

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА/GRADUATION THESIS

Исследование явления лазерной генерации в сложных сетевых структурах

Автор/ Author

Никитина Мария Михайловна

Направленность (профиль) образовательной программы/Major

Лазеры для информационно-коммуникационных систем 2016

Квалификация/ Degree level

Бакалавр

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor

Алоджанц Александр Павлович, доктор физико-математических наук, Университет ИТМО, факультет нанoeлектроники, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор")

Группа/Group

L3431

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster

факультет нанoeлектроники

Направление подготовки/ Subject area

12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Никитина Мария Михайловна	
20.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Никитина
Мария
Михайловна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Алоджанц Александр Павлович	
20.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Алоджанц
Александр
Павлович

(Фамилия И.О./ name
and surname)

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ /
OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS**

Обучающийся / Student Никитина Мария Михайловна

Группа/Group L3431

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster факультет наноэлектроники

Квалификация/ Degree level Бакалавр

Направление подготовки/ Subject area 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии

Направленность (профиль) образовательной программы/Major Лазеры для информационно-коммуникационных систем 2016

Специализация/ Specialization

Тема ВКР/ Thesis topic Исследование явления лазерной генерации в сложных сетевых структурах

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Алоджанц Александр Павлович, доктор физико-математических наук, Университет ИТМО, факультет наноэлектроники, профессор (квалификационная категория "ординарный профессор")

Срок сдачи студентом законченной работы до / Deadline for submission of complete thesis 28.05.2021

Техническое задание и исходные данные к работе/ Requirements and premise for the thesis

1. Разрабатывается модель сверхизлучения (СИ) в сетевых структурах с учетом нелинейных эффектов спин-спинового взаимодействия. 2. Описываются коллективные эффекты с помощью обобщенной модели Дике-Изинга, учитывающей нелинейное взаимодействие двухуровневых систем (ДУС) и позволяющей наблюдать СИ фазовые переходы второго рода. 3. Рассматриваются следующие сетевые архитектуры для ансамбля ДУС: регулярная, для которой распределение степени узлов определяется дельта-функцией, случайная, характеризующаяся Пуассоновским распределением, и безмасштабная сеть со степенным распределением степени узлов. 4. Берутся во внимание два случая: как изолированная, так и неизолированная система с учётом влияния диссипации. 5. Выводится критическое значение частоты квантового фотонного поля, при котором происходит СИ фазовый переход.

Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов)/ Content of the thesis (list of key issues)

1. Обзор литературы (примеры работ, описывающих исследования по этому направлению; комплексные сетевые структуры и их применение, междисциплинарность; двухуровневые системы и их интерпретации; краткий обзор про БЭК и переход к поляритонному лазеру)
2. Описание модели
3. Основные этапы расчетов, анализ данных

4. Графические материалы по полученным данным
5. Заключение и выводы

Перечень графического материала (с указанием обязательного материала) / List of graphic materials (with a list of required material)

1. Презентация по материалам ВКР
2. Графики/рисунки, поясняющие системы в программе MatLAB, Gephi

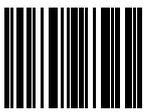
Исходные материалы и пособия / Source materials and publications

1. Krasnytska M. Phase transitions on complex networks : дис. – Universite de Lorraine; Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2016.
2. Bazhenov A. Y., Tsarev D. V., Alodjants A. P. Superradiant phase transition in complex networks //arXiv preprint arXiv:2012.03088. – 2020.
3. S. Suzuki, J. I. Inoue, B. K. Chakrabarti, Quantum Ising phases and transitions in transverse ising models, Springer Heidelberg, New York, Dordrecht, London 862 (2012) 403
4. I. Y. Chestnov, A. P. Alodjants, S. M. Arakelian, Lasing and high-temperature phase transitions in atomic systems with dressed-state polaritons, Physical Review A 88 (6) (2013) 063834.
5. A. Khrennikov, Social laser': action amplification by stimulated emission of social energy, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 374 (2058) (2016) 20150094.
6. Алоджанц А. П., Баженов А. Ю., Царёв Д. В. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА СЛОЖНЫХ СЕТЕВЫХ СТРУКТУР (2018).

Дата выдачи задания/ Objectives issued on 12.04.2021

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Алоджанц Александр Павлович	
12.04.2021	

Алоджанц
Александр
Павлович

(эл. подпись)

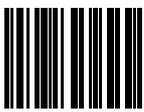
Задание принял к
исполнению/ Objectives
assumed by

Документ подписан	
Никитина Мария Михайловна	
17.05.2021	

НИКИТИНА
Мария
Михайловна

(эл. подпись)

Руководитель ОП/ Head
of educational program

Документ подписан	
Бугров Владислав Евгеньевич	

Бугров
Владислав

21.05.2021
(эл. подпись)

Евгеньевич

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**АННОТАЦИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ /
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS**

Обучающийся/ Student

Никитина Мария Михайловна

Наименование темы ВКР / Title of the thesis

Исследование явления лазерной генерации в сложных сетевых структурах

Наименование организации, где выполнена ВКР/ Name of organization

Университет ИТМО

**ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ/
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS**

1. Цель исследования / Research objective

Выявление особенностей сверхизлучательного фазового перехода в пределе нулевой температуры, вызванных эффектом конечного размера сети.

2. Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks

1. Описание обобщённой модели Дике с учётом комплексных сетевых структур, предполагающих нелинейное взаимодействие двухуровневых систем; 2. исследование особенностей фазовых переходов в пределе нулевой температуры и влияния топологических свойств системы на фазовые переходы; 3. исследование диссипационных процессов открытой системы на фазовые переходы.

3. Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/conclusions

1. Разработана модель лазерной генерации, учитывающая нелинейное взаимодействие ДУС с внешним квантованным фотонным полем, определяемое сетевой архитектурой; 2. с помощью подхода Гейзенберга получены основные динамические уравнения на операторы фотонного поля, поляризации и инверсии населённостей, определяющие параметры порядка системы; 3. СИ фазовый переход происходит при критическом значении частоты квантового фотонного поля, которая в свою очередь определяется топологией системы ДУС; 4. показано, что влияние диссипационных компонент для фотонного поля, поляризации и населённости уровней в открытой системе оказывает сильное воздействие на фазовое состояние системы

4. Наличие публикаций по теме выпускной работы/ Have you produced any publications on the topic of the thesis

5. Наличие выступлений на конференциях по теме выпускной работы/ Have you produced any conference reports on the topic of the thesis

1 X Конгресс молодых ученых (КМУ), 14.04.2021 - 17.04.2021 (Конференция, статус - всероссийский)

6. Полученные гранты, при выполнении работы/ Grants received while working on the thesis

7. Дополнительные сведения/ Additional information

Обучающийся/Student

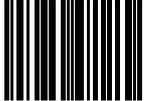
Документ подписан	
Никитина Мария Михайловна	
20.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Никитина
Мария
Михайловна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Алоджанц Александр Павлович	
20.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Алоджанц
Александр
Павлович

(Фамилия И.О./ name
and surname)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	8
1 Литературный обзор	10
1.1 Модель Дикке	10
1.2 Сложные сетевые структуры	11
1.2.1 Сети с регулярной архитектурой	13
1.2.2 Безмасштабная архитектура	14
1.2.3 Сети Эрдеша-Реньи	15
1.3 Фазовые переходы	19
1.3.1 Парамагнетик-Ферромагнетик	20
1.3.2 Сверхизлучение	21
2 Модель лазерной генерации с учётом нелинейности	26
2.1 Обобщённая модель Дикке	27
2.2 Архитектуры сетей	28
2.3 Уравнения динамики	33
3 Фазовый переход в изолированной системе.	
Стационарное состояние	35
3.1 Фазовый переход в регулярной сети	37
3.2 Фазовый переход в безмасштабной и случайной сетях	39
4 Фазовый переход в открытой системе.	
Стационарное состояние	42
4.1 Фазовый переход в регулярной сети	43
4.2 Фазовый переход в безмасштабной и случайной сетях	45
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	49
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	51
ПРИЛОЖЕНИЕ А	60
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	65

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы благодаря стремительно развивающимся квантовым технологиям, возрастает интерес к исследованию квантовых фазовых переходов (ФП), т.е. фазовых переходов, происходящих при нулевой температуре, а также к влиянию различного рода нелинейных эффектов на их протекание.

Нелинейность, как правило, даже во взаимодействующем газе частиц достаточно мала. Однако, как это будет показано в данной работе, если их (частицы) «упаковать» определенным образом, такая нелинейность может играть весьма существенную роль. Точнее говоря, в работе решается задача «упаковки» частиц с помощью графовых структур, когда каждая частица занимает отдельный узел такой системы, образуя сетевую архитектуру.

Сетевая архитектура (структура с определенной топологией и связями) применяется во многих областях прикладной математики, физики, а в последнее время и в социальных науках. Ниже приведены примеры работ по наиболее интересным направлениям исследований:

- материаловедение [1] – исследование наноматериалов со сложной топологией и структурой. Например, структура красного фосфора, которому свойственна аллотропия – существование в двух или более различных формах в одном и том же физическом состоянии – и который имеет чрезвычайно сложные волокнистые или слоистые структуры. Чтобы определить простое разложение структуры материала на модули, создаётся невзвешенная сеть атомов путём наложения некоторого порогового значения на межатомное расстояние, и далее происходит соединение атомов, которые находятся ближе друг к другу, чем это значение.
- социальные науки [2] – исследование проблемы коллективного принятия решения как фазового перехода второго рода, происходящего в гетерогенных информационно-ориентированных сообществах, обладающих частым обменом информацией между отдельными индивидами. Квантовоподобная модель, которая применяется для описания данного эффекта, предполагает взаимодействие двухуровневой когнитивной системы (агент) с информационным полем в некотором резервуаре (большом сообществе);
- программирование [3] – создание новых алгоритмов и/или оптимизация

имеющихся — например, для определения расстояний между узлами в масштабных графах, существует алгоритм «поиска по ширине», который осуществляет поиск в графе от начального узла, сначала достигая ближайших к нему соседей. Он также может служить полезной концептуальной основой для организации структуры сети, упорядочивая узлы на основе их расстояний от фиксированной начальной точки.

В данной работе рассматривается влияние на эффект лазерной генерации топологических свойств регулярной, случайной и безмасштабной сетевых архитектур, характеризующиеся распределением степеней узлов Дельта-функцией, случайным распределением (Пуассона) и степенным законом ($p(k) \propto k^{-\gamma}$), соответственно.

Несмотря на междисциплинарность данной работы, изучение сетевой структуры основывается на подходах и моделях статистической физики, которые объясняют получение прямых зависимостей в нетривиальных процессах и задачах. Такую роль играет и обобщённая модель Дикке, учитывающая нелинейное взаимодействие ДУС с внешним полем. Она предполагает так называемый СИ ФП второго рода, предполагающий установление некоторой определенной (ненулевой) спонтанной поляризации в термодинамически равновесном ансамбле двухуровневых систем, взаимодействующих с квантованным полем.

Помимо этого, чтобы проследить процессы, протекающие в системе, удобно рассматривать ее на макроскопическом уровне, чтобы вся система развивалась максимально когерентно. Такого результата можно добиться двумя способами: рассматривая систему как аналог конденсата Бозе-Эйнштейна (БЭК), или лазероподобных систем, и их некоторых комбинаций, таких как сверхизлучение. В последующих главах этим способам будет дано более подробное описание.

Таким образом, в данной работе рассмотрен общий подход к проблеме сверхизлучательного ФП, происходящего в сетевой структуре, при неравновесных условиях в пределе нулевой температуры, и обусловленного эффектом конечного размера сети. Разрабатывается модель лазерной генерации с учетом нелинейных эффектов, описывается их влияние на процессы в данной системе. Рассматриваются изолированная и открытая системы с отсутствием и учетом процессов диссипации, соответственно.

1 Литературный обзор

1.1 Модель Дикке

Изначально Р.Г. Дикке предложил в своей работе [4] модель, где рассмотрел излучающий газ как единую квантово-механическую систему, описывая энергетические уровни, соответствующие определенным корреляциям между отдельными молекулами. Спонтанное излучение при переходе между двумя такими уровнями приводило к появлению когерентного излучения.

Сначала обсуждение ограничивалось газом, размер которого мал по сравнению с длиной волны. Были рассчитаны скорости спонтанного излучения и естественная ширина линий. Для газа большего размера было рассчитано влияние импульса отдачи фотона на когерентность. Обсуждалось влияние импульса излучения в возбуждающих «сверхизлучающих» состояниях.

