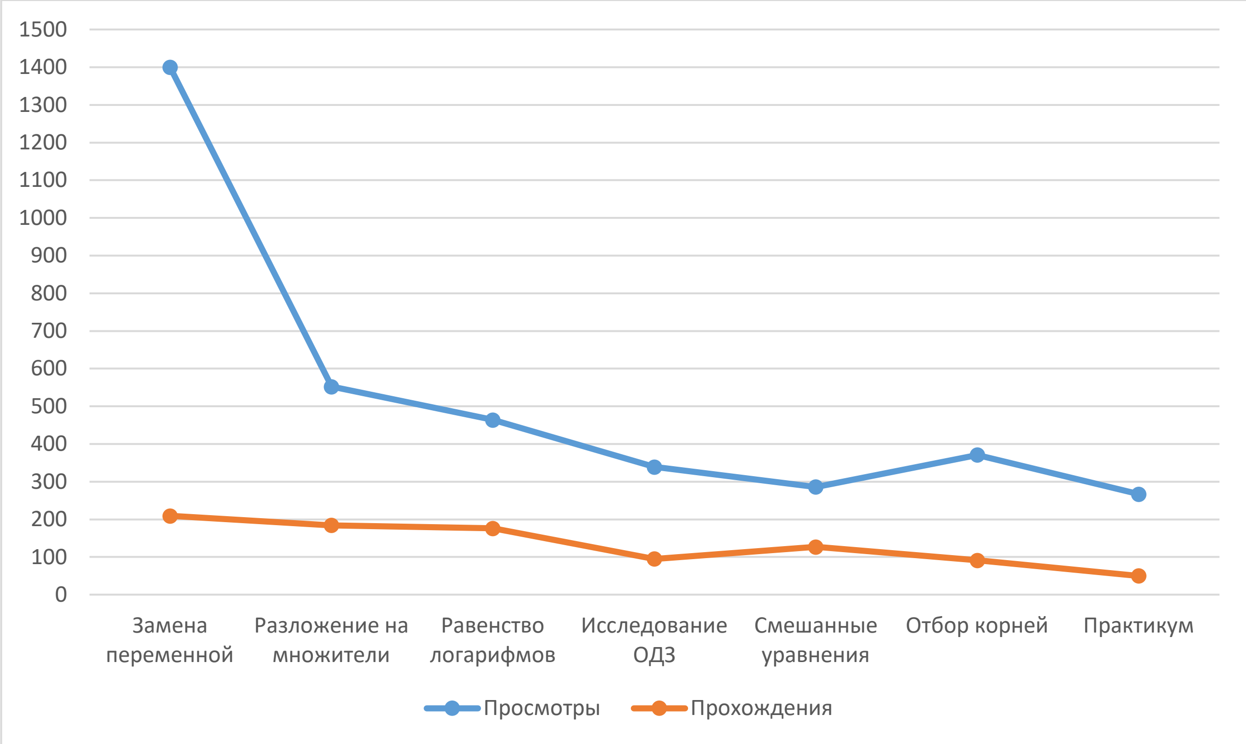

Рисунок 1 - Просмотры и прохождения уроков модуля «Задача 13»

Количество просмотров первого урока значительно превышает количество просмотров второго урока (более чем в 2,5 раза). Гипотеза подтверждена. Однако количество прохождений первого урока не так значительно отличается от прохождений второго. Таким образом проясняется типичное поведение пользователей: на первом шаге онлайн-курса они принимают решение, хотят ли изучать этот онлайн-курс, поэтому автору онлайн-курса очень важно сделать первый урок достаточно вовлекающим.

Гипотеза 2. Представители целевой аудитории имеют запрос на индивидуализацию обучения, поэтому они будут самостоятельно выбирать тему из предложенных, а не изучать все шаги курса подряд. Критерий подтверждения: количество просмотров каждого первого шага в каждом уроке будет значительно выше, чем количество просмотров последнего шага в предыдущем уроке (в два раза или более).

Данные представлены на диаграмме – рисунок 2.

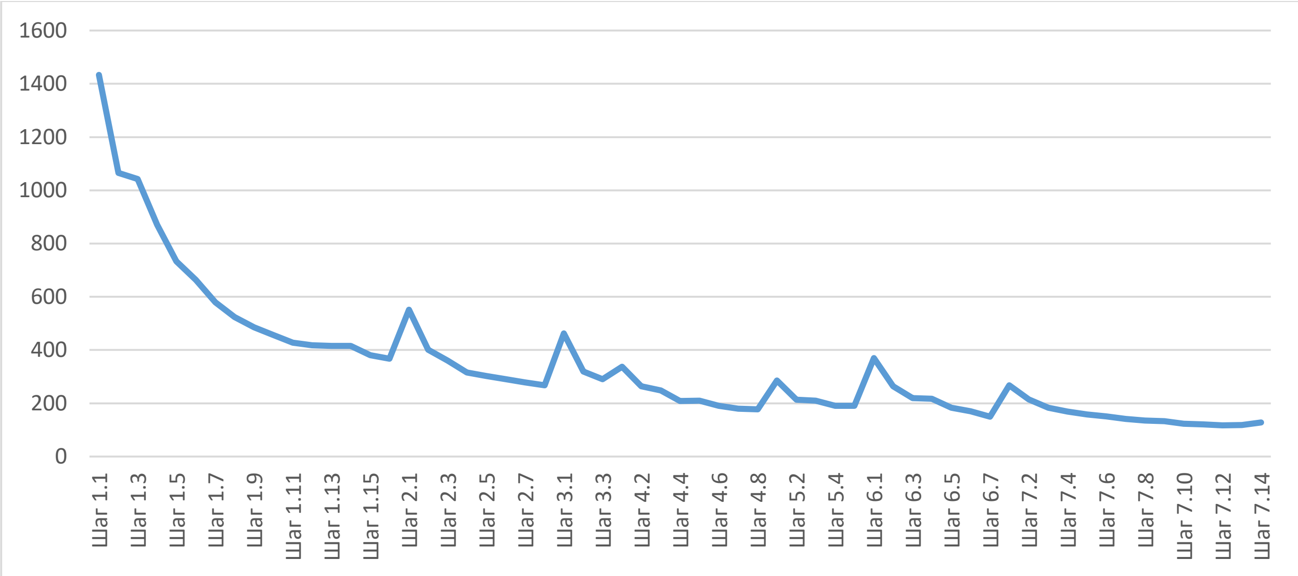

Рисунок 2 - Просмотры шагов модуля «Задача 13»

На диаграмме, иллюстрирующей количество просмотров, явным образом наблюдаются подъемы, соответствующие началу каждого урока. Однако разница меньше ожидаемой. Например, количество просмотров шага 2.1.16 (последнего в первом уроке) равно 368, а количество просмотров шага 2.2.1 (первого во втором уроке) равно 551, то есть отличие примерно в 1,5 раза.

Посетители онлайн-курса склонны чаще просматривать первый шаг каждого урока, чем последующие шаги. Таким образом они выбирают тему, которую хотели бы изучать – значит, имеют запрос на индивидуализацию, их не устраивает последовательное изучение тем по фиксированной программе. Гипотеза подтверждена частично.

Гипотеза 3. Данный онлайн-курс соответствует ожиданиям аудитории. Учащиеся, записавшиеся на курс, начнут обучение. Критерий подтверждения: количество прохождений первого урока будет меньше, чем количество просмотров первого урока, не более чем в 3 раза.

Данные представлены в таблице 6 и на рисунке 1. Количество просмотров первого урока 1400, количество прохождений 209, – это значит, что примерно 14,9% записавшихся на курс приступают к обучению. Гипотеза не подтверждена. Для дальнейшего улучшения курса требуется: 1) сравнить полученный результат с результатами аналогичных курсов; 2) с помощью дальнейшего изучения целевой аудитории выяснить причину отказов от обучения; 3) на основе полученной информации отредактировать онлайн-курс с целью улучшить удержание аудитории.

Гипотеза 4. Целевая аудитория имеет мотивацию для самостоятельной работы на онлайн-курсе без непосредственного контроля преподавателя. Критерий подтверждения: количество решений последней задачи будет меньше, чем количество решений первой задачи, не более чем в 3 раза.

Данные представлены на диаграмме – рисунок 3.

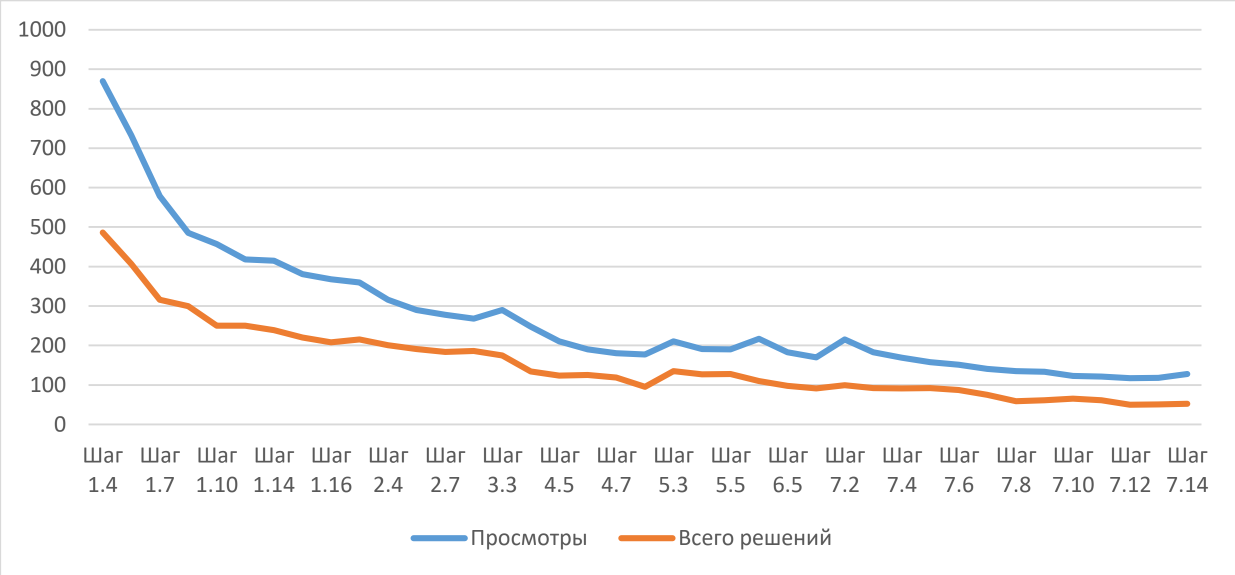

Рисунок 3 - Количество просмотров и решений задач модуля «Задача 13»

Первую задачу модуля решило 486 человек, а последнюю 52. Значит, только 10,7% учащихся, начавших обучение, закончили его. Гипотеза не подтверждена. Для дальнейшего улучшения онлайн-курса требуется провести дополнительную работу с мотивацией учащихся.

2.4.2. Контент онлайн-курса

Данные о прохождении учащимися различных задач могут быть полезны для преподавателей и методистов. Можно сделать выводы о том, какие задания являются наиболее затруднительными для учащихся, какие типичные ошибки совершают учащиеся.

Рассмотрим статистику решений задания модуля «Задача 13». Будем использовать показатель «доля ошибок» – отношение количества неверных решений ко всем решениям. Номера заданий и доля ошибок приведены на диаграмме на рисунке 4.