В данной же работе рассматривается СИ ФП для обобщённой модели Дикке при наличии нелинейности. Модель предполагает связь взаимодействующих с внешним (фотонным) полем двухуровневых систем и топологического взаимодействия их друг с другом.

В физике в качестве ДУС могут быть, например, атомы или их искусственные аналоги. ДУС может находиться, как в основном $|g\rangle$, так и в возбуждённом $|e\rangle$ состоянии с некоторой константой перехода \hbar . При этом факт отсутствия (нахождения) атома на низшем уровне определяется оператором уничтожения (рождения) $g_i(g_i^\dagger)$, а на высшем — $e_i(e_i^\dagger)$. Также вводится оператор фотонного поля a , взаимодействующего с ДУС, поляризации p , характеризующей возмущение среды (аналог экситона в физике полупроводников), и инверсии населённостей S_z . Так как лазерная генерация является открытым процессом, то вводятся характерные константы диссипации для данных трёх основных операторов.

Модель Дикке достаточно хорошо известна в контексте квантовой оптики [5–8], однако продолжает находить всё новые приложения не только в квантовой физике, но и междисциплинарных исследованиях.

Например, в [2] модель Дикке рассматривается в рамках проблемы коллективного принятия решения, демонстрирующей фазовый переход второго рода, что происходит в гетерогенных информационно-ориентированных сообществах, взаимодействующих с информационным полем. В частности, по-

казано, что система демонстрирует социальную поляризацию и феномен лазерной генерации для некоторых параметров (плотности возмущения («накачки»), температуры).

В этом смысле представленная в работе модель преодолевает разрыв между лазеро-подобными моделями, описывающими понятие «социального» и концепцию информационного лазера в [9, 10], и текущими исследованиями по формированию мнений, которые включают эхо-камерные эффекты и динамику социальной поляризации в сетевых сообществах [11, 12].

Топология сети и связь между «агентами» принятия решений (социальными атомами, т.е. социальными ДУС) в конечном итоге играют жизненно важную роль для различных социально ориентированных статистических моделей. Так в [3, 13] изучаются вопросы выявления групп (кластеров) в сетях и связанности сообществ, в [14, 15] – существование фазовых переходов и их интерпретации в сетях разного рода, – от вопросов интерпретации социальных сообществ методами квантовой физики до модели оптимизации взаимодействия человека с искусственным интеллектом в распределённых интеллектуальных системах [11, 12, 16].

1.2 Сложные сетевые структуры

В работе рассмотрены регулярная, безмасштабная и случайная сетевые архитектуры, характеризующиеся распределением степеней узлов сети Дельта-функцией Дирака, Пуассоновским и степенным распределением, соответственно.

Система с сетевой архитектурой отображается в виде графа, который является удобным способом для определения отношений между группой элементов. Он состоит из набора объектов, называемых узлами, соединённых связями (рёбрами). Графы достаточно удобны тем, что представляют собой математическую модель сетевых структур.

Сети широко распространены в природе, технических приложениях, обществе и привлекают внимание исследователей из самых различных областей науки [17–19]. Сетевая проблематика выдвинулась на передний план в обширном диапазоне дисциплин – от социальных сетей и Интернета, квантовых коммуникаций, до сетевых структур мозга и генома.

Несмотря на принципиальное различие в природе сетей, в их строении

и поведении, существуют качественно подобные свойства и универсальные закономерности, отражающие характерную для всех сетей специфику строения.

Любая сеть состоит из некоторого конечного числа узлов. Структура (конфигурация) связей между ними, как правило нерегулярная, задаёт топологию (архитектуру) сети. Два узла называются соседними (или смежными), если между ними имеется прямая связь. Важной характеристикой сети является так называемая степень узла – число соседей, с которыми связан данный узел.

В реальных сетях топология связей обычно нерегулярна, но в то же время и не случайна. Сети, обладающие такими свойствами, принято называть комплексными. Для комплексных сетей задача состоит в том, чтобы установить структурные свойства сети и понять, по каким принципам формируется топология и по каким законам протекает эволюция сети – изменение во времени её топологии (например, появление и исчезновение узлов).

Следующим этапом описания является учёт динамических процессов, происходящих в сети, то есть необходимо брать во внимание её состояние – значения динамических переменных, описывающих поведение узлов и связей. Однако стоит иметь в виду, что особенности топологии связей непосредственно сказываются на коллективной динамике узлов, а изменение состояний узлов и связей способно приводить к изменению структуры сети, причём часто характерные времена изменения динамического состояния сети и её топологии одного порядка. Обобщение этих двух этапов определяет описание так называемых адаптивных динамических сетей [20].

Они являются наиболее адекватным модельным описанием многих реальных систем в природе, технических приложениях и обществе. Примерами могут служить сети взаимодействующих лазеров и джозефсоновских контактов [21, 22], иммунная и нервная системы [23], конкурирующие популяции организмов и пищевые цепи [24, 25], связанные химические реакции [26], сети автомобильных дорог и авиасообщений [27, 28], сети городской инфраструктуры [29], беспроводные коммуникационные сети [30], квантовые сети [31], виртуальные социальные сети [3], сети научной кооперации [32] и многое другое.

Однако, основные понятия теории комплексных сетей, справедливые как для сетей без динамики узлов и связей, так и для динамических сетей

со статической топологией (рассматриваемые в данной работе), приведены в ряде обзоров [17–19, 33–37].

Обычно сеть определяется как ансамбль, состоящий из конечного числа N узлов. Топология задаётся матрицей смежности (или матрицей связей) $A = a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$, с элементами $a_{ij} = 1$, если узел j связан с узлом i , и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Сеть может иметь как направленные (ориентированные), так и ненаправленные связи (неориентированные). Матрица смежности для ориентированных сетей в общем случае несимметрична, в то время как для сетей с ненаправленными связями она симметрична: $a_{ij} = a_{ji}$. Хотя сеть с ненаправленными связями может быть представлена и в виде ориентированной сети, в которой каждая пара узлов связана взаимно противоположно направленными рёбрами.

Каждый узел i характеризуется своей степенью k_i – числом соседних узлов, с которыми он связан. Для ориентированных сетей вводятся выходная степень узла $k_i^{out} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ – число выходящих (эфферентных) связей – и входная степень узла $k_i^{in} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ – число входящих (афферентных) связей. Полная степень узла в этом случае определяется как $k_i = k_i^{in} + k_i^{out}$.

Одной из важнейших характеристик любой комплексной сети является функция распределения степеней узлов $P(k)$, которая определяет вероятность того, что случайно выбранный узел имеет определённое число связей k . Далее рассмотрим три типа сетевых архитектур, определяемых данной функцией распределения.

1.2.1 Сети с регулярной архитектурой

Первая рассматриваемая сетевая архитектура – регулярная. Она характеризуется распределением степеней дельта функцией Дирака $p(k) = \delta(k - k_0)$ с некоторой постоянной степенью узлов $k = k_0$. Это обобщённая функция, которую можно представить себе как очень узкий пик, расположенный в начале координат. В данной работе в физической интерпретации регулярная сеть подразумевает постоянную силу взаимодействия в $4Jk_0$ между произвольной парой ДУС.

Для неё изучено, что без воздействия сил внешнего поля там могут существовать фазовые переходы, показывающие изменение степени упорядо-

ченности системы, по типу схожие с переходами к состояниям ферромагнетик и сверхизлучение.

В работе показано, что эффекты конечного размера играют большую роль для данных ФП, даже для регулярной сети с одинаковой силой взаимодействия. Были получены аналитические выводы, описывающие СИ фазовый переход в присутствии ферромагнитных и/или парамагнитных состояний для нулевых температурных пределов.

1.2.2 Безмасштабная архитектура

Следующая, описываемая в работе, сетевая архитектура – безмасштабная. В большинстве реальных крупномасштабных сетей распределение степеней значительно отличается от, например, регулярного. В частности, для многих комплексных сетей, включая, например, Интернет, функция $P(k)$ имеет степенной вид: $P(k) \sim k^{-\gamma}$.

Такие сети называются масштабно-инвариантными (или безмасштабными): большинство узлов в них имеет малую связность, а сравнительно малое количество узлов (так называемые хабы), напротив, связано с огромным числом соседей.

Показано, что свойство масштабной инвариантности возникает, в частности, в растущих сетях, где появляются новые узлы, которые соединяются с уже существующими узлами, причём новый узел с большей вероятностью образует связь с узлом, уже имеющим большое число соседей [38, 39]. Последнее свойство отражает принцип предпочтительного присоединения (или так называемый феномен клуба богатых)[40], он рассматривается в модели Барабаши-Альберт, которая изучается в данной работе.

Также для безмасштабной сетевой структуры показано, что параметр γ , характеризующий данное распределение, играет ключевую роль в вопросе сверхизлучательного фазового перехода.

Согласно теории А.-Л. Барабаши, в зависимости от параметра γ степенное распределение имеет следующие режимы [41, 42]:

- Аномальный. В таком режиме ($1 < \gamma < 2$) безмасштабные сети обладают большим набором топологических особенностей (например, кластеры), поддерживающие полностью упорядоченное ферромагнитное состояние, которое практически не чувствительно к изменениям внешнего фотонно-

го поля.

- Безмасштабный. В этом режиме ($2 < \gamma < 3$) сети демонстрируют исчезновение коллективной взвешенной инверсии. СИ фазовый переход происходит в присутствии некоторого ферромагнитного состояния.
- Случайный. В данном режиме влияние параметров сети, таких как $\langle k \rangle$, $\zeta = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$, исчезает, что будет иметь значимую роль для СИ ФП.

Устанавливая определённые параметры сети и характеристики поля, можно получить квантовый фазовый переход в двухуровневой системе в пределе нулевой температуры. Так комплексные безмасштабные сети демонстрируют ФП второго рода, а также явление, подобное БЭК [43].

Сама по себе, модель Барабаши Альберта описывается следующим образом. Сеть начинается с начальной сетки с m_0 узлами, $m_0 \geq 2$ и степень каждого узла в начальной сети должна быть не меньше 1, иначе она всегда будет отделена от остальной части системы.

В каждый момент времени в сеть добавляется новый узел. Каждый новый узел соединяется с существующими узлами с вероятностью, пропорциональной числу связей этих узлов.

Формально, вероятность p_i того, что новый узел соединится с узлом i равна:

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}, \quad (1)$$

где k_i — степень i -го узла, а в знаменателе суммируются степени всех существующих узлов. Эта ситуация может быть установлена в рамках отождествленного сетевого подхода, который обладает степенным распределением степеней и предполагает взвешенную, полносвязную графовую модель [14, 15].

1.2.3 Сети Эрдеша-Реньи

Также в работе описывается случайная сетевая архитектура, где между любыми двумя узлами установлена связь с некоторой вероятностью p (называемые также случайными графами или сетями Эрдёша-Реньи). Важно понимать, что случайный граф это не одиночный граф, а вероятностное пространство всех возможных комбинаций рёбер для множества V , состоящего

из n узлов. Причём в таких графах число узлов n обычно стремится к бесконечности.

Большинство узлов имеет степень, равную среднему по сети значению $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i$, и функция $p(k)$ представляет собой распределение Пуассона [44], которое имеет максимум при $k = \langle k \rangle$ и экспоненциально убывающий хвост: $p(k) = \frac{\langle k \rangle^k \exp^{-\langle k \rangle}}{k!}$.

Рассматривая распределение Пуассона, наиболее удобным вариантом будет описать его частный случай – нормальное или гауссово распределение, так называемая «колоколообразная кривая» или «шапка Гаусса», широко используемая в теории вероятностей и статистике. Оно характеризуется двумя величинами: средним значением и стандартным отклонением.

Стоит отметить, что при вероятности наблюдения значения, превышающего среднее значение более чем в c раз, стандартное отклонение экспоненциально уменьшается в c раз.

Гауссово распределение применяется во многих областях, например, в алгоритмистике и естественных науках, и результат, полученный в начале 1900-х годов и названный «Центральная предельная теорема», даёт этому фундаментальное объяснение. В общих словах, теорема гласит, что если взять любую последовательность небольших независимых случайных величин, то в пределе их сумма (или среднее значение) будет распределена в соответствии с нормальным распределением.

Другими словами, любая величина, которую можно рассматривать как сумму многих небольших независимых случайных эффектов, будет хорошо аппроксимирована нормальным распределением.