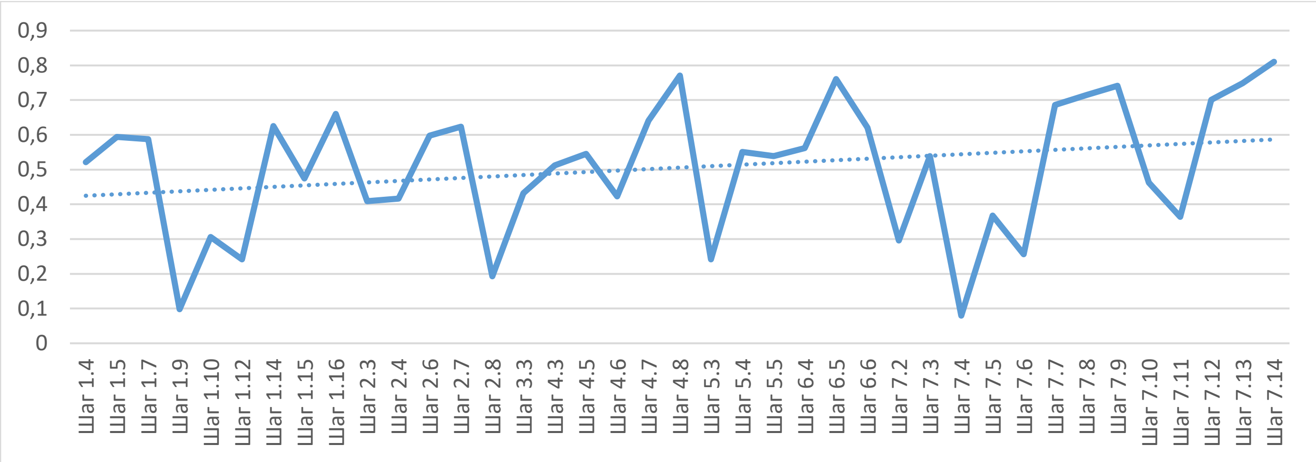

Рисунок 4 - Доля ошибок при решении заданий модуля «Задача 13»

Как видно по диаграмме (рисунок 4), не наблюдается зависимости доли ошибок от порядкового номера задания. То есть, хотя задания и размещены по порядку возрастания сложности преобразований, успешность выполнения этих заданий не так предсказуема и не зависит от количества операций внутри решения задачи. Линия тренда показывает небольшой рост доли ошибок в связи с усложнением заданий.

Определим, какие задания можно считать «часто решаемыми» и «редко решаемыми». Будем считать значения доли ошибок, полученные в результате построения линии тренда, «ожидаемыми», чтобы учесть повышение сложности заданий. Обратим внимание на те задачи, доля ошибок при решении которых отличается от ожидаемой более, чем на 0,15. При выборе такой величины мы получим, что всего задач в модуле 39, ожидаемая доля успешных решений у 19 заданий, «редко решаемых» задач 11, «часто решаемых» задач 9. Далее рассмотрим часто решаемые и редко решаемые задачи в каждом уроке.

Урок 1: Замена переменной. Количество задач: с ожидаемой долей успешных решений – 3, часто решаемых задач – 2, редко решаемых задач – 4. Список задач дан в таблице 7. Часто решаемыми задачами являются задачи, в которых впервые появляются показательная и логарифмическая функция. Редко решаемые задачи связаны с дробно-рациональными, иррациональными, тригонометрическими функциями.

Таблица 7 - Доля ошибок при решении задач урока «Замена переменной»

Шаг	Условие: Решите уравнение	Доля ошибок	Частота верных ответов
2.1.4	$x^4 - 21x^2 = 100$	0,521	Ожидаемая
2.1.5	$\frac{1}{(5-x)^2} + \frac{7}{(5-x)} - 8 = 0$	0,594	Редкая
2.1.7	$x - 8\sqrt{x} = 9$	0,588	Редкая
2.1.9	$49^x - 5 \cdot 7^x - 14 = 0$	0,098	Частая
2.1.10	$2 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} - 4 \cdot 10^x + 75 \cdot 25^{x-1} = 0$	0,306	Ожидаемая
2.1.12	$6log_8^2x + log_8x - 1 = 0$	0,242	Частая
2.1.14	$10cos^2x - 9cosx - 7 = 0$	0,626	Редкая
2.1.15	$2cos^2x + 3sinx - 3 = 0$	0,474	Ожидаемая
2.1.16	$cos2x - 3sinx - 2 = 0$	0,661	Редкая

По результатам можно сформулировать гипотезу, что учащиеся хорошо знакомы с показательной и логарифмической функцией, знают определение логарифма. И, напротив, плохо владеют тригонометрией. Для улучшения онлайн-курса можно добавить теоретический материал, посвящённый квадратному корню и тригонометрии, добавить упражнения на отработку базовых действий.

Урок 2: Разложение на множители. Количество задач: с ожидаемой долей успешных решений – 3, часто решаемых задач – 1, редко решаемых задач – 1. Список задач дан в таблице 8.

Таблица 8 - Доля ошибок при решении задач урока «Замена переменной»

Шаг	Условие: Решите уравнение	Доля ошибок	Частота верных ответов
2.2.3	$sin2x - \sqrt{3}cosx = 0$	0,409	Ожидаемая
2.2.4	$sin2x + 2cos^2x = 0$	0,416	Ожидаемая
2.2.6	$cos^3x - cos^2x + cosx - 1 = 0$	0,598	Ожидаемая
2.2.7	$sin2x + cosx = 2sin^2x + sinx$	0,624	Редкая
2.2.8	$27^x - 4 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 36 = 0$	0,193	Частая

Во втором уроке, как и в первом, наблюдается заметная разница в частоте решений заданий с тригонометрией и с показательной функцией. Тригонометрические уравнения верно решают меньше половины учащихся, когда как показательное уравнение решили 80,7% учащихся. Причём доля ошибок в тригонометрических уравнениях остаётся на том же уровне, что в и в первом уроке. Можно сформулировать гипотезу, что сейчас онлайн-курс не способствует улучшению результатов учащихся, плохо знакомых с тригонометрией, и нужно уделить больше внимания этой теме.

Урок 3: Равенство логарифмов. Данный урок содержит только одну задачу с ожидаемой частотой верных ответов. Информация внесена в таблицу 9.

Таблица 9 - Доля ошибок при решении задач урока «Равенство логарифмов»

Шаг	Условие: Решите уравнение	Доля ошибок	Частота верных ответов
2.3.3	$\log_9(14x^2 + 1) + 1 = \log_3 \sqrt{25x^4 + 14}$	0,432	Ожидаемая

Урок 4: Исследование ОДЗ. Количество задач: с ожидаемой долей успешных решений – 4, часто решаемых задач – 0, редко решаемых задач – 1. Список задач дан в таблице 10.

Таблица 10 - Доля ошибок при решении задач урока «Исследование ОДЗ»

Шаг	Условие: Решите уравнение	Доля ошибок	Частота верных ответов
2.4.3	$\frac{13cosx+12}{12tgx-5}=0$	0,513	Ожидаемая
2.4.5.	$\frac{6cos^2x+11sinx-10}{\sqrt{-ctgx}}=0$	0,545	Ожидаемая
2.4.6.	$(sinx-1)(tgx-\sqrt{3})\sqrt{cosx}=0$	0,423	Ожидаемая
2.4.7	$\frac{cos2x-\sqrt{3}sinx-1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}=0$	0,621	Ожидаемая
2.4.8	$\sqrt{sin2xcos2x}\left(\frac{1}{tgx}+1\right)=0$	0,771	Редкая

Задания урока «Исследование ОДЗ» содержат тригонометрию, однако в большинстве имеют ожидаемую долю верных ответов. С этими заданиями учащиеся справляются чуть лучше, чем с тригонометрией в предыдущих уроках; улучшение стало наблюдаться благодаря поправке на возрастающую сложность заданий. Можно сформулировать две альтернативные гипотезы для объяснения улучшения. Первая гипотеза: обучение на онлайн-курсе способствует пониманию тригонометрии. Вторая гипотеза: на результат влияет количество учащихся; с каждым уроком всё меньше активных учащихся, и вероятно, что наиболее подготовленные ученики занимаются дольше, в то время как неподготовленные бросают обучение на первых заданиях. Для того, чтобы спланировать дальнейшее улучшение онлайн-курса, нужно провести дополнительное исследование для проверки гипотез.

Урок 5: Смешанные уравнения. Количество задач: с ожидаемой долей успешных решений – 2, часто решаемых задач – 1, редко решаемых задач – 0. Список задач дан в таблице 11.

Таблица 11 - Доля ошибок при решении задач урока «Смешанные уравнения»

Шаг	Условие: Решите уравнение	Доля ошибок	Частота верных ответов
2.5.3	$21^{cosx} = 3^{cosx} 7^{sinx}$	0,242	Частая
2.5.4.	$\left(\frac{1}{64}\right)^{cosx} = 8^{2sin2x}$	0,551	Ожидаемая
2.5.5.	$\log_2(cosx - sin2x + 8) = 3$	0,539	Ожидаемая

В уроке 5 наблюдается та же тенденция, что началась в уроке 4: задания с тригонометрией не являются редко решаемыми, более того, появляется часто решаемая задача с тригонометрией. Ставится гипотеза, что данный урок – проще предыдущих; можно попробовать изменить структуру курса, поставив тему «Смешанные уравнения» раньше, и исследовать изменение успеваемости учащихся.

Урок 6: Отбор корней. Количество задач: с ожидаемой долей успешных решений – 2, часто решаемых задач – 0, редко решаемых задач – 1. Список задач дан в таблице 12.

Таблица 12 - Доля ошибок при решении задач урока «Отбор корней»

Шаг	Условие	Доля ошибок	Частота верных ответов
2.6.4	Из решений уравнения $tgx = -\sqrt{3}$ выбрать то, которое принадлежит промежутку $[-\pi; 0]$	0,562	Ожидаемая
2.6.5.	Из решений уравнения $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ выбрать то, которое принадлежит промежутку $[\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}]$	0,761	Редкая
2.6.6.	Из решений уравнения $cosx = 0$ выбрать то, которое принадлежит промежутку $[-7\pi; -6\pi]$	0,621	Ожидаемая

При составлении программы онлайн-курса не было однозначного решения, под каким порядковым номером должен был идти урок «Отбор корней»: его можно было сделать первым, либо не выделять в отдельный урок вовсе, включив элементы отбора корней в предыдущие уроки. Текущее исследование результатов демонстрирует, что урок «Отбор корней» находится на правильной позиции по доле верных ответов.

Урок 7: Практикум. Урок не содержит теоретических материалов и разборов аналогичных задач. Учащимся предлагается самостоятельно выбрать метод решения для каждого задания; ожидается, что это сделать труднее, чем решить задание из предыдущих уроков. Однако задания расположены по возрастанию уровня сложности по тому же принципу, что и в уроках. Количество задач: с ожидаемой долей успешных решений – 4, часто решаемых задач – 5, редко решаемых задач – 4. Список задач дан в таблице 13.