Так, например, в экспериментальных науках, если выполнить повторяющиеся измерения фиксированной физической величины, и если разница в измерениях между испытаниями является совокупностью результатов многих независимых источников ошибок в каждом испытании, то распределение измеренных значений должно быть приблизительно нормальным.

Для сетевых веб-систем можно смоделировать структуру связей. Например, если предположить, что каждая страница независимо случайным образом решает, следует ли ей ссылаться на какую-либо другую страницу, то количество ссылок на неё является суммой многих независимых случайных величин (т. е. наличие или отсутствие ссылки с каждой другой страни-

цы). Поэтому ожидается, что распределение будет нормальным. В частности, возвращаясь к основному факту о нормальных распределениях, количество страниц с k ссылками должно экспоненциально уменьшаться в k раз по мере увеличения k [3].

Распределение Пуассона также часто применяется исследованиях разного рода. Например, в работе [31] изучаются статистические характеристики сети квантового интернета. Это новый тип коммуникационных сетей, находящийся сейчас на стадии разработки. Была предложена модель для симуляции квантового Интернета на основе оптических волокон. Она включает в себя подходы теории сетей для предсказания глобальных характеристик генерируемых фотонных сетей, таких как их связность, дистанция между узлами и их скопления. Как оказалось, особенно уместным примером для построения такой модели являются случайные сети с Пуассоновским распределением степени узлов.

Становится возможным предсказать непрерывный фазовый переход между несвязанной и сильно связанной фазой в зависимости от плотности узлов: существует критическая плотность, выше которой сеть изменяется от разобщённой до проявления гигантской связанной компоненты (кластера). Более того, показывается, что, хотя сети и не демонстрируют свойство малого мира, средняя дистанция между узлами как правило мала.

Вернёмся к рассмотрению модели Эрдёша-Реньи.

Случайный граф был впервые изучен Анатолием Рапопортом, который вместе с Рэем Соломоновым показал, что если средняя степень сети увеличивается, то происходит резкий переход от несвязанных вершин к гигантской компоненте [45].

Это эффект, возникающий в схемах случайного размещения частиц по ячейкам при неограниченном росте количества частиц. Он заключается в том, что почти все частицы (в процентном отношении) собираются в одной ячейке.

Существует теорема о гигантской компоненте, которая гласит, что, если рассмотреть модель $G(n, p)$ и принять вероятность появления нового узла как $p = \frac{c}{n}$, то:

- если $c < 1$, то найдется такая константа β , зависящая от c , что размер каждой связной компоненты случайного графа не превосходит $\beta \ln(n)$;

— если же $c > 1$, то найдется такая константа γ , зависящая от c , что в случайном графе есть ровно одна компонента размера $\geq \gamma n$. Размер остальных компонент не превосходит $\beta \ln(n)$.

Когда вероятность (ожидаемая степень) случайного графа меньше единицы, он состоит из небольших связанных компонентов (кластеров).

В момент же, когда ожидаемая степень проходит через критическое значение единицы, гигантская связная компонента появляется и, следовательно, обеспечивает структурированное представление случайного графа. Аналогично, если вероятность увеличивается медленнее или быстрее, чем логарифм размера графа, результирующий случайный граф разобщён (отключен) или, соответственно, связан с высокой вероятностью. Об этом будет упомянуто чуть ниже.

Исторически истинное рождение теории случайных графов произошло благодаря восьми работам, опубликованным Полом Эрдёшем и Альфредом Реньи в начале шестидесятых годов [46–53], [54].

С тех пор случайные графы интенсивно изучались, и о них известно многое. Случайный граф описывается как граф с n вершинами с ребрами между любыми двумя вершинами, встречающимися с некоторой фиксированной вероятностью.

Вероятность, что случайный граф имеет некоторые свойства изучается с помощью двух тесно связанных моделей:

- Первая модель была введена Гильбертом и называется $G(n; p)$, она включает в себя любое ребро e в наборе ребер $[V^2]$ с вероятностью p в случайном графе.
- Вторая модель – это модель $G(n; m)$, которая равномерно выбирает граф из всех графов с n вершинами и m ребрами. Другой способ интерпретировать $G(n; m)$ модель – начать с пустого графа с количеством n вершин и случайным образом добавить к графу больше ребер из $[V^2]$ [55].

В нашем случае, вероятность будет рассматриваться в асимптотическом ключе, когда случайный граф G_n с n узлами имеет вероятность P для почти всех графов, если P (когда G_n имеет вероятность P^*) $\rightarrow 1$ как $n \rightarrow \infty$ [54, 56].

Несмотря на то, что модель случайной сети Эрдёша-Реньи достаточно проста, она хорошо описывает статистические явления. Например, она демон-

стрирует фазовые переходы, связанные с распределением степеней вершин в графе.

Так в модели $G(n; p)$ существует критическая вероятность p_c , такая, что если $p < p_c$, то сеть состоит из небольших (порядка не более $\ln(n)$) и разобщенных кластеров, а если $p > p_c$, то присутствует гигантский кластер с размером того же порядка, что и вся сеть, в то время как все меньшие компоненты имеют порядок $\ln(n)$.

1.3 Фазовые переходы

Фазовый переход — переход вещества из одной термодинамической фазы в другую при изменении внешних условий. В последнее время широкое распространение получило понятие квантового фазового перехода, то есть управляемого не классическими тепловыми флуктуациями, а квантовыми, которые существуют даже при абсолютном нуле температур, где классический фазовый переход не может реализоваться вследствие теоремы Нернста [57].

Различают фазовые переходы первого и второго рода.

При ФП первого рода скачкообразно изменяются основные параметры: удельный объём, количество запасённой внутренней энергии, концентрация компонентов и т. п. При этом имеет место резкое изменение этих величин при изменении некоторого параметра: температуры, давления, напряженности магнитного поля и т. п.

При ФП второго рода плотность и внутренняя энергия не меняются, так что невооружённым глазом такой фазовый переход может быть незаметен. Скачок же испытывают их производные по специальному параметру (температуре, давлению, напряженности магнитного поля и т.п.): теплоёмкость, коэффициент теплового расширения, различные восприимчивости и т. д.

Описание фазового перехода второго рода как следствие изменения симметрии даётся теорией Ландау [58], в то время, как сейчас его принято описывать с помощью появления в точке перехода параметра порядка, обозначим его как η . Величина параметра порядка определяется таким образом, чтобы её значение в несимметричной фазе было отлично от нуля, и равнялось нулю в симметричной фазе.

Другими словами, симметрия тела повышается, когда строго выполнено

равенство $\eta = 0$. Если же есть сколь угодно малое отклонение параметра порядка от нуля, то это свидетельствует о понижении симметрии. В случае непрерывного стремления η к нулю, речь идёт о фазовых переходах второго рода. Непрерывное изменение состояния в точке фазового перехода второго рода влечёт за собой непрерывное изменение термодинамических функций в этой же точке.

Обобщённая модель Дикке, учитывающая нелинейное взаимодействие двухуровневых систем, предполагает так называемый сверхизлучательный фазовый переход второго рода. Так как данная модель рассматривается в контексте изучения лазерной генерации, то с помощью неё также можно описать и изменение фазы парамагнетик-ферромагнетик, что является ФП второго рода от неупорядоченного к упорядоченному состоянию.

Для описания фазовых переходов (парамагнетик-ферромагнетик, сверхизлучение - нормальное состояние) вводятся два параметра порядка: взвешенная инверсия населённостей и средняя амплитуда фотонного поля

1.3.1 Парамагнетик-Ферромагнетик

Парамагнетику свойственно, что его магнитные моменты без воздействия внешнего магнитного поля располагаются разнонаправленно, в хаотическом порядке. Переходя на ансамбль двухуровневых систем можно сказать, что часть систем находится в возбуждённом состоянии, в то время, как другая – в основном. Учитывая данную ситуацию ансамбль в целом будет находиться в неупорядоченном состоянии, что соответствует фазе парамагнетика. При таком условии создание лазерной генерации невозможно, так как оно соответствует уровню недостаточной накачки.

Ферромагнетик же имеет иные свойства – при отсутствии сил внешнего магнитного поля его магнитные моменты уже являются однонаправленными (это позволяет ему (при температуре ниже точки Кюри) обладать намагниченностью без внешнего магнитного поля). При рассмотрении ансамбля двухуровневых систем фаза ферромагнетика подразумевает нахождение всех ДУС одновременно либо в основном, либо в возбуждённом состоянии. В рамках лазерной генерации это соответствует либо уровню нулевой накачки, либо достаточной для начала генерации.

Некоторые особенности ферромагнитного фазового перехода и критичность в такой модели, которая имеет место для больших, но конечного раз-

мера сетевых систем, описаны в [59].

1.3.2 Сверхизлучение

Когерентность — это свойство волн, которое описывает, насколько они похожи на гладкую синусоидальную волну. В квантовой теории материя, подобно свету, имеет волновой характер и может проявить когерентность.

Однако ни волновая природа материи, ни когерентные состояния обычно не наблюдаются в повседневной жизни. Это происходит потому, что, как правило, только крошечная часть частиц занимает одно и то же квантовое состояние, приводящее к некогерентному классическому миру.

Однако возможно создание систем, в которых большое количество частиц занимает одно и то же когерентное состояние, наблюдаемое в макроскопическом масштабе.

Ниже рассмотрены примеры таких систем.

- Одной из наиболее распространенных и широко используемых систем для практического применения является лазер — излучатель когерентного состояния света.
- Также известно явление сверхпроводимости, — когерентного состояния парных электронов — она замыкает список текущих экспериментальных реализаций макроскопических квантовых когерентных состояний. Они оказали большое влияние на понимание квантовой физики.
- Помимо этого существуют связанные состояния электронов и дырок (экситоны), которые возникают в полупроводниках. Они неравновесны и могут распадаться на свет, но при помещении в оптический резонатор происходит взаимодействие экситон-фотон, вследствие чего образуются новые частицы: резонаторные экситон-поляритоны, которые являются бозонами и поэтому могут конденсироваться.

В полупроводниках электрон в зоне проводимости и дырка в валентной зоне взаимосвязаны через кулоновское взаимодействие и могут образовывать связанное состояние, называемое экситоном.

Экситон, как частица, состоящая из двух фермионов, является бозоном и, следовательно, обладает свойствами, вытекающими из статистики Бозе.

Однако существуют некоторые практические трудности, связанные с конденсатом Бозе-Эйнштейна (БЭК) экситонов. В полупроводниках кулоновское взаимодействие между электроном и дыркой внутри экситона экранируется другими носителями, и, следовательно, энергия связи экситона слаба. Поэтому экситоны могут существовать только при низких температурах или в низкоразмерных структурах, где их энергия связи увеличивается [60, 61].

Другая фундаментальная трудность заключается в том, что большая популяция внешне возбужденных экситонов не является основным состоянием полупроводника. Экситоны могут рекомбинировать, испуская фотоны. Однако, если время жизни экситона велико по сравнению со временем термализации, может наблюдаться квазиравновесный бозе-конденсат. Такого состояния можно добиться, поместив экситоны в резонатор.

Сильное взаимодействие света с веществом не всегда должно быть неблагоприятным для образования конденсата. При определенных условиях именно сильная дипольная связь будет способствовать конденсации. Одним из примеров является когерентно возбужденный полупроводник.

В экспериментах, где электроны и дырки создаются внешним когерентным светом, образуется неравновесный конденсат. Когерентность в таких системах возникает не спонтанно, а переносится от внешнего когерентного источника накачки. Другим примером может быть предотвращение выхода когерентных возбуждений путем помещения образца в оптический резонатор.

Если взаимодействие между атомами или экситонами в полупроводниках и светом сильное, то образуются новые квазичастицы, называемые резонаторными поляритонами.

Поляритон можно рассматривать как суперпозицию плоской волны электромагнитного поля и плоской волны поляризации.

Впервые данный термин был введен Дж.Хопфилдом [62] для описания света в объемном материале. Резонаторные поляритоны экспериментально наблюдались для атомов [63], квантовых ям [64] и объемных экситонов [65], экситонов в органических полупроводниках [66, 67] и экситонных комплексов [68]. Квантовые ямы, заключенные в плоский микрорезонатор, являются особенно хорошей системой для наблюдения эффектов когерентности. Энергия связи экситона идеальной квантовой ямы в четыре раза превышает энергию объемного экситона, и взаимодействие фотона с веществом в микрорезонаторе особенно сильно, поскольку эффекты декогеренции уменьшаются, что

позволяет изучать так называемый режим сильной связи.