Таблица 13 - Доля ошибок при решении задач урока «Практикум»

Шаг	Условие	Доля ошибок	Частота верных ответов
2.7.2.	а) Решите уравнение $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$	0,296	Частая
2.7.3.	а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$ б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$	0,538	Ожидаемая
2.7.6.	а) Решите уравнение $6log_8^2 x - 5log_8 x + 1 = 0$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2{,}5]$	0,080	Частая
2.7.7.	а) Решите уравнение $log_2\,(x^2 - 14x) = 5$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[log_3\,0{,}1;\ 5\sqrt{10}]$	0,367	Частая
2.7.8.	а) Решите уравнение $log_5(2 - x) = log_{25}\,x^4$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[log_9 \frac{1}{82};\ log_9 8]$	0,256	Частая

Продолжение таблицы 13

2.7.9.	а) Решите уравнение $1 + log_2\,(9x^2 + 5) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4 + 14}$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; \frac{8}{9}]$	0,686	Ожидаемая
2.7.10.	а) Решите уравнение $cos2x - 5\sqrt{2}cos\,x - 5 = 0$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$	0,715	Редкая
2.7.11.	а) Решите уравнение $sin2x + \sqrt{2}sinx = 2cosx + \sqrt{2}$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$	0,742	Редкая
2.7.12.	а) Решите уравнение $15^{cosx} = 3^{cosx} \cdot 5^{sinx}$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; \frac{13\pi}{2}]$	0,463	Ожидаемая
2.7.13.	а) Решите уравнение $(27^{cosx})^{sinx} = 3^{\frac{3cosx}{2}}$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$	0,364	Частая

Продолжение таблицы 13

2.7.14.	а) Решите уравнение $9^{sinx} + 9^{-sinx} = \frac{10}{3}$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$	0,701	Ожидаемая
2.7.15.	а) Решите уравнение $log_4\,(2^{2x} - \sqrt{3}\,cos\,x - sin\,2x) = x$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$	0,749	Редкая
2.7.16.	а) Решите уравнение $2log_{0,5}^2(2sin\,x) + 7log_{0,5}(2sin\,x) + 3 = 0$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$	0,811	Редкая

Результаты урока «Практикум» подтверждают информацию, полученную из данных по предыдущим урокам. Доля ошибок в тригонометрических уравнениях остаётся стабильно высокой, в уравнениях с показательными и логарифмическими функциями – стабильно самой низкой.

В уроке «Практикум» учащимся предлагалось оформить решения и прислать их на проверку. Проверка решений позволила выявить существенную трудность при решении задачи шага 2.7.3. Несмотря на то, что 46,2% учащихся сумели дать верный ответ, большинство из присланных работ содержали ошибку в оформлении, связанную с записью ОДЗ. Для улучшения предметного содержания онлайн-курса рассмотрим отдельно исследование ОДЗ.

Согласно учебнику «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» авторов А. Г. Мордкович, П. В. Семенов:

«Определение 3. Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.»

Данное определение возникает в контексте параграфа «Равносильность уравнений», где также даны следующие определения:

Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называются равносильными, если множества их корней совпадают [21].

Определение 2. Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ (1) является в то же время корнем уравнения $p(x) = h(x)$ (2), то уравнение (2) называют следствием уравнения (1) [21].

Авторами учебника подробно рассматривается, какие действия приводят к образованию равносильного уравнения, а какие – к уравнению-следствию. Из определений можно сделать выводы о двух различных подходах к решению уравнений. В случае, если решение происходит равносильными переходами, то есть каждое новое уравнение равносильно предыдущему, корни каждого нового уравнения совпадают с корнями исходного. При этом не может возникнуть новых (посторонних) корней. Поэтому в данном случае исследование ОДЗ избыточно. В случае, если решение использует следствия, то есть некоторое новое уравнение является следствием исходного, у нового уравнения могут возникнуть корни, которые не являются корнями исходного (посторонние). Посторонние корни не удовлетворяют условиям ОДЗ исходного уравнения. Поэтому в данном случае исследование ОДЗ может быть важной частью решения, либо может быть заменено проверкой. Заметим, что одно и то же уравнение можно решить обоими способами.

Трудностью в изучении темы является тот факт, что учащиеся зачастую не отличают равносильный переход от следствия. Для того, чтобы избежать связанных с этим ошибок, некоторые учителя рекомендуют учащимся исследовать ОДЗ во всех уравнениях, встречающихся в заданиях ЕГЭ. Однако существуют задачи, где исследование ОДЗ представляет из себя сложное действие, например, в следующем уравнении (шаг 2.7.3) условие существования ОДЗ сводится к трудному неравенству третьей степени: $\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x$. Пример записи ОДЗ представлен на рисунке 5.

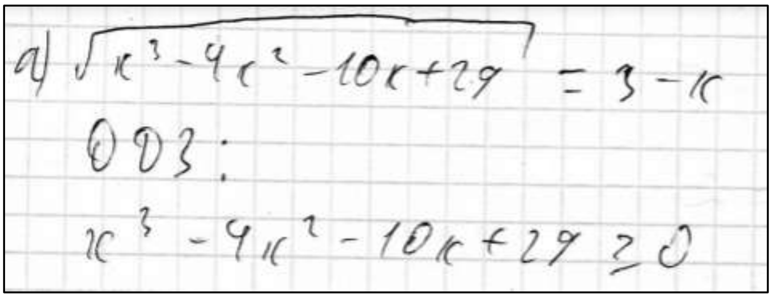

Рисунок 5 – Фрагмент работы Тимченко Михаила

В таких случаях можно рекомендовать учащимся не выполнять исследование ОДЗ, но сделать проверку в конце решения, как сделано в решении на рисунке 6.

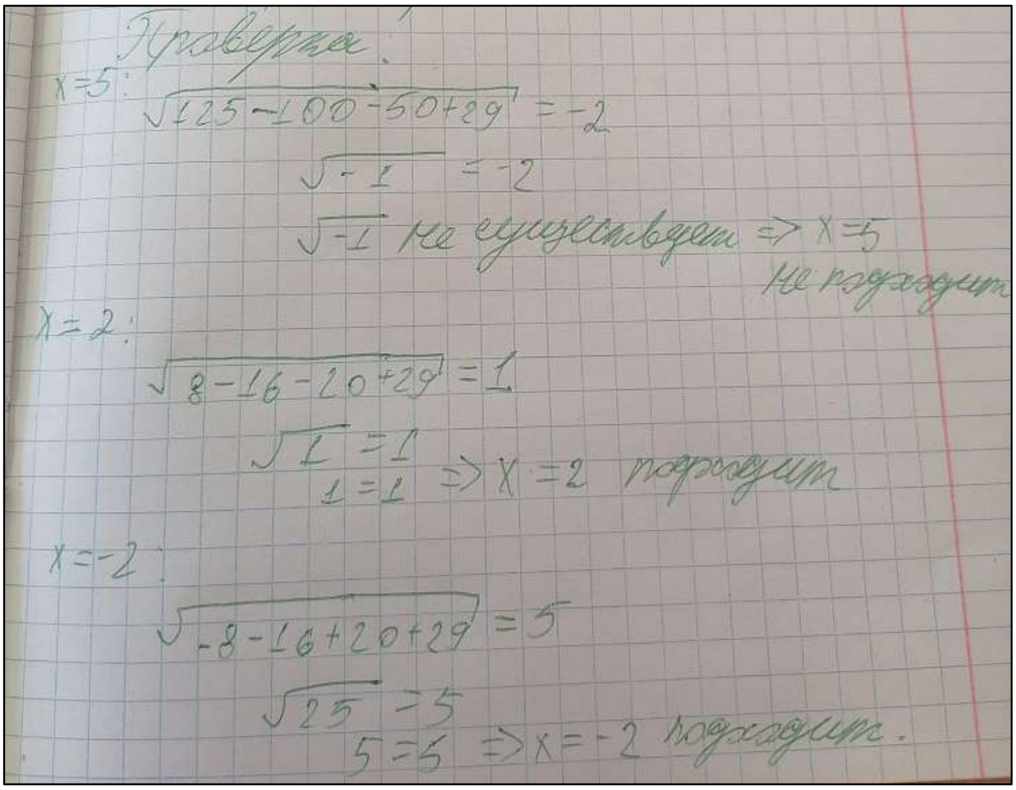

Рисунок 6 – Фрагмент работы Михайлина Александра

В материалах онлайн-курса решено использовать термин ОДЗ, так как термин знаком учащимся, а также применять исследование ОДЗ каждый раз, когда наиболее рациональным является решение с помощью следствий.

Другой трудностью, связанной с ОДЗ, является строгость корректного использования данного термина. Учащиеся зачастую вносят в условия ОДЗ избыточные условия, которые являются частью решения уравнения, либо опускают какие-то условия, что является ошибкой. Например, при решении уравнения $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$ (шаг 2.7.3) учащиеся записывали условие ОДЗ $3 - x \geq 0$, и это ошибка: данное условие является важным для равносильного перехода, но не является требованием ОДЗ, в этом случае неверно использован термин ОДЗ. Пример такой ошибки приведён на рисунке 7.

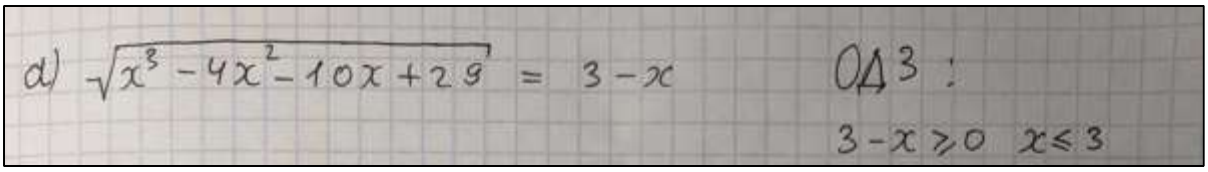

Рисунок 7 – Фрагмент работы Шибаева Василия

При решении с помощью равносильных переходов уравнение рассматриваемого типа равносильно системе: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, то есть, нет необходимости решать неравенство $f(x) \geq 0$, так как это условие учитывается при переходе к системе. Однако при решении с помощью следствий и с записью ОДЗ это неравенство писать нужно.

По определению ОДЗ уравнения $f(x) = g(x)$ – это множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$; при исследовании ОДЗ мы отдельно рассматриваем выражения $f(x)$ и $g(x)$. Для иллюстрации рассмотрим пример 1: уравнение $\sqrt{x} = -1$ имеет условие на ОДЗ $x \geq 0$ и не имеет решений в вещественных числах, то есть, при $x \geq 0$ оба выражения в правой и левой частях имеют смысл; а также пример 2: уравнение $\sqrt{-x^2 - 1} = 2$ имеет ОДЗ пустое множество, решений нет, так как левая часть не имеет смысла. Таким образом, для уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ условием на ОДЗ является неравенство $f(x) \geq 0$ и не является $g(x) \geq 0$, так как при отрицательных значениях $g(x)$ правая часть уравнения имеет смысл, хотя уравнение и не имеет решений.

Для решения этой трудности для онлайн-курса составлен «список правил» для исследования ОДЗ, который предлагается запомнить и применять всякий раз, когда возникают сомнения в корректности использования термина. Правила следующие:

1) Нельзя делить на ноль,
2) Нельзя извлекать корень из отрицательных чисел,
3) Тангенс должен существовать (тангенс – это отношение синуса к косинусу, значит, косинус не равен нулю), аналогично котангенс должен существовать (котангенс – это отношение косинуса к синусу, значит, синус не равен нулю),
4) Основание логарифма должно быть положительно и не равняться нулю,
5) Логарифмируемое выражение должно быть положительно,
6) Выражение, которое возводят в вещественную степень, должно быть положительно.

При решении уравнений с исследованием ОДЗ все эти правила последовательно проговариваются и записываются. Акцентируется внимание учащихся на том, что исследование ОДЗ нужно проводить для исходного уравнения или равносильного ему, а не уравнения-следствия. Данное методическое решение является осознанным выбором для данного онлайн-курса в связи со спецификой целевой аудитории и учебных целей, но не является универсальным правилом для изучения школьного курса математики.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

Создан и опубликован онлайн-курс по математике, изучены результаты.

Первым шагом выяснена целевая аудитория онлайн-курса: учащиеся 11 класса школы без углубленного изучения математики, абитуриенты специальностей, учитывающих результаты профильного ЕГЭ по математике, которые уже освоили простые темы и осознают потребность в дополнительной подготовке к экзамену, в связи с чем самостоятельно ищут возможности дополнительного обучения в сети Интернет.

Вторым шагом проведена предварительная работа по созданию учебного контента: изучены существующие учебные материалы, поставлены учебные цели, спланирована программа онлайн-курса, выбраны средства организации.

Третьим шагом разработано предметное содержание онлайн-курса: написаны сценарии, созданы видеоматериалы, написаны или подобраны задания для самостоятельной работы учащихся.

После публикации онлайн-курса исследованы данные о поведении пользователей, выяснены основные причины затруднений у учащихся.

Сформулированы способы дальнейшего улучшения онлайн-курса:

1. С помощью дальнейшего исследования целевой аудитории выяснить причины отказа от обучения среди тех, кто изначально выразил желание обучаться на онлайн-курсе. Опираясь на полученную информацию, создать и реализовать план по улучшению.

2. Зная о запросе аудитории на индивидуализацию, добавлять дополнительные возможности индивидуализации, например, предоставить учащимся выбор между разными форматами контента (видеоматериалы, текст).

3. Создать и реализовать план по работе с мотивацией учащихся, чтобы увеличить долю выпускников курса от всех учащихся курса.

4. Исследование взаимодействия учащихся с предметным содержанием курса показало, что учащиеся хорошо справляются с задачами с показательными и логарифмическими выражениями, и плохо – с тригонометрическими

выражениями. Требуется добавить дополнительные учебные материалы по тригонометрии; отредактировать имеющийся контент с целью более подробно раскрывать тему; возможно, разработать отдельный подготовительный курс.

5. Добавить в каждый модуль курса больше заданий с целью сбора данных об успеваемости учащихся, чтобы было возможно отследить улучшения отдельных учащихся.

6. Добавить в учебный контент более подробные разъяснения об использовании ОДЗ, о границах применимости метода решения с ОДЗ. Продемонстрировать учащимся типичные ошибки, которые возникают при оформлении решений задач с исследованием ОДЗ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках работы были выполнены все поставленные задачи.

1. Актуализировано понятие онлайн-курса и раскрыты ключевые понятия по теме исследования. Результатом стал тезаурус в приложении А.

2. Систематизированы, описаны и откорректированы авторские наработки по методике организации содержания онлайн-курсов для выпускников к ЕГЭ по математике. Результатом стало описание технологии реализации онлайн-обучения (параграф 1.3), а также демонстрация реализации онлайн-курса согласно описанию технологии (глава 2).

3. Спроектированы дидактические материалы онлайн-курса. Результатом стало предметное содержание онлайн-курса. Пример предметного содержания – контент модуля «Задача 13», представлен в приложении В.

4. Опубликован онлайн-курс в сети Интернет [13].

5. Проведено исследование данных, полученных во время работы онлайн-курса. Исследование описано в параграфе 2.3. Результатом стал список способов улучшения онлайн-курса, приведенный в выводах главы 2.

Целью работы была разработка методических рекомендаций по повышению эффективности процесса подготовки выпускников к ЕГЭ по математике посредством онлайн-курса. Данная работа представляет технологию разработки онлайн-курса и демонстрирует методы повышения эффективности курса. Цель работы достигнута.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 N 2506-р (ред. от 08.10.2020) «Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации» // КонсультантПлюс : [сайт]. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_156618/ (дата обращения: 15.05.2021).
2. Приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 N 1897 (ред. от 11.12.2020) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» // КонсультантПлюс : [сайт]. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_110255/#dst0 (дата обращения: 15.05.2021).
3. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 N 273-ФЗ (ред. от 30.04.2021) // КонсультантПлюс : [сайт]. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/ (дата обращения: 15.05.2021).
4. Приказ Минпросвещения России, Рособрнадзора № 190/1512 от 07.11.2018 г. «Об утверждении Порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования» // ФГБНУ «ФИПИ» : [сайт]. – URL: https://fipi.ru/ege/normativno-pravovye-dokumenty (дата обращения: 15.05.2021).
5. Указ Президента РФ от 09.05.2017 N 203 «О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017 - 2030 годы» // КонсультантПлюс : [сайт]. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_216363/ (дата обращения: 15.05.2021).
6. Данченок, Л. А Основы маркетинга : учебное пособие / Л. А Данченок. — Москва : Евразийский открытый институт, 2008. — 260 с. — ISBN 978-5-374-00131-0.
7. Демоверсии, спецификации, кодификаторы // ФГБНУ «ФИПИ» : [сайт]. – URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 15.05.2021).

8. ЕГЭ 2020. Математика. 4000 задач с ответами. Все задания "Закрытый сегмент" / под ред. И. В. Ященко – М.: Экзамен, 2020 – 704 с. – ISBN: 978-5-377-14920-0.
9. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов экзаменационных заданий. Тематическая рабочая тетрадь / под ред. И. В. Ященко – М.: Экзамен, 2020 – 296 с. – ISBN: 978-5-377-14971-2.
10. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов / под ред. И. В. Ященко – М.: Экзамен, 2020 – 232 с. – ISBN: 978-5-377-15304-7.
11. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. Типовые варианты экзаменационных заданий. 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко – М.: Экзамен, 2020 – 168 с. – ISBN: 978-5-377-14913-2.
12. ЕГЭ 2021. ФИПИ. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий / под ред. И. В. Ященко – М.: Экзамен, 2021 – 168 с. – ISBN: 978-5-377-16148-6.
13. ЕГЭ по математике профиль: онлайн-курс от репетитора : сайт. – URL: https://orange-tutor.ru (дата обращения: 15.05.2021).
14. ЕГЭ-2021 : Математика : 30 тренировочных вариантов экзаменационных работдля подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / под ред. И. В. Ященко. — Москва: АСТ, 2021. — 131, [5] с. — ISBN 978-5-17-132942-6.
15. ЕГЭ. 4000 задач с ответами по математике. Все задания "Закрытый сегмент" / под ред. И. В. Ященко – М.: Экзамен, 2021 – 703 с. – ISBN: 978-5-377-16328-2.
16. Заключение по научной и педагогической экспертизе интернет-сервиса «Яндекс.Учебник» по предмету «Математика» // Яндекс.Учебник : [сайт]. – URL: https://education.yandex.ru/ (дата обращения: 15.05.2021).
17. Информационное общество: основные характеристики субъектов Российской Федерации. 2019 : статистический сборник / М. А. Сабельникова, Г. И. Абдрахманова, Л. М. Гохберг [и др.]. — Росстат; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М.: НИУ ВШЭ, 2019. – 224 с. – 300 экз. – ISBN 978-5-7598-2149-6.
18. Квале С. Исследовательское интервью / Пер. с англ. М.Р. Мироновой. М.: Смысл, 2003 – 301 с. – ISBN: 5-89357-145-2.

19. Математика : большой сборник тематических заданий для подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / под ред. И.В. Ященко. — Москва: АСТ, 2019. —155, [5] с. — ISBN 978-5-17-115729-6.
20. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. / Ю. М. Колягин, В. А. Оганесян, В. Я. Саннинский, Г. Л. Луканкин – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.
21. Мордкович А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 311 с. – ISBN: 978-5-346-03199-4.
22. Открытый банк заданий ЕГЭ // ФГБНУ «ФИПИ» : [сайт]. – URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege (дата обращения: 15.05.2021).
23. Персонализированная модель образования : методическое пособие / Е. И. Казакова, Д. С. Ермаков, П. Н. Кириллов [и др.]. — АНО «Платформа новой школы». — М., 2019. — 36 с.
24. Программа «Цифровая платформа персонализированного образования для школы»: сайт. – Москва, 2020 – . – URL: https://vbudushee.ru/education/programma-tsifrovaya-platforma-personalizirovannogo-obrazovaniya-dlya-shkoly/ (дата обращения 15.05.2021).
25. Федеральный перечень учебников: сайт. – Москва, 2021 – . – URL: https://fpu.edu.ru (дата обращения: 15.05.2021).
26. Шкалирование учебных целей в персонализированной модели образования : методическое пособие / Под ред. Е. И. Казаковой. — АНО «Платформа новой школы». — М.,2019. — 48 с.
27. Ященко, И. В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года по математике / И. В. Ященко, А. В. Семенов, И. Р. Высоцкий – М., 2020 // ФГБНУ «ФИПИ» : [сайт]. – URL: http://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2020/Matematika_mr_2020.pdf (дата обращения: 15.05.2021).

28. Ященко И. В. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2021 году. Профильный уровень / Ященко И. В., Шестаков С. – М.: МЦНМО, 2021 – 240 с. – ISBN: 978-5-4439-1542
29. A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives / eds. L. Anderson, D. Krathwohl. New York : Addison Wesley Longman, 2001. - 168 p.
30. Reclaiming Instructional Design / M. David Merrill, Leston Drake, Mark J. Lacy, Jean Pratt // Educational Technology 1996, 36 (5), 5-7 – URL: https://web.archive.org/web/20120426001242/http://mdavidmerrill.com/Papers/Reclaiming.PDF (дата обращения: 15.05.2021).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Тезаурус

Вебинар (онлайн-семинар) – семинар, во время которого связь между участниками поддерживается через Интернет.

Видеотренажер – интерактивное упражнение, симулирующее реальную ситуацию с помощью интерактивного видео.

Виджет – программа, выполняющая одну конкретную функцию; с помощью виджета можно реализовать интерактивное упражнение или визуализировать информацию.

Диалоговый тренажер – интерактивное упражнение, симулирующее общение с человеком.

Дистанционное обучение – обучение, осуществляемое без непосредственного личного контакта учителя и учащегося, на расстоянии. Может быть, как с использованием сети Интернет, так и без такового.

Доходимость – доля учеников, дошедших до каждого следующего этапа онлайн-курса.

ЕГЭ – Единый Государственный Экзамен.

Игрофикация – применение подходов, характерных для компьютерных игр.

Инфографика – визуализация информации.

Прокторинг – процедура контроля на онлайн-экзамене.

Симуляция – имитация процесса при помощи искусственной системы.

Скрайбинг – способ донесения информации через иллюстрирование ключевых понятий; голосовое повествование параллельно сопровождается созданием иллюстраций.

Скринкаст – видеозапись информации, выводимой на экран компьютера.

Смешанное обучение – обучение, предполагающее сочетание очного и дистанционного форматов; часть учебной программы осваивается дистанционно, часть – при непосредственном личном контакте учителя и учащегося.

Онлайн-курс – способ реализации конкретной учебной программы посредством онлайн-обучения.