Поляритоны, как связанные состояния фотонов и электронных возбуждений, являются композитными бозонами и, таким образом, аналогично чистым экситонам, они могут конденсироваться в БЭК. Эта тема была предметом обширных экспериментальных исследований в последние годы.

Миниатюризация и улучшение качества оптических резонаторов в последние годы открывают новые возможности для наблюдения когерентных эффектов. Например, в резонаторах размером с длину волны света, называемых микрорезонаторами, экситонно-фотонное взаимодействие достаточно сильное, и декогеренция уменьшается. Вероятно, станет возможным экспериментальное наблюдение бозе-конденсации резонаторных поляритонов.

Такой поляритонный конденсат (так называемый, поляритонный лазер) также может стать новым источником когерентного света, где, в отличие от лазеров, не потребуется инверсии населенности.

Так как в эту систему вводятся процессы декогеренции и диссипации, то, регулируя их влияние, можно переходить из одного режима генерации в другой. Так в пределе очень большой декогеренции это обычный лазер, а в противоположном режиме появляется возможность исследовать стабильность БЭК поляритонов.

Резонаторные поляритоны в последние годы являются предметом интенсивных экспериментальных исследований. Поляритонный эффект сильной связи для экситонов, связанных с фотонами, был впервые обнаружен в квантовой яме микрорезонатора GaAs/AlGaAs [64] в 1992 году. С тех пор было проведено множество экспериментов по изучению свойств резонаторных поляритонов в различных системах, из которых наиболее интересным является наблюдение стимулирующего рассеяния для поляритонов [69–74].

Одним из явлений, наблюдаемых в Бозе-конденсатах, является сверхизлучение, происходящее в пределе нулевой температуры. БЭК – это состояние материи, при котором все частицы рассматриваемого вещества пребывают в низшем энергетическом состоянии. В таком состоянии де-Бройлевская длина волны частиц становится больше расстояния между ними, а волны де-Бройля отдельных частиц перекрываются и смешиваются. В результате вся совокупность частиц начинает вести себя как одна большая материальная волна, проявляя квантовые свойства на макроуровне, что достаточно удобно для проведения исследований.

Одними из наиболее интересных квантовых эффектов, обнаруживаемых в БЭКах являются сверхтекучесть и сверхпроводимость, то есть явления бездиссипативного течения материи или электрического тока, соответственно. Имея в виду теорию корпускулярно-волнового дуализма света, явление сверхизлучательного состояния в системе очевидно. В случае экситонных поляритонов, БЭК можно обнаружить по излучению фотонов, туннелирующих сквозь брегговские зеркала микрорезонатора.

Сверхизлучение – это давно известное в области квантовой оптики явление резкого увеличения интенсивности излучения вследствие усиления корреляций ансамбля независимых излучателей [75].

К настоящему времени с применением различных приближений было подробно исследовано СИ в бозе-конденсатах, плазмонных структурах, экситон-поляритонах в полупроводниковых микроструктурах [76, 77], кубитах, массивах квантовых точек, в атомных ансамблях [78–80], для обеспечения контролируемого перехода между состояниями сверхизлучения и предизлучения, в термодинамическом состоянии в сверхпроводящих цепях [81, 82] и в сплошных средах [83].

Доказательство СИ состояния в таких экспериментах обычно достигается с помощью использования резонатора, что позволяет увеличить время жизни фотона [84–86].

Изначально явление было предсказано в работе Дикке для квантовых излучателей, находящихся в ограниченном (субволновом) объёме. Дикке было показано, что увеличение интенсивности излучения N двухуровневых систем достигается за время $\sim \frac{\log N}{N}$, пик сверхизлучения длится время в N раз меньше, чем время излучения отдельного излучателя, а максимальная интенсивность излучения $\sim N^2$.

В частности, СИ фазовый переход устанавливает некоторую определенную (ненулевую) спонтанную поляризацию, происходящую в термодинамически равновесном ансамбле двухуровневых систем, взаимодействующих с фотонным полем.

Кроме того, взаимодействие квантованного света с различными двухуровневыми системными ансамблями обеспечивает фазовые переходы с высокой (до комнатной) температурой [77, 79].

Когда в системе происходит сверхизлучательный фазовый переход могут быть достигнуты два разных режима :

- Во-первых, рассматривается предел нулевого химического потенциала, когда общая система может быть описана в рамках канонического ансамбля. В этом случае ансамбль двухуровневых систем и взаимодействующее с ними фотонное поле являются термодинамически равновесной изолированной системой [5–8].
- Во-вторых, рассматривается большой канонический ансамбль, предусматривающий ненулевой химический потенциал, когда фотоны и двухуровневые системы могут образовывать слитные состояния (одетые состояния, поляритоны), и именно они образуют сверхизлучательный переход второго рода [77, 79].

Другими словами, говоря о ненулевом химическом потенциале, подразумевается БЭК поляритонов с низкой связностью, возникающий в системе при наличии соответствующего потенциала [87–89].

В этой работе мы ограничиваемся каноническим ансамблем ДУС, взаимодействующих с внешним фотонным полем.

2 Модель лазерной генерации с учётом нелинейности

Лазер — это явление режима слабой связи, в котором, согласно золотому правилу Ферми [90], скорость перехода определяется квадратом матричного элемента возмущения между начальным и конечным состояниями.

В нём ансамбль атомов (экситоны, электроны и дырки) взаимодействует с полем фотонов, заключенным в резонаторе. Это взаимодействие вызывает переходы между двумя электронными уровнями в среде, стимулируемыми фотонным полем и, следовательно, пропорциональными числу фотонов в резонаторе.

Вынужденное излучение, пропорционально числу атомов в возбуждённом состоянии, приводит к излучению фотона с той же фазой, что и у фотона, вызывающего переход, если энергия воздействующего фотона равна разности энергий уровней атома до и после излучения. Таким образом, излучённый фотон когерентен с модой резонатора — это физическая основа работы лазера.

Вынужденное поглощение приводит к поглощению фотона в режиме резонатора и пропорционален числу атомов в основном состоянии. Переход с верхнего уровня на нижний также может быть вызван колебаниями вакуума и называется спонтанным излучением. Он вызывает излучение фотона со случайной фазой и, таким образом, некогерентен с фотонным режимом в резонаторе.

Спонтанная эмиссия мала по сравнению со стимулированной (вынужденной) эмиссией, если в резонаторе присутствует много фотонов в соотношении $1 : n$, где n — количество фотонов в режиме резонатора.

Чтобы создать макроскопическую когерентную популяцию фотонов, вынужденное излучение должно преодолеть поглощение, и, таким образом, для лазерного воздействия необходим инвертированный ансамбль атомов.

Для того, чтобы преодолеть поглощение, потери в резонаторе, спонтанную эмиссию и все другие процессы распада, а также сохранить инверсию населённостей, должен быть применен достаточно сильный механизм накачки.

Он и другие процессы декогеренции, действующие на атомы, сильны, сравнимы с взаимодействием со светом. Таким образом, лазеры работают в режиме, в котором когерентная поляризация среды очень сильно затухает, а

атомная когерентность очень сильно снижается.

Когерентное фотонное поле, колеблющееся с частотой моды пустого резонатора, и взвешенная инверсия населённостей являются параметрами порядка в системе.

Вышеуказанные свойства определяют режим, рассматриваемый для всех лазерных теорий. Квантовая теория лазера была разработана в шестидесятых годах с использованием квантовых уравнений Ланжевена, динамических уравнений для матрицы плотности [91].

Здесь представлена формулировка квантовых уравнений Ланжевена, разработанная Г. Хакеном [92, 93], поскольку она может быть легко связана с формулировкой поляритонного конденсата, разработанной П.Р. Истхэмом и П.Б. Литтлвудом [77].

2.1 Обобщённая модель Дикке

Лазер описывается как открытая система, взаимодействующая с окружающей средой.

В данной работе рассматривается ансамбль N двухуровневых систем. В физике ДУС могут быть, например, атомы. Реальное число энергетических состояний в них может быть достаточно велико, однако с учетом экспериментальных возможностей рабочие уровни энергии подбираются под конкретную задачу. Данный ансамбль ДУС взаимодействует с фотонным полем резонатора, которое описывается операторами рождения (уничтожения) $g(g^\dagger)$, а также между собой. Описанного данного взаимодействие можно представить в виде графа, в котором каждый узел – это отдельная ДУС, а ребра графа представляют их взаимодействие. Распределение степеней определяется в зависимости от типа архитектуры сети.

Данное взаимодействие вызывает переход между основным $|g\rangle$ и возбужденным $|e\rangle$ состояниями, который стимулируется фотонным полем и, следовательно, пропорционален количеству фотонов в резонаторе. В работе, основной упор сделан на рассмотрение изолированной и открытой систем, учитывающих диссипационные потери. Эти процессы имеют различную физическую природу в зависимости от материала, и их точные детали не важны для общей теории лазера.

В рамках дипольного приближения вращающейся волны Гамильтониан

системы будет выглядеть следующим образом:

$$H = - \sum \left[J_{ij} (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right] - \frac{1}{2} h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) + \omega_a a^\dagger a - \frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a), \quad (2)$$

где $g_i(g_i^\dagger)$ оператор уничтожения (рождения); первый член описывает сеть топологически связанных ДУС и определяется топологической характеристикой J_{ij} , второй – двухуровневую систему, которая может находиться в основном $|g\rangle$ и возбужденном $|e\rangle$ состоянии с константой перехода h , третий – энергию фотонного поля с частотой взаимодействия ω_a и четвертый – взаимодействие внешнего фотонного поля с ДУС.

Подход Гейзенберга, описанный ниже, позволяет определить динамику оператора p , который характеризует возмущение атомной среды (экситон) при взаимодействии с полем и определяет поляризацию i -го атома и S_z – оператор инверсии населённостей.

При этом система может содержать диссипационные компоненты – поля, поляризации и инверсии населённостей. Поэтому следует рассматривать как изолированную, так и неизолированную систему с учётом влияния диссипации.

2.2 Архитектуры сетей

В данной работе рассматриваются регулярная, случайная и безмасштабная сетевые архитектуры, характеризующиеся распределением степени узлов $p(k)$.

Важно отметить, что для построения сетей суммирование элементов системы производится по вершинам графа с определенной матрицей смежности A_{ij} , пропорциональной J_{ij} , в которой хранится информация о структуре графа. Матричный элемент $A_{ij} = 1$, если два узла связаны, в противном случае $A_{ij} = 0$. В данной работе используется подход оттоженной сети [94, 95], который предполагает взвешенную, полносвязную графовую модель. Эта сеть динамически перестраивается таким образом, что вероятность i и j узла образовать ребро равна:

$$p_{ij} = \frac{k_i k_j}{N \langle k \rangle}, \quad (3)$$

где k_i, k_j степень i и j узла, $\langle k \rangle$ – средняя связанность топологической структуры. Таким образом, в ходе расчётов был заменён коэффициент $J_{ij} = Jp_{ij}$, где J некая постоянная характеризующая силу связи.

Основными характеристиками сетевой архитектуры, определяющие поведение ФП являются первый ($\langle k \rangle$) и второй ($\langle k^2 \rangle$) момент которые рассчитываются как:

$$\langle k^m \rangle = \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^m p(k) dk, m = 1, 2. \quad (4)$$

Для простоты, был введён параметр отношения первого и второго момента распределения степеней, ζ как:

$$\zeta = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}, \quad (5)$$

который определяет основные статистические величины для выбранной сети.

Во-первых, изучается регулярная сетевая архитектура, она характеризуется распределением степеней дельта функцией Дирака $p(k) = \delta(k - k_0)$ с некоторой постоянной степенью узлов $k = k_0$, см. рисунки 2(а) и 3. Это обобщённая функция, которую можно представить себе как очень узкий пик, расположенный в начале координат. Дельта-функция везде равна нулю кроме этой одной единственной точки.

Для неё, используя (4) и (5), находим, что $\langle k^m \rangle = k_0^m (m = 1, 2)$ и $\zeta = k_0$ соответственно.

В физической интерпретации регулярная сеть подразумевает постоянную силу взаимодействия в $4Jk_0$ между произвольной парой ДУС. Она принимает максимальное значение для полного графа с N вершин и $k_0 = N - 1$.