Онлайн-обучение – обучение, осуществляемое исключительно посредством сети Интернет, не предполагающее непосредственного личного контакта учителя и учащегося. Онлайн-обучение является частным случаем дистанционного обучения.

Очное обучение – обучение, осуществляемое при непосредственном личном контакте учителя и учащегося в специально созданных для этого условиях.

Цифровой след – информация, оставленная пользователем Интернет в результате взаимодействия с сайтом.

Чат-бот – компьютерная программа, которая интерактивно имитирует человеческую речь.

VR/AR – виртуальная/дополненная реальность, созданный техническими средствами мир, передаваемый человеку через его ощущения, используется для симуляции процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Анкета «Отношение педагогических работников к дистанционному обучению»

1. Кем вы работаете? Варианты ответа: учитель, репетитор, административная должность в школе, другое.
2. Какой предмет преподаёте?
3. Ваш преподавательский стаж? Варианты ответа: до 1 года, от 1 до 3 лет, от 3 до 10 лет, больше 10 лет.
4. Ваш населённый пункт? Варианты ответа: Москва и область; Санкт-Петербург и область; крупный город с населением от 1 млн; региональный центр с населением до 1 млн; город в регионе; посёлок, деревня, пгт и аналогичное; другое.
5. Вы проводили дистанционные занятия в реальном времени? Например, используя видеосвязь.

   Если да, какие инструменты вы использовали?

   Какие есть преимущества у онлайн-уроков?

   Какие есть недостатки у онлайн-уроков?
6. Вы использовали сайты, на которых можно раздать ученикам тестовые задания?

   Если да, какие сайты вы использовали?

   Какие есть преимущества у выбранных сайтов?

   Какие есть недостатки у выбранных сайтов?
7. Какие инструменты вы использовали для обмена файлами с учениками?
8. Какими ещё сайтами вы пользуетесь для работы? Назовите название и функционал, который вам полезен.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Учебный контент модуля «Задача 13»

Материалы учебного модуля «Задача 13».

Урок 2.1. Замена переменной

Шаг 2.1.1. Текст введения для модуля

Задание номер 13 требует не только ответа, но и записи решения. Чаще всего задание состоит из двух пунктов, где под (а) нужно решить уравнение и получить семейство корней, а под (б) нужно из семейства выбрать те корни уравнения, которые попадают в некий промежуток.

Предполагается, что вы уже умеете решать простые уравнения первой части ЕГЭ.

Шаг 2.1.2. Текст введения:

Замена переменной – мощный метод, который пригодится в задачах 13 (уравнение), 15 (неравенство) и 18 (уравнение или неравенство, содержащее параметр). В следующих пяти видео я расскажу, как применить метод для самых разных уравнений: Часть 1: Рациональное уравнение. Часть 2: Иррациональное уравнение. Часть 3: Показательное уравнение. Часть 4: Уравнение содержащее неизвестную под знаком логарифма. Часть 5: Тригонометрические уравнения.

Это самый длинный видеоурок по 13 задаче, потому что содержит много примеров. Важно научиться находить замену в самых разных задачах.

Суммарная длительность видео 55 минут. В настройках видео можно увеличить скорость воспроизведения.

После каждого видео идёт задача, аналогичная разобранной, для вашей самопроверки. Можете попробовать решать задачи до просмотра. Если получается, то видео на эту тему можно пропускать.

Шаг 2.1.3. Видео (примерный конспект).

Метод замены позволяет избавиться от функций, с которыми неудобно работать, и перейти к более простым уравнениям. Заменяем одинаковые выражения, в которые входят переменная (неизвестная), новой переменной, и переписываем исходное уравнение с новой переменной. Решив полученное уравнение, надо вернуться к исходной переменной. Важно так подобрать замену, чтобы после замены переменная x полностью исчезла из условия. Замену лучше делать чем раньше, тем лучше. Замена позволяет свести сложное уравнение к уравнению, решение которого имеет известный алгоритм, например, к квадратному, линейному.

Пример 1. Разберём пример рационального уравнения.

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$

Заметим, что $x^4 = (x^2)^2$, а значит, $(x^2)^2 - 10x^2 + 9 = 0.$

Пусть $t = x^2 \geq 0$, тогда $x^4 = (x^2)^2 = t^2$. Переписываем уравнение с учётом замены:

$t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 9.$

Возвращаемся к исходной переменной:

$\left[\begin{matrix} t=1 \\ t=9 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x^2=1 \\ x^2=9 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=\pm 1 \\ x=\pm 3 \end{matrix}\right. .$

Пример 2. Решим рациональное уравнение.

$$\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{4}{x+3} - 5 = 0.$$

Уравнение определено в том случае, если знаменатель $x + 3$ отличен от нуля.

Пусть $t = \frac{1}{x+3}$, тогда $t^2 = \frac{1}{(x+3)^2}$, $4t = \frac{4}{x+3}$. Переписываем уравнение с учётом замены:

$t^2 + 4t - 5 = 0 \Rightarrow t_1 = -5, t_2 = 1.$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{matrix} t_1 = -5 \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \frac{1}{x+3} = -5 \\ \frac{1}{x+3} = 1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x + 3 = -\frac{1}{5} \\ x + 3 = 1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = -3\frac{1}{5} \\ x = -2 \end{matrix}\right. .$$

Шаг 2.1.4. Задание с автоматической проверкой ответа:

Решите уравнение $x^4 - 21x^2 = 100$. В ответ запишите сумму корней уравнения.

Ответ: 0.

Шаг 2.1.5. Задание с автоматической проверкой ответа:

Решите уравнение $\frac{1}{(5-x)^2}+\frac{7}{(5-x)}-8=0$. В ответ запишите сумму корней уравнения.

Ответ: 9,125.

Шаг 2.1.6. Видео (примерный конспект).

В иррациональных уравнениях выгодно вводить новую переменную, обозначая значение корня.

Пример 1. Разберём пример, в котором требуется найти корни уравнения:

$x-9\sqrt{x}=-14$.

Подкоренное уравнение выражение должно быть неотрицательным, то есть $x \geq 0$.

Заметим, что $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$, а значит $\left(\sqrt{x}\right)^2-9\sqrt{x}=-14$.

Пусть $t=\sqrt{x} \geq 0$, тогда $x=\left(\sqrt{x}\right)^2=t^2$. Получаем уравнение:

$$t^2-9t+14=0$$

$$D=9^2-4\cdot 14=25$$

$t=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow t_1=2,\ t_2=7$.

Возвращаемся к переменной x и получаем решения уравнения:

$\left[\begin{matrix} t=2 \\ t=7 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=7 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=4 \\ x=49 \end{matrix}\right.$.

Пример 2.

$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}=3$.

Выберем замену. Если ввести замену $t=\sqrt{x-1} \geq 0$, то в условии останутся переменные x. Чтобы этого не произошло, нужно выразить исходную переменную x через новую t:

$t=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow t^2=x-1 \Leftrightarrow x=t^2+1$ (на ОДЗ $x \geq 1$).

Замена: $t=\sqrt{x-1} \geq 0$. Переписываем уравнение с учётом замены:

$\sqrt{(t^2+1)-2t}+\sqrt{(t^2+1)+3+4t}=3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2+4t+4}=3 \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2}+\sqrt{(t+2)^2}=3 \Leftrightarrow |t-1|+|t+2|=3$.

Содержимое второго модуля всегда положительно, так как $t \geq 0$. Раскрываем первый модуль на промежутках:

1) $0 \leq t < 1$:

$1 - t + t + 2 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$ верно при всех t;

$\sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$;

2) $t \geq 1$:

$t - 1 + t + 2 = 3 \Leftrightarrow 2t = 2 \Leftrightarrow t = 1$

$\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: $1 \leq x \leq 2$.

Шаг 2.1.7. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $x - 8\sqrt{x} = 9$. В ответ запишите сумму корней уравнения.

Ответ: 81.

Шаг 2.1.8. Видео (примерный конспект).

Замена позволяет избавиться от показательной функции и перейти к рациональному уравнению.

Пример 1.

$$25^x - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$$

Заметим, что $25^x = (5^2)^x = (5^x)^2$, а значит $(5^x)^2 - 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Пусть $t = 5^x$, тогда $t^2 = (5^x)^2$. Переписываем уравнение с учётом замены:

$t^2 - 4t - 5 = 0$ квадратное уравнение, ответ $t_1 = -1$, $t_2 = 5$.

Вернёмся к переменной x:

$\left[\begin{matrix} t=-1 \\ t=5 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 5^x=-1 \\ 5^x=5 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \text{нет решений} \\ x=1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow x = 1.$

Пример 2.

$2 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} - 9 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^{x+1} = 0$

В этом уравнении замена не очевидна, однако можно заметить, что в степени возводятся числа 2, 4, 9, 6, которые являются произведениями двоек и троек ($4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $6 = 2 \cdot 3$). Сделаем несколько подготовительных преобразований:

$2 \cdot 2^{2x-1} - 9 \cdot (2 \cdot 3)^x + 2 \cdot 3^{2x+2} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 9 \cdot 3^{2x} = 0.$

Теперь в условии присутствуют числа 2 и 3 в неизвестных степенях, и можно сделать двойную замену $t = 2^x$, $s = 3^x$, но это не самый простой путь, так как придётся работать с двумя переменными.

Так как $3^{2x} > 0$, то можно разделить обе части равенства на одно и тоже число, отличное от нуля, на 3^{2x}. Получим:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 18 = 0$$

Пусть $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, получаем квадратное уравнение: $t^2 - 9t + 18 = 0$, ответ $t_1 = 3$, $t_2 = 6$. Вернёмся к переменной х:

$$\left[\begin{aligned} &\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3; \\ &\left(\frac{2}{3}\right)^x = 6 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \log_{\frac{2}{3}} 3; \\ &x = \log_{\frac{2}{3}} 6. \end{aligned}\right.$$

Шаг 2.1.9. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $49^x - 5 \cdot 7^x - 14 = 0$. В ответ запишите сумму корней уравнения.

Ответ: 1.

Шаг 2.1.10. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $2 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} - 4 \cdot 10^x + 75 \cdot 25^{x-1} = 0$. Укажите наибольший корень уравнения.

Ответ: 0.

Шаг 2.1.11. Видео (примерный конспект).

Замена позволяет избавиться от логарифмической функции и перейти к рациональному уравнению.

Пример:

$$6\log_{27}^2 x - \log_{27} x + 1 = 0$$

Пусть $t = \log_{27} x$, тогда $t^2 = \log_{27}^2 x$. Получаем квадратное уравнение: $6t^2 - t + 1 = 0$, ответ $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Вернёмся к переменной х:

$$\left[\begin{aligned} &\log_{27} x = -\frac{1}{3} \\ &\log_{27} x = \frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{1}{3}; \\ &x = 3\sqrt{3} \end{aligned}\right.$$

Шаг 2.1.12. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $6log_8^2x + log_8x - 1 = 0$. Укажите наибольший корень уравнения.

Ответ: 2.

Шаг 2.1.13. Видео (примерный конспект).

Замена позволяет избавиться от тригонометрической функции и перейти к рациональному уравнению.

Пример 1.

$6cos^2x + 11cosx - 7 = 0$

Пусть $t = cosx, -1 \leq t \leq 1$, тогда $t^2 = cos^2x$.

$6t^2 + 11t - 7 = 0$ стандартное квадратное уравнение, ответ $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -\frac{7}{3}$. Значение t_2 не соответствует условию $-1 \leq t \leq 1$.

Вернёмся к переменной x:

$cosx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Пример 2.

$2sin^2x + 3cosx - 3 = 0$

В условии присутствуют разные тригонометрические функции (синус и косинус), поэтому нельзя сразу сделать замену, избавившись от обеих функций. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, чтобы оставить в условии только косинус:

$$2(1 - cos^2x) + 3cosx - 3 = 0$$

Пусть $t = cosx, -1 \leq t \leq 1$, тогда $t^2 = cos^2x$.

$$2(1 - t^2) + 3t - 3 = 0$$

Приведём квадратное уравнение к стандартному виду и решим:

$2t^2 - 3t + 1 = 0$, ответ $t_1 = \frac{1}{2}$,$t_2 = 1$.

Вернёмся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} cosx = \frac{1}{2} \\ cosx = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z; \\ x = 2\pi k. \end{array}\right.$$

Пример 3.

$2cos2x - 8sinx - 5 = 0$

В условии присутствуют тригонометрические функции от разных углов (x и 2x), поэтому нужно воспользоваться формулой двойного угла. Для косинуса двойного угла существуют три формы его выражения через половинный угол: $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1$.

Выберем формулу, в которой фигурирует только синус, чтобы в уравнении можно было сделать замену:

$$2(1 - 2sin^2x) - 8sinx - 5 = 0$$

Пусть $t = sinx, -1 \leq t \leq 1$, тогда $t^2 = sin^2x$.

$$2(1 - 2t^2) - 8t - 5 = 0$$

Приведём квадратное уравнение к стандартному виду и решим:

$4t^2 + 8t + 3 = 0$, ответ $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = -\frac{3}{2}$.

Значение t_2 не соответствует условию $-1 \leq t \leq 1$.

Вернёмся к переменной x:

$$sinx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z; \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k. \end{array}\right.$$

Шаг 2.1.14. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $10cos^2x - 9cosx - 7 = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 4.

Шаг 2.1.15. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $2cos^2x + 3sinx - 3 = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 1.

Шаг 2.1.16. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $cos2x - 3sinx - 2 = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 7.

Урок 2.2. Разложение на множители

Шаг 2.2.1. Текст введения

Разложение на множители – это один из стандартных приёмов, который дальше мы будем применять очень часто. Например, без разложения на множители невозможно решить задачу 15 (неравенство). Разберём два метода:

Часть 1: Вынесение за скобки. Часть 2: Группировка

Суммарная длительность видео 26 минут. В настройках видео можно увеличить скорость воспроизведения.

После каждого видео идёт задача, аналогичная разобранной, для вашей самопроверки. Можете попробовать решать задачи до просмотра. Если получается, то видео на эту тему можно пропускать.

Шаг 2.2.2. Видео (примерный конспект).

При решении уравнений вида $Q(x) = 0$, здесь $Q(x)$ – многочлен, можно попытаться разложить многочлен на множители. Получится уравнение вида $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \cdots \cdot P_K(x) = 0$, где $P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \cdots \cdot P_K(x) = Q(x)$ и которое имеет решение, если хотя бы один из множителей равен нулю (а другие множители существуют). Есть несколько способов разложить многочлен на множители. Один из них – вынесение общего множителя за скобки по формуле $ca + cb = c(a + b)$.

Пример 1.

$x^2 + x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{smallmatrix} x=0 \\ x+1=0 \end{smallmatrix}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=-1 \end{smallmatrix}\right.$.

Пример 2.

$$sin2x - \sqrt{2}sinx = 0$$

В условии присутствуют тригонометрические функции от разных углов (x и $2x$), поэтому нужно воспользоваться формулой двойного угла:

$$sin2x = 2sinxcosx.$$

Тогда $2sinxcosx-\sqrt{2}sinx=0 \Leftrightarrow sinx(2cosx-\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{c} sinx=0 \\ 2cosx-\sqrt{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx=0 \\ cosx=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, k \in Z; \\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k. \end{array}\right.$

Пример 3.

$$sin2x-2sin^2x=0.$$

В условии присутствуют тригонометрические функции от разных углов (x и $2x$), поэтому нужно воспользоваться формулой двойного угла:

$$sin2x=2sinxcosx$$

Тогда $2sinxcosx-2sin^2x=0 \Leftrightarrow 2sinx(cosx-sinx)=0 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{c} 2sinx=0 \\ cosx-sinx=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx=0 \\ tgx=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, k \in Z; \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k. \end{array}\right.$

Шаг 2.2.3. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $sin2x-\sqrt{3}cosx=0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 2.

Шаг 2.2.4. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $sin2x+2cos^2x=0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 3.

Шаг 2.2.5. Видео (примерный конспект).

Способ группировки заключается в следующем: в многочлене надо объединить (сгруппировать) те члены, у которых есть общий множитель, и вынести этот множитель за скобки; если после этого внутри скобок останутся одинаковые многочлены, то вынести за скобки и их.

Пример 1.

$x^3-2x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-9(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\pm 3 \end{array}\right..$

Пример 2.

$2sin^3x - sin^2x + 4sinx - 2 = 0 \Leftrightarrow sin^2x(2sinx - 1) + 2(2sinx - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $(2sinx - 1)(sin^2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 2sinx - 1 = 0 \\ sin^2x + 2 = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} sinx = \frac{1}{2}; \\ sin^2x = -2. \end{matrix}\right.$

Уравнение $sin^2x = -2$ не имеет решений, так как $sin^2x \geq 0$.

$sinx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{matrix}\right.$

Пример 3.

$$cos^2x + \frac{1}{2}sin2x = cosx + sinx.$$

В условии присутствуют тригонометрические функции от разных углов (x и $2x$), поэтому нужно воспользоваться формулой двойного угла:

$sin2x = 2sinxcosx$.

Тогда: $cos^2x + \frac{1}{2}(2sinxcosx) = cosx + sinx \Leftrightarrow cos^2x + sinxcosx - cosx - sinx = 0 \Leftrightarrow cosx(cosx + sinx) - (cosx + sinx) = 0 \Leftrightarrow (cosx - 1)(cosx + sinx) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} cosx - 1 = 0 \\ cosx + sinx = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} cosx = 1 \\ tgx = -1 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = 2\pi k, k \in Z; \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k. \end{matrix}\right.$

Пример 4.

$27^x - 2 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 18 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^3 - 2 \cdot (3^x)^2 - 9 \cdot 3^x + 18 = 0.$

Воспользуемся заменой. Пусть $t = 3^x > 0$, тогда уравнение принимает вид:

$t^3 - 2t^2 - 9t + 18 = 0 \Leftrightarrow t^2(t - 2) - 9(t - 2) = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{matrix} t - 2 = 0 \\ t^2 - 9 = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t = 2; \\ t = -3; \\ t = 3. \end{matrix}\right.$

Ответ $t = -3$ не удовлетворяет условию $t > 0$. Сделаем обратную замену:

$\left[\begin{matrix} 3^x = 2 \\ 3^x = 3 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x = \log_3 2; \\ x = 1. \end{matrix}\right.$

Шаг 2.2.6. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $cos^3x - cos^2x + cosx - 1 = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 12.

Шаг 2.2.7. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $sin2x + cosx = 2sin^2x + sinx$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 1,5.

Шаг 2.2.7. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $27^x - 4 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 36 = 0$. Укажите наименьший корень уравнения.

Ответ: 1.

Урок 2.3. Равенство логарифмов.

Шаг 2.3.1. Текст введения

Равенство логарифмов – разновидность уравнений из ЕГЭ, встречается и в первой, и во второй части. Чтобы справиться с этой задачей, нужно знать свойства логарифмов.

В этом уроке всего одно видео на 10 минут. В настройках видео можно увеличить скорость воспроизведения.

После каждого видео идёт задача, аналогичная разобранной, для вашей самопроверки. Можете попробовать решать задачи до просмотра. Если получается, то видео на эту тему можно пропускать.

Шаг 2.3.2. Видео

Далее – примерный конспект.

$\log_a x = \log_a y \ \Rightarrow\ x = y$ при условии $x > 0, y > 0$.

Если в уравнении присутствуют логарифмы по разным основаниям, то стоит попытаться по формулам привести их к одинаковым основаниям. Пример:

$$\log_7(4x^2 + 1) + 1 = \log_{\sqrt{7}} \sqrt{9x^4 + 10}$$

Условие существования уравнения – система требований: $\begin{cases} 4x^2 + 1 > 0; \\ \sqrt{9x^4 + 10} > 0. \end{cases}$

Поскольку каждое неравенство системы определено для всех вещественных значений переменной, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

$\log_7(4x^2+1)+1=\log_{\sqrt{7}}\sqrt{9x^4+10} \Leftrightarrow \log_7(4x^2+1)+\log_7 7=\log_7(9x^4+10) \Leftrightarrow \log_7 7(4x^2+1)=\log_7(9x^4+10) \Leftrightarrow 7(4x^2+1)=9x^4+10 \Leftrightarrow 9x^4-28x^2+3=0$

Пусть $t=x^2\geq 0$, получим квадратное уравнение $9t^2-28t+3=0 \Leftrightarrow t_1=3, t_2=\frac{1}{9}$. Вернёмся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2=3 \\ x^2=\frac{1}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm\frac{1}{3} \end{array}\right..$$

Шаг 2.3.3. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $\log_9(14x^2+1)+1=\log_3\sqrt{25x^4+14}$. Укажите наименьший положительный корень уравнения.

Ответ: 0,2.

Урок 2.4. Исследование ОДЗ

Шаг 2.4.1. Текст введения

ОДЗ расшифровывается как «область допустимых значений», и имеется в виду «область допустимых значений переменной икс». ОДЗ даёт ограничения на икс, которые задумали составители задачи. Например, если автор задачи пишет выражение $\sqrt{x}$, то он имеет в виду, что икс неотрицателен.

Правильнее было бы называть это явление «областью определения уравнения» (ООУ), но все привыкли к термину ОДЗ.

В видеоуроке я перечислю все возможные ограничения на ОДЗ. Они бывают двух видов: Часть 1: Выколотые точки. Часть 2: Промежутки.

Суммарная длительность видео 31 минута. В настройках видео можно увеличить скорость воспроизведения.

После каждого видео идёт задача, аналогичная разобранной, для вашей самопроверки. Можете попробовать решать задачи до просмотра. Если получается, то видео на эту тему можно пропускать.

Шаг 2.4.2. Видео (примерный конспект).

Существуют следующие условия на ОДЗ (область допустимых значений):

7) Нельзя делить на ноль,

8) Нельзя извлекать корень из отрицательных чисел,

9) Тангенс должен существовать (тангенс – это отношение синуса к косинусу, значит, косинус не равен нулю), аналогично котангенс должен существовать (котангенс – это отношение косинуса к синусу, значит, синус не равен нулю),

10) В логарифме основание должно быть положительно и не равняться единице,

11) логарифмируемое выражение должно быть положительно.

12) выражение, которое возводят в вещественную степень, должно быть положительно.

Пример 1.

$$\frac{cos2x+\sqrt{3}cosx+1}{3tgx-\sqrt{3}}=0$$

Условия на ОДЗ: знаменатель не равен нулю, тангенс существует (тангенс – это отношение синуса к косинусу, значит, косинус не может быть равен нулю).

$$\begin{cases}3tgx-\sqrt{3}\neq 0\\ cosx\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}tgx\neq\frac{\sqrt{3}}{3}\\ cosx\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z\\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

Решим уравнение. Дробь должна быть равна нулю, значит, числитель равен нулю.