Во-вторых, рассматривается безмасштабная сетевая архитектура, описанная моделью Барабаши-Альберт см. рисунки 2(с) и 3. В работе она определяется степенным распределением степени узлов как:

$$p(k) = \frac{(\gamma - 1)k_{min}^{\gamma-1}}{k^\gamma}, \quad (6)$$

где γ – показатель степени, k_{min} – минимальная связанность для рассматриваемого типа распределения. Модель Барабаши-Альберт – алгоритм генерации случайных безмасштабных сетей с использованием принципа предпочтитель-

ного присоединения, подразумевающий то, что чем больше связей имеет узел, тем более предпочтительно для него создание новых связей [17].

Согласно теории Барабаши, в зависимости от параметра γ степенное распределение имеет следующие режимы: $1 < \gamma < 2$ – аномальный режим, $2 < \gamma < 3$ – безмасштабный режим, $\gamma > 3$ – случайный режим, описанные выше. Условие нормировки для данной функции распределения имеет вид:

$$\int_{k_{min}}^{+\infty} p(k)dk = 1. \quad (7)$$

Важной особенностью безмасштабной сети является наличие хабов, которые четко распознаются по точкам, расположенным в правом углу вставки (рисунок 3). Самый крупный узел описывается степенью k_{max} , и подчиняется условию, называемого естественной отсечкой:

$$\int_{k_{max}}^{+\infty} p(k)dk = \frac{1}{N}. \quad (8)$$

Объединяя выражения (6) и (7), получим условие, задающее максимальную степень узлов $k_{max} = k_{min}N^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Примечательно, что при аномальном режиме $k_{max}/k_{min} > N$.

В таблице 1 представлен анализ характеристик $\langle k \rangle$ и ζ для безмасштабной сети в пределе большого N .

Таблица 1 – Характеристика средней степени узла $\langle k \rangle$ и ζ – параметра для безмасштабной сети с распределением степеней узлов $p(k) \propto k^{-\gamma}$ для различных значений показателя степени γ в пределе большого N .

γ	ζ	$\langle k \rangle$
$\gamma > 1, \gamma \neq 2, \gamma \neq 3$	$k_{min} \frac{2 - \gamma N^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} - 1}{3 - \gamma N^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} - 1}$	$k_{min} \frac{\gamma - 1}{2 - \gamma} (N^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} - 1)$
2	$\frac{k_{min}}{\ln(N)} N$	$k_{min} \ln(N)$
3	$\frac{k_{min}}{2} \ln(N)$	$2k_{min}$

Соответствующая зависимость данных параметров от показателя степени γ приведена на рисунке 1. Хорошо видно, что обе характеристики возрастают в аномальном режиме.

Стоит сказать, что при таком режиме даже при нулевой средней амплитуде фотонного поля всё-равно будет достаточно велико воздействие внешнего поля, что приводит к появлению фазовых переходов.

Другими словами, сети в аномальном режиме поддерживают сильное межсистемное взаимодействие. В то же время в безмасштабном и случайном режимах влияние $\langle k \rangle$ и ζ исчезает, что будет иметь значимую роль для СИ ФП.

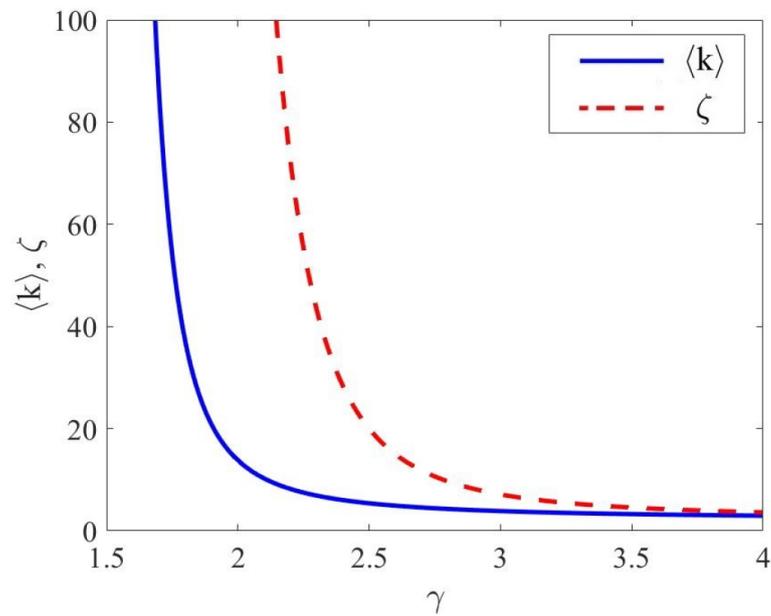


Рисунок 1 – Зависимость средней степени узла $\langle k \rangle$ и ζ -параметра от показателя степени γ для безмасштабной сети с $N=1000$.

В третьих, рассматривается описанная выше модель Эрдёша-Реньи [47] предполагающая, что большинство узлов имеет степень, равную среднему по сети значению $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i$ (рисунки 2(b) и 3). Функция $P(k)$ представляет собой распределение Пуассона, которое имеет максимум при $k=\langle k \rangle$ и экспоненциально убывающий хвост:

$$p(k) = \frac{\langle k \rangle^k e^{-\langle k \rangle}}{k!}. \quad (9)$$

Таким образом, для приведённых сетевых архитектур стоит задача выяснить роль конкретных характеристик сети, таких как степень узла, пока-

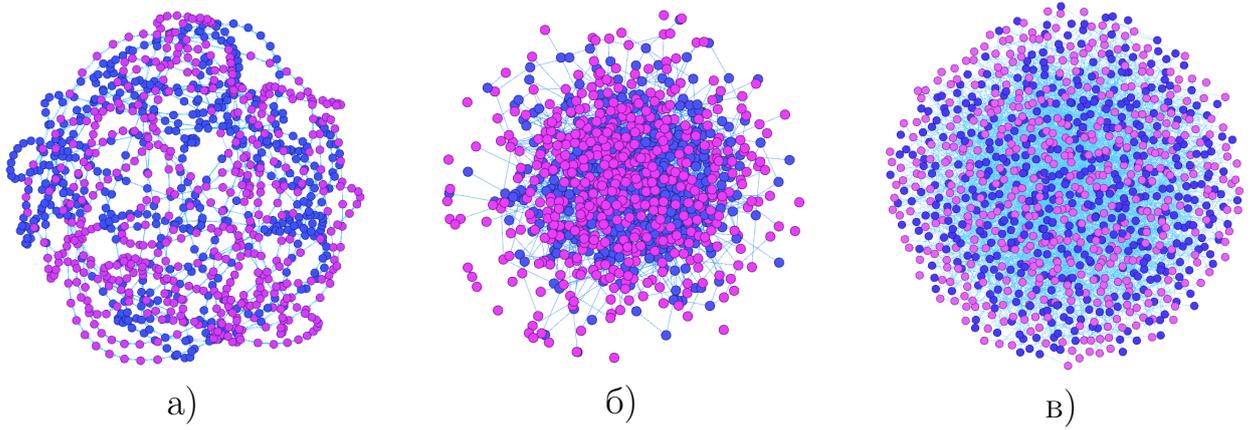


Рисунок 2 – (а) Регулярная, (б) случайная (Poisson) и (в) безмасштабная (Barabasi-Albert) сетевые структуры. Построены при $N=1000$, $\langle k \rangle=4$. Маглиновые (синие) узлы соответствуют ДУС в основном (возбуждённом) состоянии. Взвешенная инверсия населенностей данной системы $S_z = 0$

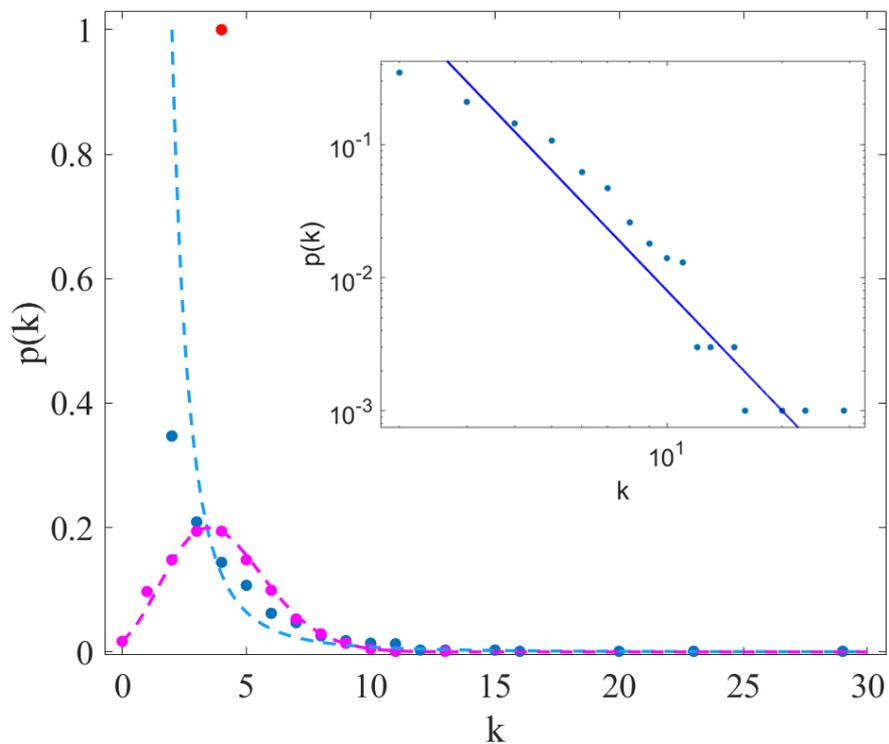


Рисунок 3 – Три типа распределения узлов. Розовым цветом показано распределение Пуассона, синим – степенное, красной точкой – Дельта-функции при $\langle k \rangle=4$. Вставка демонстрирует безмасштабную сеть (ВА) в логарифмическом виде, где три крайние правые точки показывают наличие хавов

затель степени (для безмасштабных сетей) на явление ФП.

2.3 Уравнения динамики

Рассматривается система связанных квантовых уравнений Ланжевена. Эти уравнения стали динамическими уравнениями для изолированной системы, исследованной П.Р. Истхэмом и П.Б. Литтлвудом [77], в случае отсутствия влияния внешней среды.

Во-первых, показано, что данные уравнения в стационарном состоянии сводятся к результатам, полученным в [77] при использовании метода «интегралов по траекториям». Это описание квантовой теории, замещающее классическое определение одиночной, уникальной траектории системы полной суммой по бесконечному множеству всевозможных траекторий для расчёта квантовой амплитуды. Таким образом, динамические уравнения представляют собой ещё один метод изучения поляритонного конденсата, а что самое главное они объединяют собой лазерные уравнения.

В данной работе используется подход Гейзенберга [96] для получения системы динамических уравнений операторов рассматриваемой системы. Данный подход предполагает использование следующего выражения для определения динамики операторов $i\frac{\partial f}{\partial t} = [f, H]$. Таким образом возможно получить систему связанных квантовых уравнений Ланжевена:

$$i\dot{a} = \omega_a a - \frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum p_i, \quad (10a)$$

$$i\dot{p}_i = -2p_i \sum J_{ij} S_{z,j} - hp_i + \frac{\chi}{\sqrt{N}} a S_{zi}, \quad (10b)$$

$$i\dot{S}_{zi} = -\frac{2\chi}{\sqrt{N}} (ap_i^\dagger - a^\dagger p_i). \quad (10c)$$

С учетом релаксационных процессов (диссипации) были определены и введены в систему комплексные частоты:

$$i\dot{a} = \Omega_a a - \frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum p_i, \quad (11a)$$

$$i\dot{p}_i = -2p_i \sum J_{ij} S_{z,j} - Hp_i + \frac{\chi}{\sqrt{N}} a S_{zi}, \quad (11b)$$

$$i\dot{S}_{zi} = i\gamma_{\parallel} (S_{z,0} - S_{z,i}) - \frac{2\chi}{\sqrt{N}} (ap_i^\dagger - a^\dagger p_i), \quad (11c)$$

где $S_{z,0}$ – состояние равновесия инверсии населённостей, к которому стремится система, не подвергаемая воздействию. $\Omega_a = \omega_a - i\gamma_a$ и $H = h + i\gamma_{\perp}$ – комплексные частоты, включающие в себя релаксационные процессы.

В работе рассматривается стационарное состояние системы в приближении среднего поля для модели Дикке в сетевых структурах со степенным распределением, описанным в [97], которое известно в квантовой оптике [6, 77, 86]. Этот подход связан с когерентным состоянием квантованного поля, который предполагает пренебрежение межсистемными и корреляциями ДУС–поле.

Диссипация энергии — переход части энергии упорядоченных процессов в энергию неупорядоченных процессов, в конечном счёте — в теплоту.

В данной работе рассматривается явление лазерной генерации, поэтому изучаемая модель взаимодействует с окружающей средой, она открыта и поэтому содержит в себе диссипативные элементы, обозначенными, как γ_{\perp} , γ_{\parallel} и γ_a .

Все взаимодействия с окружающей средой подразумевают появление диссипационных компонент, которые, в случае лазерной системы, дают дополнительное уширение естественной ширины линии спектра.

Оно может быть однородным или неоднородным в зависимости от его физического происхождения:

- Неоднородное уширение имеет место, когда энергии оптического перехода расщепляются (в случае вырождений) или сдвигаются по-разному для разных участков. Физическое происхождение этого уширения зависит от материала, используемого для лазерной среды.
- Однородное уширение соответствует ситуации, когда все участки уширяются одинаково. Это может быть вызвано столкновениями с фононами или примесями, или колебаниями решетки, которые являются быстрыми по сравнению с лазерным процессом. Это уширение может быть смоделировано только с помощью соответствующих динамических ванн (систем).

Влияние систем в динамических уравнениях Гейзенберга после приближений, описанных в этом разделе, проявляется в виде констант затухания для поля фотонов (γ_a), поляризации (γ_{\perp}) и населённости уровней (γ_{\parallel}).

Такие системы не зависят от времени и частоты, постоянной накачки для инверсии и случайных флуктуирующих сил (шума) [98].

3 Фазовый переход в изолированной системе.

Стационарное состояние

Полагая, что оператор инверсии населенности действителен, из уравнений (4b) и (4c) можно получить дифференциальное выражение, связывающее когерентную поляризацию и инверсию населенностей (интеграл движения) [99]:

$$\frac{d}{dt}(S_{z,i}^2 + 4|p_i|^2) = 2\gamma_{\perp} \left(\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}} S_{z,i} (S_{z,0} - S_{z,i}) - 4|p_i|^2 \right). \quad (12)$$

В случае изолированной системы (когда диссипационные компоненты γ_{\perp} и γ_{\parallel} равны нулю) можно получить интеграл движения в следующем виде: $S_{z,i}^2 + 4|p_i|^2 = \text{const}$.

Наличие данной связи между поляризацией и инверсией населенности делает возможным получение решения для системы в стационарном состоянии. Для этого решение для поляризации и фотонного поля представлено в виде: $a = ae^{-i\mu t}$ и $p_i = p_i e^{-i\mu t}$.

Кроме того, была зафиксирована относительная фаза атомно-оптического взаимодействия таким образом, чтобы величина a являлась вещественной. Если принять химический потенциал равным нулю, то система уравнений (11) примет вид:

$$0 = \omega_a a - \frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum p_i, \quad (13a)$$

$$0 = -2p_i \sum J_{ij} S_{z,j} - hp_i + \frac{\chi}{\sqrt{N}} a S_{zi}. \quad (13b)$$

Подробный ход расчётов представлен в Приложении А.

Объединяя (13a) и (13b) получены следующие выражения для параметров порядка системы, представляющие коллективно взвешенную инверсию населенности $S_z = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum k_j S_{z,j}$ и среднюю амплитуду фотонного поля $\lambda = \frac{a}{\sqrt{N}}$:

$$\omega_a \lambda = \frac{\lambda}{N} \sum \frac{1}{\sqrt{(4Jk_i S_z + h)^2 + 4\lambda^2}}, \quad (14a)$$

$$S_z = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum \frac{k_i (h + 4Jk_i S_z)}{\sqrt{(4Jk_i S_z + h)^2 + 4\lambda^2}}. \quad (14b)$$

Для удобства в данной системе были введены следующие безразмерные величины: $J = J/\chi$, $h = h/\chi$, $\omega_a = \omega_a/\chi$.

Далее в работе нас интересует предел $N \gg 1$, что дает возможность сделать переход от дискретного к непрерывному спектру по распределению следующим образом: $\frac{1}{N} \sum_i \dots \rightarrow \int_{k_{min}}^{k_{max}} \dots p(k) dk$, где k_{min} и k_{max} это минимальное и максимальное значение степени узла k .

После чего система уравнений (14) принимает вид:

$$\omega_a \lambda = \lambda \int \frac{1}{\sqrt{(4Jk S_z + h)^2 + 4\lambda^2}} p(k) dk, \quad (15a)$$

$$S_z = \frac{1}{\langle k \rangle} \int \frac{k(h + 4Jk S_z)}{\sqrt{(4Jk S_z + h)^2 + 4\lambda^2}} p(k) dk. \quad (15b)$$

Уравнение (15a) определяет переход к сверхизлучательной фазе, который описывается параметром порядка λ , в то время как уравнение (15b) определяет фазовый переход типа «ферромагнетик-парамагнетик».

Настоящая работа направлена на поиск совместных решений уравнений системы уравнений (15) с $\lambda \neq 0$, $S_z \neq 0$, а рассматриваемые фазовые переходы могут быть установлены с помощью данных параметров порядка. Например, несверхизлучательная (нормальная) фаза соответствует тривиальному решению уравнения (15b) с $\lambda = 0$, что характеризует порог генерации системы. Уравнение (15b), как это было отмечено выше, отвечает за фазовый переход из парамагнитного состояния с $S_z = 0$ в ферромагнитное состояние с $S_z \neq 0$ в сетевой системе.

Стоит отметить, что совместные решения уравнений (15a – 15b) на параметры порядка ищутся при $h = 0$, однако можно рассмотреть и другой случай – если учитывать влияние топологии J и в то же время постепенно увеличивать частоту фотонного поля h .

Так на рисунке 4 представлены зависимости параметров порядка от

влияния внешнего поля h .

Видно, что при увеличении его воздействия параметр $\lambda \rightarrow 0$, и происходит переход от нормальной фазы к сверхизлучательной. В то же время S_z возрастает пропорционально полю, что показывает достижение упорядоченного состояния.

Также показано, что при увеличении частоты поля h до критического значения при $h = 1.6$ параметр порядка $\lambda = 0$, и топология сети перестает играть роль для любого количества ДУС (N).

Таким образом, фазовых переходов можно достигнуть не только варьируя связность сети, но и воздействуя внешним фотонным полем.

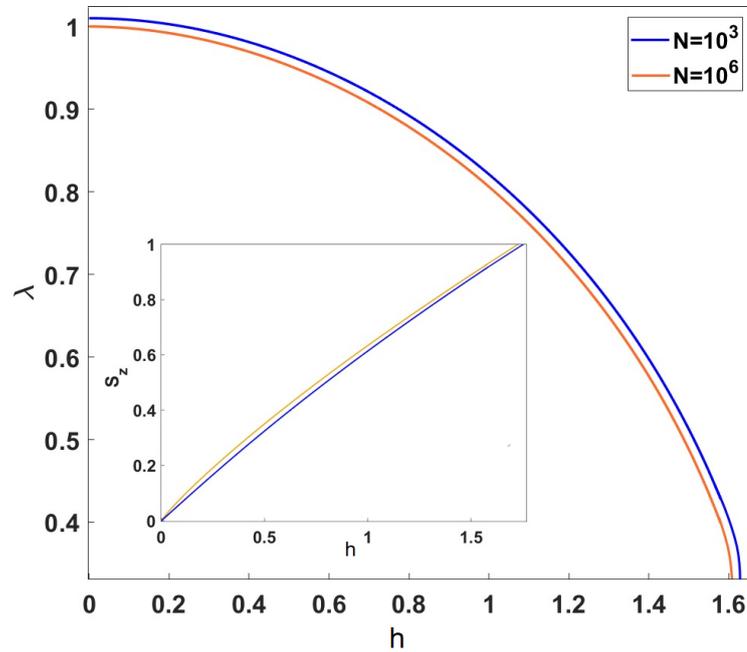


Рисунок 4 – Зависимость параметров порядка λ и S_z от частоты внешнего поля h для безмасштабной сетевой структуры при $\gamma = 3$. Параметры системы: $\omega_a = 0.5$, $J = 0.0625$, $k_{min} = 1$

3.1 Фазовый переход в регулярной сети

В данном разделе исследуется проблема фазовых переходов в регулярной сетевой архитектуре. Как было отмечено выше, она характеризуется распределением степеней дельта функцией Дирака $p(k) = \delta(k - k_0)$ с некоторой постоянной степенью узлов $k = k_0$, см рисунки 2 и 3. В данном случае, при $\omega_a = 4Jk_0 = 1$ можно полностью симметризовать выражения (15a) и (15b) относительно взвешенной инверсии населённостей S_z и средней амплитуды фо-

тонного поля λ . Таким образом, зафиксировав один из параметров порядка, можно исследовать свойства фазового перехода для другого,

$$F_1(S_z, \lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{S_z^2 + 4\lambda^2}} = 1. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) с заданными значениями λ и S_z дает соответствующую фазовую кривую (рисунок 5б), которая формирует следующие фазовые переходы в системе. Точка O соответствует сверхизлучательной парамагнитной фазе с $\lambda = S_z = 0$. Линия OA формирует фазовую границу сверхизлучательного-нормального состояния, в то время как линия OB формирует переход из парамагнитного состояния в ферромагнитное, при наличии сверхизлучения.

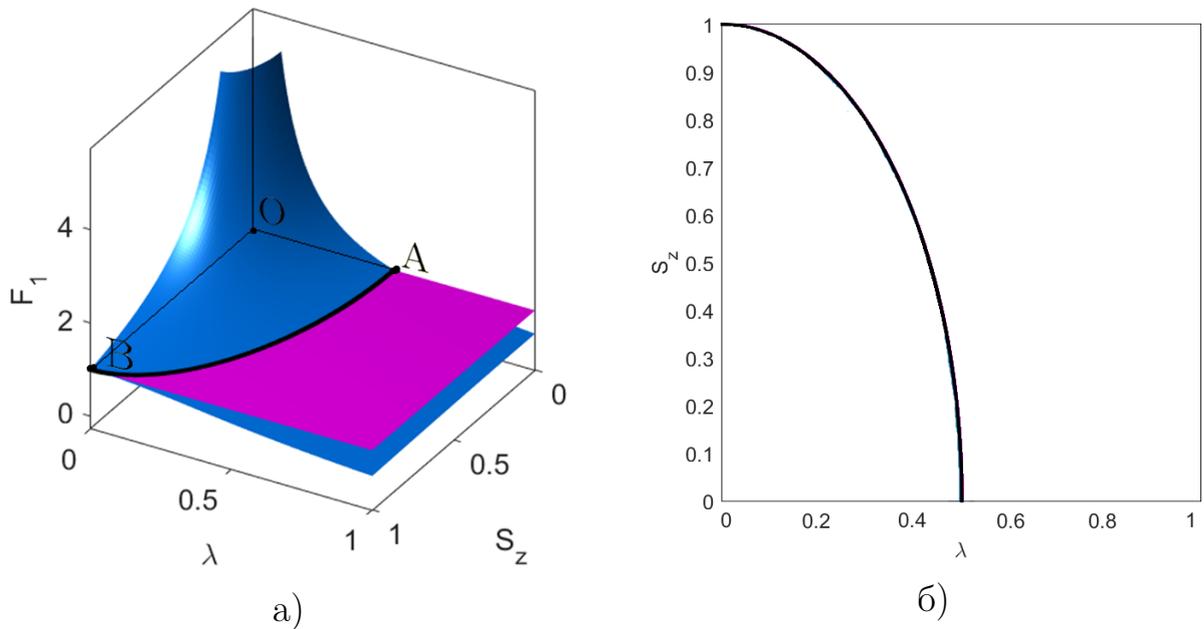


Рисунок 5 – (а) Зависимость $F_1(S_z; \lambda)$ (синяя поверхность), единичная плоскость (фуксия) от S_z и λ при $4Jk_0 = \omega_a = 1$ и $h = 0$. (б) Фазовая граница на $S_z - \lambda$ плоскости. Точка пересечения функционала с единичной плоскостью определяет фазовую границу системы. Точка O соответствует сверхизлучательной парамагнитной фазе. Линия OB формирует фазовую границу парамагнетик-ферромагнетик при наличии сверхизлучения. Линия OA формирует переход от сверхизлучательного состояния к нормальному при наличии парамагнитной фазы

3.2 Фазовый переход в безмасштабной и случайной сетях

В отличие от регулярной сетевой архитектуры, фазовые переходы в безмасштабных и в случайных сетях зависят от конкретных характеристик распределения.