$cos2x+\sqrt{3}cosx+1=0 \Leftrightarrow 2cos^2x-1+\sqrt{3}cosx+1=0 \Leftrightarrow 2cos^2x+\sqrt{3}cosx=0 \Leftrightarrow cosx\left(2cosx+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}cosx=0\\ 2cosx+\sqrt{3}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}cosx=0 \text{ (не удовлетворяет ОДЗ)}\\ cosx=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k.$

Проверим, удовлетворяют ли ответы ОДЗ.

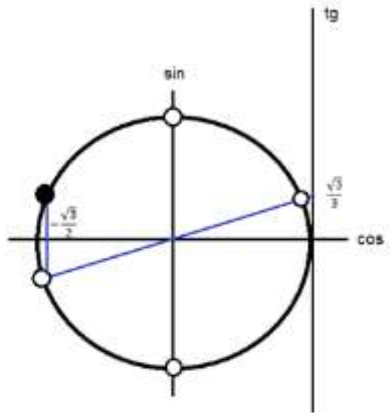

Рисунок 8 - Рисунок к решению задачи шага 2.4.2. (пример 1)

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

Пример 2.

$$\frac{5sinx + 3}{4tgx - 3} = 0$$

Условия на ОДЗ: знаменатель не равен нулю, тангенс существует (тангенс – это отношение синуса к косинусу, значит, косинус не может быть равен нулю).

$$\begin{cases} 4tgx - 3 \neq 0 \\ cosx \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tgx \neq \frac{3}{4} \\ cosx \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq arctg\frac{3}{4} + \pi k, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

Решим уравнение. Дробь должна быть равна нулю, значит, числитель равен нулю.

$$5sinx + 3 = 0 \Leftrightarrow sinx = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$$

Проверим, удовлетворяют ли ответы ОДЗ. С помощью пробного треугольника выясним, что если $|tg\alpha| = \frac{3}{4}$, то $|sin\alpha| = \frac{3}{5}$.

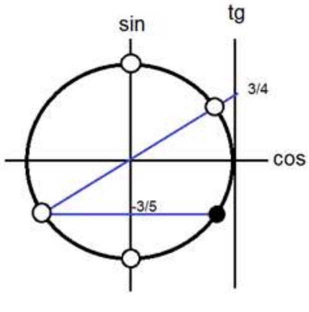

Рисунок 9 - Рисунок к решению задачи шаг 2.4.2 (пример 2)

Ответ: $x = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi k, k \in Z$

Шаг 2.4.3. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $\frac{13cosx+12}{12tgx-5} = 0$. Чему равно $13sinx$?

Ответ: 5.

Шаг 2.4.4. Видео (примерный конспект).

Пример 1.

$$\frac{2cos^2x - \sqrt{3}sinx - 2}{\sqrt{tgx}} = 0$$

Условие на ОДЗ: знаменатель не может быть равен нулю, под корнем должно быть неотрицательное выражение. Объединив эти условия, получим, что подкоренное выражение должно быть строго положительным. А также тангенс должен существовать (тангенс – это отношение синуса к косинусу, значит, косинус не может быть равен нулю).

$$\begin{cases} tgx > 0 \\ cosx \neq 0 \end{cases}$$

Изобразим ОДЗ на тригонометрическом круге:

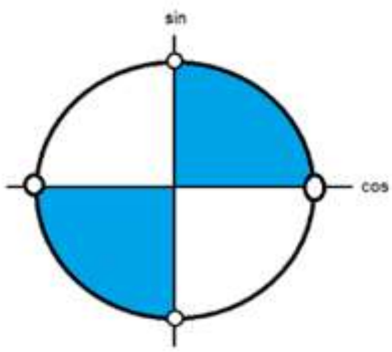

Рисунок 10 - Рисунок к решению задачи шага 2.4.4 (пример 1)

Решим уравнение. Дробь должна быть равна нулю, значит, числитель равен нулю. $2cos^2x - \sqrt{3}sinx - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - sin^2x) - \sqrt{3}sinx - 2 = 0 \Leftrightarrow -2sin^2 - \sqrt{3}sinx = 0 \Leftrightarrow -sinx(2sinx + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -sinx = 0 \\ 2sinx + \sqrt{3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx = 0 \\ sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Проверим, удовлетворяют ли ответы ОДЗ:

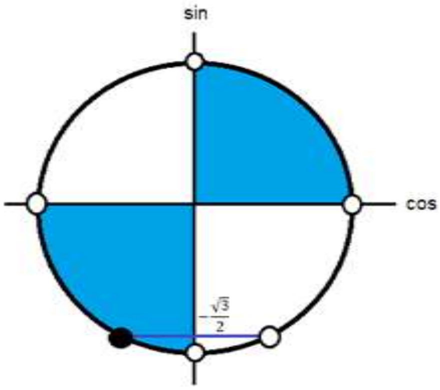

Рисунок 11 - Рисунок к решению задачи шага 2.4.4 (пример 1)

Ответ: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

Пример 2.

$$(sinx - 1)\left(3tgx + \sqrt{3}\right)\sqrt{sinx} = 0$$

Условие на ОДЗ: под корнем должно быть неотрицательное выражение, тангенс должен существовать (тангенс – это отношение синуса к косинусу, значит, косинус не может быть равен нулю).

$$\begin{cases} sinx \geq 0 \\ cosx \neq 0 \end{cases}$$

Изобразим ОДЗ на тригонометрическом круге:

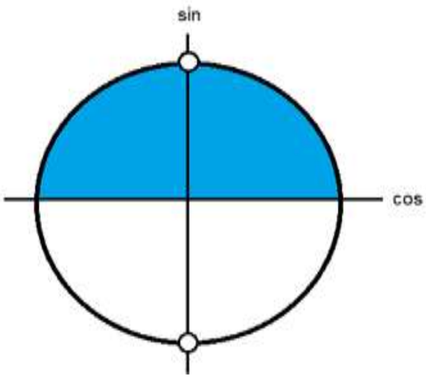

Рисунок 12 - Рисунок к решению задачи шага 2.4.4 (пример 2)

Решим уравнение. Произведение равно нулю, значит, каждый из множителей может быть равен нулю.

$$\left[\begin{array}{c} sinx - 1 = 0 \\ 3tgx + \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{sinx} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} sinx = 1 \\ tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ sinx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \pi k \end{array}\right.$$

Проверим, удовлетворяют ли ответы ОДЗ:

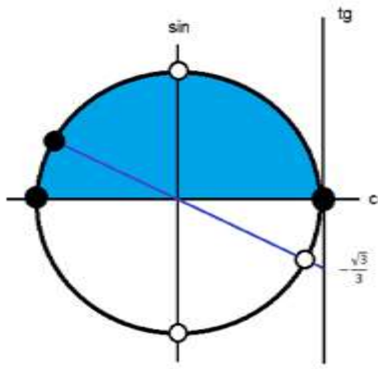

Рисунок 13 - Рисунок к решению задачи шага 2.4.4 (пример 2)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi k \end{array}\right.$

Пример 3.

$$\frac{2sin^2x - 11sinx + 5}{\sqrt{x - \frac{\pi}{6}}} = 0$$

Условия на ОДЗ: знаменатель не может быть равен нулю, под корнем должно быть неотрицательное выражение. Объединив эти условия, получим, что подкоренное выражение должно быть строго положительным: $x - \frac{\pi}{6} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{6}$.

Решим уравнение. Дробь должна быть равна нулю, значит, числитель равен нулю.

$2sin^2x - 11sinx + 5 = 0$

Пусть $t = sinx$, $-1 \le t \le 1$. Сделав замену, получим квадратное уравнение:

$2t^2 - 11t + 5 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 5, t_2 = \frac{1}{2}$.

Значение $t = 5$ не удовлетворяет условию $t \le 1$.

Вернёмся к переменной x:

$sinx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$

В полученных двух семействах решений есть как положительные, так и отрицательные решения. Но ОДЗ накладывает условие $x > \frac{\pi}{6}$.

Рассмотрим первое семейство: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2\pi k > 0 \Leftrightarrow k > 0$. Значит, k может быть только натуральным числом (целым положительным).

Рассмотрим второе семейство, причём будем использовать вместо k новую букву: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2\pi l > -\frac{2}{3}\pi \Leftrightarrow l > -\frac{1}{3}$. Значит, l может быть любым целым неотрицательным числом, включая ноль.

Для красоты записи ответа можно использовать не $\frac{5\pi}{6}$, а предыдущий ответ в данном семействе, это $\frac{5\pi}{6} - 2\pi = -\frac{7}{6}\pi$, и тогда $l \neq 0$, ограничения на k и l совпадут, можно использовать одну букву для обоих семейств.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in N \\ x = -\frac{7}{6}\pi + 2\pi n \end{array}\right.$

Шаг 2.4.5. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $\frac{6cos^2x+11sinx-10}{\sqrt{-ctgx}} = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 5.

Шаг 2.4.6. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $(sinx - 1)(tgx - \sqrt{3})\sqrt{cosx} = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 2.

Шаг 2.4.7. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $\frac{cos2x-\sqrt{3}sinx-1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}} = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 6.

Шаг 2.4.8. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $\sqrt{sin2xcos2x}\left(\frac{1}{tgx} + 1\right) = 0$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 1,5.

Урок 2.5. Смешанные уравнения

Шаг 2.5.1. Текст введения

Иногда авторы экзамена объединяют в одной задаче и тригонометрию, и логарифмы. Задания получаются простые, но выглядят угрожающе. Разберу несколько таких примеров.

Длительность видео 9 минут. В настройках видео можно увеличить скорость воспроизведения.

После каждого видео идёт задача, аналогичная разобранной, для вашей самопроверки. Можете попробовать решать задачи до просмотра. Если получается, то видео на эту тему можно пропускать.

Шаг 2.5.2. Видео (примерный конспект).

Пример 1.

$14^{\cos x} = 2^{cosx} \cdot 7^{sinx} \Leftrightarrow (2 \cdot 7)^{cosx} = 2^{cosx} \cdot 7^{sinx} \Leftrightarrow 2^{cosx} \cdot 7^{cosx} = 2^{cosx} \cdot 7^{sinx}$

Очевидно, что $2^{cosx} > 0$. Значит, можно разделить обе части уравнения на 2^{cosx} без потери ОДЗ.

$7^{cosx} = 7^{sinx} \Leftrightarrow cosx = sinx \Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Пример 2.

$\left(\frac{1}{49}\right)^{sinx} = 7^{2sin2x} \Leftrightarrow (7^{-2})^{sinx} = 7^{2sin2x} \Leftrightarrow 7^{-2sinx} = 7^{2sin2x} \Leftrightarrow -2sinx = 2sin2x \Leftrightarrow -sinx = sin2x \Leftrightarrow -sinx = 2sinxcosx \Leftrightarrow 2sinxcosx + sinx = 0 \Leftrightarrow sinx(2cosx + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx = 0 \\ 2cosx + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx = 0 \\ cosx = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$

Пример 3.