Рассмотрим безмасштабную и случайную сетевые архитектуры, распределение степеней узлов которых подчиняются уравнениям (6) и (9) соответственно. Используя систему уравнений (15) и метод описанный выше, при $h = 0$, получим следующие функционалы, решение которых даст фазовое состояние системы:

$$F_1(S_z, \lambda) \equiv \frac{1}{\omega_a} \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{p(k)}{\sqrt{(4JkS_z)^2 + 4\lambda^2}} dk = 1, \quad (17a)$$

$$F_2(S_z, \lambda) \equiv \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{4Jk^2}{\langle k \rangle \sqrt{(4JkS_z)^2 + 4\lambda^2}} p(k) dk = 1. \quad (17b)$$

Пересечение функционалов $F_1(S_z, \lambda)$ и $F_2(S_z, \lambda)$ с единичной плоскостью (рисунок 6), формирует фазовое состояние системы с определенной взвешенной инверсией S_z и средней амплитудой λ . Обобщая полученные решения для разных значений γ (показатель степени для безмасштабной сети), можно представить график для фазовой границы на плоскости $\lambda - S_z$ (рисунок 7).

Данную фазовую границу можно объяснить следующим образом. Сами по себе случайные и безмасштабные сети поддерживают узловое взаимодействие между ДУС из-за специфических топологических особенностей (хабы, кластеры и т. д.). Это взаимодействие приводит к существованию эффективного локального поля, ответственного за установление упорядоченного состояния S_z даже без внешнего поля h .

В тоже время, сверхизлучательный фазовый переход, как видно на рисунке 7, зависит от топологических особенностей сети в пределе $\lambda \rightarrow 0$. Заметим, что зеленая линия стремится к ферромагнитной $S_z = 1$ и сверхизлучательной фазе $\lambda = 0$ при увеличении $\langle k \rangle$.

В пределах большого степенного показателя, $\gamma > 3$, когда параметры $\langle k \rangle \approx \zeta \propto 1$ и мало изменяются в данном диапазоне (см. рисунок 1) можно получить аппроксимационную формулу для данной фазовой границы (черная пунктир-

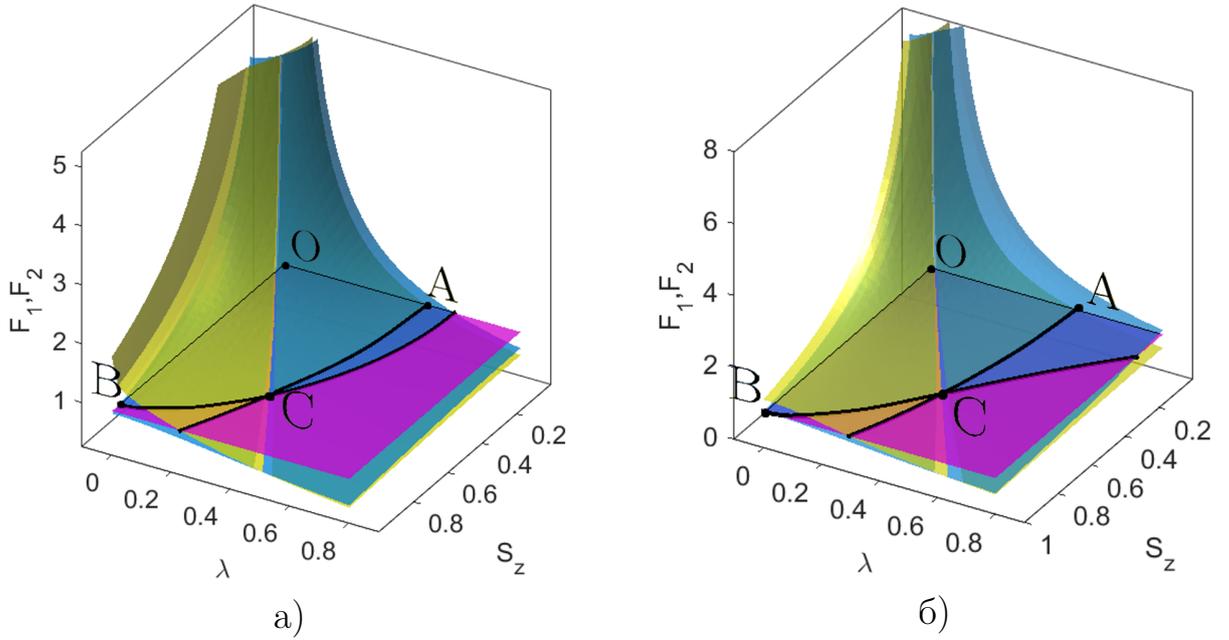


Рисунок 6 – Зависимость $F_1(S_z; \lambda)$ (голубая поверхность) от $F_2(S_z; \lambda)$ (жёлтая поверхность) при пересечении с единичной плоскостью (фуксия) относительно S_z и λ на (а) распределение Пуассона с параметрами $\langle k \rangle = 3.87$, $k_{max} = 9$, $J = 0.0625$ и (б) на степенное распределение с параметрами $\gamma = 3$, $\langle k \rangle = 3.874$, $k_{max} = 63$, $J = 0.0625$. Точка пересечения функционалов с единичной плоскостью, точка C , определяет фазовое состояние системы. Точка O соответствует сверхизлучательной парамагнитной фазе. Линия OB формирует фазовую границу парамагнетик-ферромагнетик при наличии сверхизлучения. Линия OA формирует переход от сверхизлучательного состояния к нормальному при наличии парамагнитной фазы

ная линия).

В данном случае, распределение по k заменяется на ее среднее значение $k = \langle k \rangle$. Таким образом, система уравнений (17) имеет вид:

$$\omega_a \sqrt{16J^2 \langle k \rangle^2 S_z^2 + 4\lambda^2} = 1, \quad (18a)$$

$$4J\omega_a \zeta = 1. \quad (18b)$$

Черная пунктирная кривая на рисунке 7 представляет собой решение системы уравнений (18) при $\langle k \rangle = 3.1$ и $\zeta = 4$. Четко видно, что данный подход применим при $3.75 \leq \gamma \leq 3.25$. При $\gamma \leq 3.25$ расхождение между двумя пунктирными кривыми растет, и самосогласованного решения уравнений не существует.

Фазовые состояния для случайной сети, также представлены на рисун-

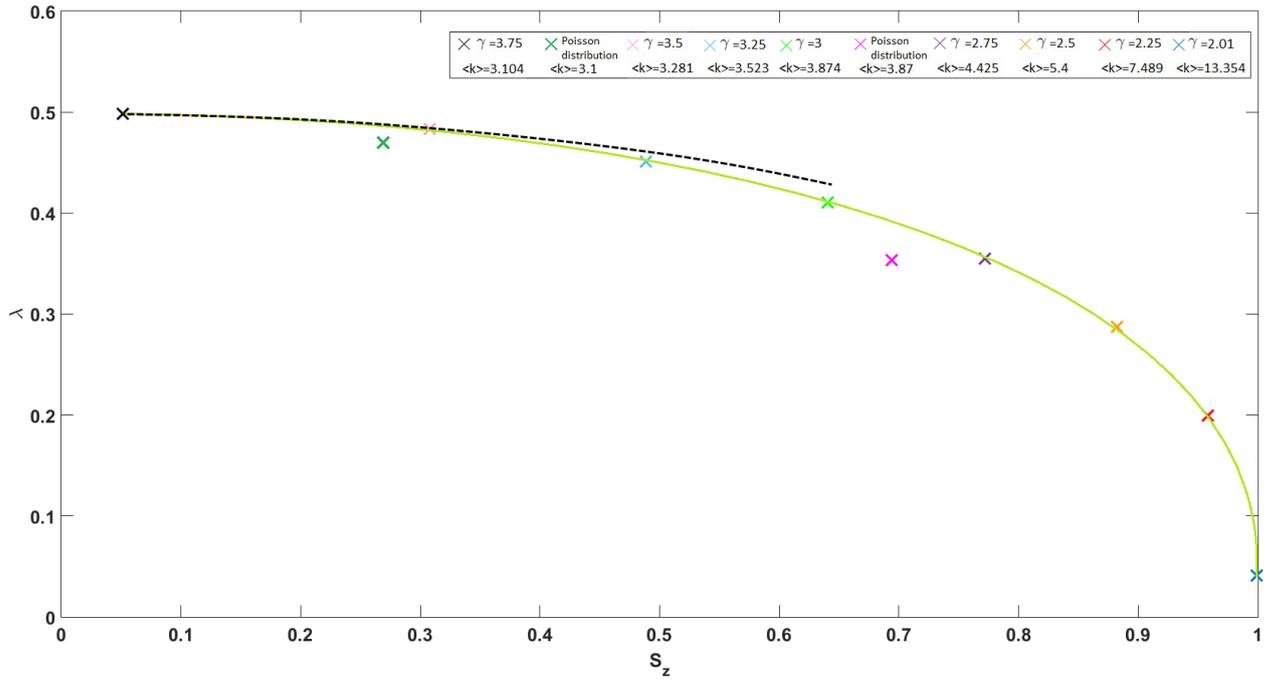


Рисунок 7 – Фазовая граница $S_z - \lambda$ для безмасштабной сетевой архитектуры, определяемая системой уравнений (17). Параметры системы: $J = 0.0625$, $\omega_a = 1$, $h = 0$, $N = 1000$. Максимальное (минимальное) значение степени узла для безмасштабных сетей: $k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$, ($k_{min} = 2$). Для случайных сетей: $k_{max} = 11$, $\langle k \rangle = 3.87$ и $k_{max} = 9$, $\langle k \rangle = 3.1$, $k_{min} = 0$. Черная пунктирная линия соответствует аппроксимационному решению системы уравнений (18).

ке 7 для разных значений $\langle k \rangle$. Данная сетевая архитектура имеет схожую тенденцию к исчезновению λ при увеличении $\langle k \rangle$. Также, как видно из рисунка, фазовое состояние для случайной и безмасштабной сетевой архитектуры близко, при больших значениях γ у последнего.

4 Фазовый переход в открытой системе.

Стационарное состояние

Для нахождения стационарного решения открытой системы, учитывающей диссипационные потери, аналогично разделу 4, в уравнениях (11a)–(11c) были сделаны следующие замены, касающиеся оператора фотонного поля и оператора диссипации $a = a \exp^{-i\mu t}$ и $p_i = p_i \exp^{-i\mu t}$.