$\log_3(sin2x - sinx + 9) = 2 \Leftrightarrow sin2x - sinx + 9 = 3^2 \Leftrightarrow 2sinxcosx - sinx + 9 = 9 \Leftrightarrow 2sinxcosx - sinx = 0 \Leftrightarrow sinx(2cosx - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx = 0 \\ 2cosx - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} sinx = 0 \\ cosx = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{array}\right.$

Шаг 2.5.3. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $21^{cosx} = 3^{cosx}7^{sinx}$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 1,5.

Шаг 2.5.4. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $\left(\frac{1}{64}\right)^{cosx} = 8^{2sin2x}$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 3.

Шаг 2.5.5. Задание с автоматической проверкой ответа

Решите уравнение $\log_2(cosx - sin2x + 8) = 3$. В ответе укажите отношение наименьшего положительного корня и числа $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 1.

Урок 2.6. Отбор корней

Шаг 2.6.1. Текст введения

Задача 13 состоит из двух пунктов – (а) и (б). В пункте (б) нужно сделать отбор корней. Это можно сделать множеством способов, а я расскажу три способа. Посмотрите, выберите для себя самый приятный, и пользуйтесь им.

Суммарная длительность видео 22 минуты. В настройках видео можно увеличить скорость воспроизведения.

После каждого видео идёт задача, аналогичная разобранной, для вашей самопроверки. Можете попробовать решать задачи до просмотра. Если получается, то видео на эту тему можно пропускать.

Шаг 2.6.2. Видео (примерный конспект)

При решении тригонометрических уравнений в ответе зачастую получаем семейство решений, в которое входит бесконечное количество решений. Иногда требуется выбрать из этого семейства решения, принадлежащие определённому промежутку. Рассмотрим некоторые методы, позволяющие это сделать.

Пример. Из решений уравнения $tgx = 1$ выбрать те, которые принадлежат промежутку $[-\pi;\ 2\pi]$.

Ответом является семейство $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

1 способ.

Можно подставлять различные целые значения k и каждый раз получать ответы. Подставим несколько значений k и выберем те ответы, которые попадут в промежуток $[-\pi;\ 2\pi]$.

Если $k = 0$, то $x = \frac{\pi}{4}$, этот ответ подходит.

Рассмотрим отрицательные k. Если $k = -1$, то $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$, этот ответ подходит. Если $k = -2$, то $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -1\frac{3}{4}\pi$, этот ответ не подходит. Если продолжать уменьшать k, то будет уменьшаться и x. Поэтому при отрицательных k больше подходящих ответов нет.

Теперь рассмотрим положительные k. Если $k = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi = 1\frac{1}{4}\pi$, этот ответ подходит. Если $k = 2$, то $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = 2\frac{1}{4}\pi$, этот ответ не подходит. Если продолжать увеличивать k, то будет увеличиваться и x. Поэтому при положительных k больше подходящих ответов нет.

Ответ: $x = -\frac{3}{4}\pi; \frac{\pi}{4}; 1\frac{1}{4}\pi$.

2 способ.

Отметить решения на числовой прямой.

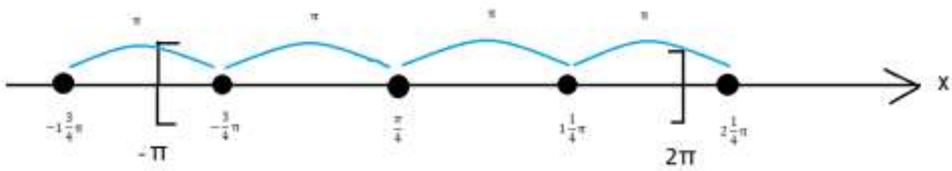

Рисунок 14 - Рисунок к решению задачи шага 2.6.2 (способ 2)

3 способ.

Использовать двойное неравенство, чтобы выяснить возможные значения k:

$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{4} + k \leq 2 \Leftrightarrow -1\frac{1}{4} \leq k \leq 1\frac{3}{4}$ => $k \in \{-1,0,1\}$ => $x \in \{-\frac{3}{4}\pi; \frac{\pi}{4}; 1\frac{1}{4}\pi\}$.

Шаг 2.6.3. Видео (примерный конспект)

Пример. Из решений уравнения $sinx = \frac{1}{2}$ выбрать те, которые принадлежат промежутку $[-3\pi;\ -\pi]$.

Ответом являются два семейства $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$.

1 способ.

Рассмотрим первое семейство. При положительных k значения x будут тоже положительны, а нужный промежуток содержит отрицательные ответы, поэтому будем перебирать только неположительные k. Если $k = 0$, то $x = \frac{\pi}{6}$ не подходит. Если $k = -1$, то $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -1\frac{5}{6}\pi$ подходит. Если $k = -2$, то $x = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -3\frac{5}{6}\pi$ не подходит. Если продолжать уменьшать k, то будет уменьшаться и x. Поэтому при отрицательных k больше подходящих ответов нет.

Рассмотрим второе семейство. При положительных k значения x будут тоже положительны, а нужный промежуток содержит отрицательные ответы, поэтому будем перебирать только неположительные k. Если $k = 0$, то $x = \frac{5\pi}{6}$ не подходит. Если $k = -1$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = -1\frac{1}{6}\pi$ подходит. Если $k = -2$, то $x = \frac{5\pi}{6} - 4\pi = -3\frac{1}{6}\pi$ не подходит. Если продолжать уменьшать k, то будет уменьшаться и x. Поэтому при отрицательных k больше подходящих ответов нет.

Ответ: $x = -1\frac{5}{6}\pi; -1\frac{1}{6}\pi$.

2 способ.

Отметить решения на числовой прямой.

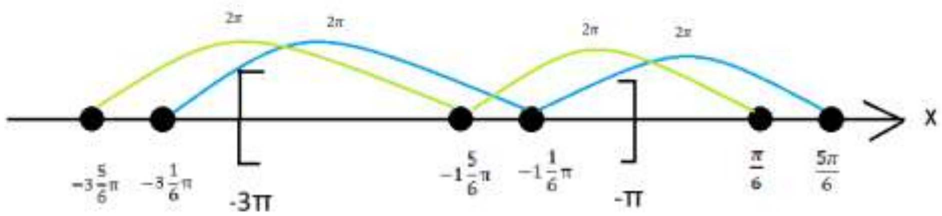

Рисунок 15 - Рисунок к решению задачи шага 2.6.3 (способ 2)

3 способ.

Использовать двойное неравенство, чтобы выяснить возможные значения k.

Для первого семейства:

$-3\pi \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le -\pi \Leftrightarrow -3 \le \frac{1}{6} + 2k \le -1 \Leftrightarrow -3\frac{1}{6} \le 2k \le -1\frac{1}{6} \Leftrightarrow -1\frac{7}{12} \le k \le -\frac{7}{12}$ => $k = 0$ => $x = -1\frac{5}{6}\pi$.

Для второго семейства:

$-3\pi \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le -\pi \Leftrightarrow -3 \le \frac{5}{6} + 2k \le -1 \Leftrightarrow -3\frac{5}{6} \le 2k \le -1\frac{5}{6} \Leftrightarrow -1\frac{11}{12} \le k \le -\frac{11}{12}$ => $k = -1$ => $x = -1\frac{1}{6}\pi$.

Ответ: $x = -1\frac{5}{6}\pi; -1\frac{1}{6}\pi$.

Шаг 2.6.4. Задание с автоматической проверкой ответа

Из решений уравнения $tgx = -\sqrt{3}$ выбрать то, которое принадлежит промежутку $[-\pi; 0]$. Результат разделить на $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: -2.

Шаг 2.6.5. Задание с автоматической проверкой ответа

Из решений уравнения $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ выбрать то, которое принадлежит промежутку $[\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}]$. Результат разделить на $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: 32.

Шаг 2.6.6. Задание с автоматической проверкой ответа

Из решений уравнения $cosx = 0$ выбрать то, которое принадлежит промежутку $[-7\pi; -6\pi]$. Результат разделить на $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: -39.

Шаг 2.6.7. Текст заключения

Вы изучили тему «Задача 13 в ЕГЭ». Отличная работа!

Что теперь?

Если вам нравится этот курс, расскажите о нём друзьям в любой соцсети. Разместите ссылку.

Оставьте отзыв о теме «Задача 13 в ЕГЭ» в комментариях на этой странице. Расскажите, что нравится, а что – нет. Я постараюсь учесть ваши замечания и сделать курс лучше.

Переходите к практикуму. Там вас ждут задачи с реальных ЕГЭ прошлых лет.

Урок 2.7. Практикум по 13 задаче.

Шаг 2.7.1. Текст введения

В этом разделе я собрала для вас задачи из реальных ЕГЭ прошлых лет.

Как учиться в практикуме:
1. Решаете задачу и оформляете решение на бумаге или компьютере
2. В поле ответа прикрепляете файл со своим решением (фотографию или скриншот экрана)
3. Верный ответ видите сразу
4. Через некоторое время получаете рецензию от репетитора. На примере вашей работы расскажу, к чему придираются проверяющие, чтобы на реальном экзамене вы смогли оформить решение идеально.

Возможные критерии оценивания:

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах – 2 балла; Обоснованно получен верный ответ в пункте а или пункте б, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней – 1 балл; Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше – 0 баллов.

Шаг 2.7.2. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$

Источник: ЕГЭ-2018, основная волна, резервный день

Шаг 2.7.3. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$

Источник: ЕГЭ-2018, досрочная волна, резервный день

Шаг 2.7.4. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(1; \frac{7}{3})$

Источник: ЕГЭ-2013

Шаг 2.7.5. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $3 \cdot\ 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x} + 3 \cdot 4^{x+1} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$

Источник: ЕГЭ-2014

Шаг 2.7.6. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $6log_8^2x - 5log_8x + 1 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2{,}5]$

Источник: ЕГЭ-2016

Шаг 2.7.7. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $log_2\,(x^2 - 14x) = 5$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[log_3 0{,}1;\ 5\sqrt{10}]$

Источник: ЕГЭ-2017

Шаг 2.7.8. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $log_5(2 - x) = log_{25}\, x^4$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[log_9 \frac{1}{82};\ log_9 8]$

Источник: ЕГЭ-2014, ЕГЭ-2019

Шаг 2.7.9. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $1 + log_2\,(9x^2 + 5) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4 + 14}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; \frac{8}{9}]$

Источник: ЕГЭ-2013

Шаг 2.7.10. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $cos2x - 5\sqrt{2}cos\,x - 5 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$

Источник: ЕГЭ-2015

Шаг 2.7.11. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $sin2x + \sqrt{2}sinx = 2cosx + \sqrt{2}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

Источник: ЕГЭ-2015, досрочная волна

Шаг 2.7.12. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $15^{cosx} = 3^{cosx} \cdot 5^{sinx}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; \frac{13\pi}{2}]$

Источник: ЕГЭ-2013

Шаг 2.7.13. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $(27^{cosx})^{sinx} = 3^{\frac{3cosx}{2}}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$

Источник: ЕГЭ-2013

Шаг 2.7.14. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $9^{sinx} + 9^{-sinx} = \frac{10}{3}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$

Источник: ЕГЭ-2014 и ЕГЭ-2017

Шаг 2.7.15. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $log_4\,(2^{2x} - \sqrt{3}\,cos\,x - sin\,2x) = x$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

Источник: ЕГЭ-2017

Шаг 2.7.16. Задание с рецензированием

а) Решите уравнение $2log_{0,5}^2(2sin\,x) + 7log_{0,5}(2sin\,x) + 3 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; 0]$

Источник: ЕГЭ-2019