В работе мы рассматриваем приближение канонического ансамбля с нулевым значением химического потенциала $\mu = 0$. Таким образом уравнения (11a) и (11b) сводятся к системе алгебраических уравнений:

$$0 = \Omega_a a - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum p_i, \quad (19a)$$

$$0 = -2p_i \sum J_{ij} S_{z,j} - H p_i + \frac{1}{\sqrt{N}} a S_{zi}. \quad (19b)$$

Данную систему алгебраических уравнений можно разрешить относительно коллективно взвешенной инверсии S_z и нормированной амплитуды фотонного поля λ . Для этого из уравнения (19a) и (19b) выразим соответствующие значения амплитуды фотонного поля и поляризации i го узла.

$$a = \frac{1}{\Omega_a \sqrt{N}} \sum p_i, \quad (20a)$$

$$p_i = \frac{a S_{z,i}}{\sqrt{N} (2 \sum J_{ij} S_{z,j} + H)}. \quad (20b)$$

Далее поставим выражение (20b) в (11c) и выразив соответствующую инверсию S_{zi} i го узла. Стоит отметить, что все величины присутствующие в выражениях далее нормированы, аналогично разделу 4, следующим образом: $J = J/\chi$, $h = h/\chi$, $\omega_a = \omega_a/\chi$. Таким образом:

$$S_{z,i} = \frac{\gamma_{\parallel} S_{z,0}}{\gamma_{\parallel} + \frac{4}{N} |a|^2 \left(\frac{\gamma_{\perp}}{(2 \sum J_{ij} S_{z,j} + H^{\dagger})(2 \sum J_{ij} S_{z,j} + H)} \right)}. \quad (21)$$

Для получения выражения, определяющего фазовый переход сверхизлучение-

нормальное состояние, объединим выражения (21), (20b) и (20a):

$$a = \frac{\gamma_{\parallel} a S_{z,0}}{\Omega_a N} \sum \frac{1}{(2 \sum J_{ij} S_{z,j} + H) \gamma_{\parallel} + \frac{4 |a|^2 \gamma_{\perp}}{N(2 \sum J_{ij} S_{z,j} + H^{\dagger})}}. \quad (22)$$

Так как: $\sum J_{ij} S_{z,j} = 2Jk_i S_z$, где $S_z = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum k_j S_{z,j}$, а с учетом $\lambda = \frac{a}{\sqrt{N}}$, получим следующую систему уравнений:

$$a = \frac{\gamma_{\parallel} a S_{z,0}}{\Omega_a N} \sum \frac{1}{(4Jk_i S_z + H) \gamma_{\parallel} + \frac{4 |a|^2 \gamma_{\perp}}{N(4Jk_i S_z + H^{\dagger})}}, \quad (23a)$$

$$S_{z,i} = \frac{\gamma_{\parallel} S_{z,0}}{\gamma_{\parallel} + \frac{4\lambda^2 \gamma_{\perp}}{(4Jk S_z + h - i\gamma_{\perp})(4Jk S_z + h + i\gamma_{\perp})}}. \quad (23b)$$

Тогда, переходя к непрерывному спектру (подробнее в разделе 4), система уравнений в окончательном виде примет вид:

$$\lambda(\omega_a - i\gamma_a) = \lambda \gamma_{\parallel} S_{z,0} \int \frac{(4Jk S_z + h - i\gamma_{\perp}) p(k) dk}{((4Jk S_z + h)^2 + \gamma_{\perp}^2) \gamma_{\parallel} + 4\lambda^2 \gamma_{\perp}}, \quad (24a)$$

$$S_z = \frac{\gamma_{\parallel} S_{z,0}}{\langle k \rangle} \int \frac{kp(k) dk}{\gamma_{\parallel} + \frac{4\lambda^2 \gamma_{\perp}}{(4Jk S_z + h)^2 + \gamma_{\perp}^2}}. \quad (24b)$$

Где первое выражение, аналогично (15a), характеризует ФП сверхизлучение-нормальное состояние, второе выражение – ФП ферромагнетик-парамагнетик.

4.1 Фазовый переход в регулярной сети

Для регулярной сетевой архитектуры с $p(k) = \delta(k - k_0)$ система выражений (24) упрощается. Аналогично подходу, описанному в разделе 4.1, функционалы системы при $h = 0$ определяются следующим образом:

$$F_1 \equiv \frac{\gamma_{\parallel} S_{z,0}}{(\omega_a - i\gamma_a)} \frac{(4Jk_0 S_z - i\gamma_{\perp})}{((4Jk_0 S_z)^2 + \gamma_{\perp}^2) \gamma_{\parallel} + 4\lambda^2 \gamma_{\perp}} = 1, \quad (25a)$$

$$F_2 \equiv \frac{\gamma_{\parallel} S_{z,0}}{S_z} \frac{1}{\gamma_{\parallel} + \frac{4\lambda^2 \gamma_{\perp}}{(4Jk_0 S_z)^2 + \gamma_{\perp}^2}} = 1. \quad (25b)$$

Как видно из данных выражений, они не являются симметричными относительно взвешенной инверсии населённостей S_z и нормированной амплитуды поля λ , что говорит о наличии лишь одного фазового состояния, в отличие от случая изолированной системы, где формировалась фазовая граница.

Решение данных функционалов представлено на рисунке 8. Здесь точка пересечения поверхностей с единичной плоскостью, точка C , определяет фазовое состояние системы. Оно было получено при значениях диссипации $\gamma_a = 0.7$, $\gamma_{\parallel} = 0.7$, $\gamma_{\perp} = 0.7$.

Исходя из этого можно сделать вывод, что наличие диссипационного воздействия приводит к ограничениям в формировании фазового состояния открытой системы.

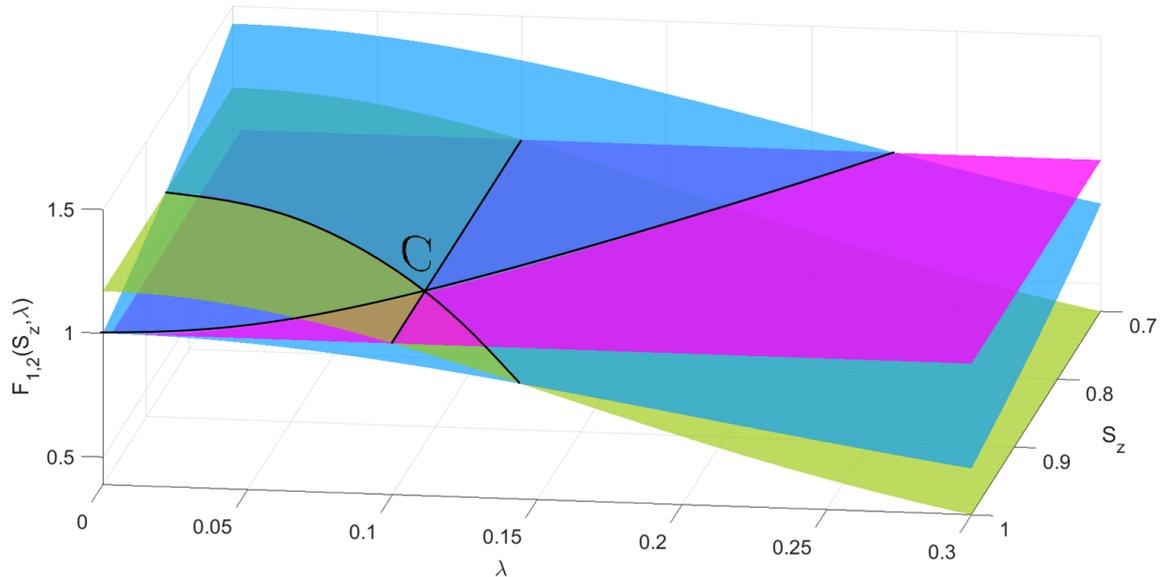


Рисунок 8 – Зависимость $F_1(S_z; \lambda)$ (жёлтая поверхность) от $F_2(S_z; \lambda)$ (голубая поверхность) при пересечении с единичной плоскостью (фуксия) относительно S_z и λ для распределения по Дельта-функции с параметрами: $\langle k \rangle = 4$, $\gamma_a = 0.7$, $\gamma_{\parallel} = 0.7$, $\gamma_{\perp} = 0.7$, $N = 1000$, $h = 0$, $S_{z0} = 1$, $\omega_a = 1.12$, $J = 0.0001$. Точка пересечения функционалов с единичной плоскостью, точка C , определяет фазовое состояние системы

Однако, важно отметить, что построение функционалов системы (25) было выполнено при $J = 0.0001$, т.е. фазовое состояние системы определяется только в пределе малой константы взаимодействия $J \rightarrow 0$. При увеличении константы взаимодействия, с учетом постоянных диссипационных параметров решение для фазового состояния перестает существовать.

4.2 Фазовый переход в безмасштабной и случайной сетях

Переходя к безмасштабным и случайным сетевым архитектурам, следует учитывать, что, как было описано в разделе 4.2, фазовые переходы в них зависят от конкретных характеристик распределения степеней узлов, подчиняющихся уравнениям (6) и (9) соответственно.

Используя систему уравнений (24), были получены следующие функционалы, решение которых даёт фазовое состояние системы:

$$F_1(S_z, \lambda) \equiv \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{\gamma_{\parallel} S_{z0} (4JkS_z - \gamma_{\perp} i) p(k)}{(\omega_a - \gamma_a i) ((4JkS_z)^2 + \gamma_{\perp}^2) \gamma_{\parallel} + 4\lambda^2 \gamma_{\perp}} dk = 1, \quad (26a)$$

$$F_2(S_z, \lambda) \equiv \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{\gamma_{\parallel} S_{z0} k p(k)}{S_z < k > \left(\gamma_{\parallel} + \frac{4\lambda^2 \gamma_{\perp}}{16J^2 k^2 S_z^2 + \gamma_{\perp}^2} \right)} dk = 1. \quad (26b)$$

Пересечение функционалов $F_1(S_z, \lambda)$ и $F_2(S_z, \lambda)$ с единичной плоскостью формирует фазовое состояние системы с определенной взвешенной инверсией S_z и средней амплитудой λ :

Важной особенностью открытой системы, как уже было упомянуто в пункте 5.1, является влияние диссипационных компонент (см. (11a – 11b)). Относительно изолированной системы они значительно меняют поведение полученных функционалов, что несколько осложняет задачу по нахождению фазового состояния.

Стоит отметить, что для случая идеального резонатора значения диссипации поляризации и инверсии населённостей определяются, как $\gamma_{\perp} = \frac{1}{2} \gamma_{\parallel}$, а для остальных - как $\gamma_{\perp} \gtrsim \gamma_{\parallel}$, при этом γ_a является свободно варьируемой величиной [100].

Тогда, зафиксировав первый случай при решении функционалов (26a – 26b), как начальную точку C , было получено решение системы для безмасштабной и случайной сети при $\gamma_a = 0$, $\gamma_{\parallel} = 0.5$, $\gamma_{\perp} = 0.25$ (рисунок 9).

Так как в зависимости от величин диссипаций, положение данной точки будет изменяться, меняя фазовое состояние системы, то, чтобы проследить их динамику, будем варьировать значения для γ_{\perp} и γ_a относительно постоянной γ_{\parallel} . Данная процедура описывается для случайной сетевой архитектуры (рисунок 10) и для безмасштабной (рисунок 11).

Было замечено, что при увеличении диссипации фотонного поля и по-

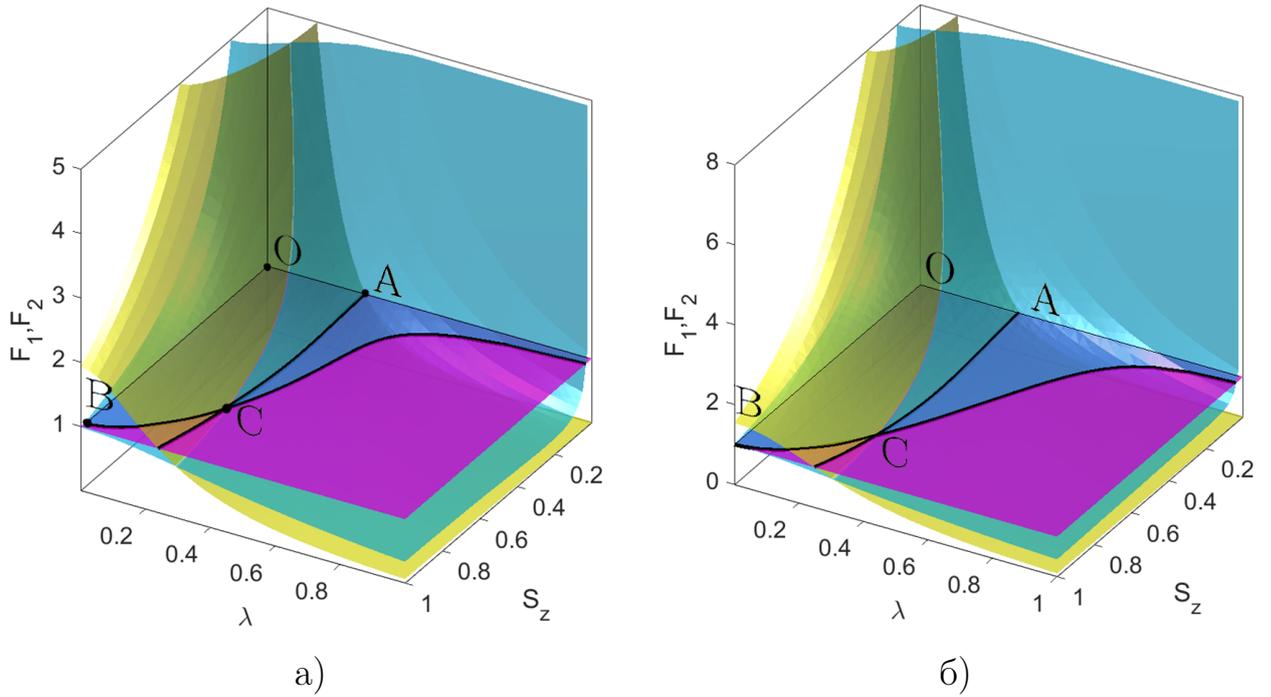


Рисунок 9 – Зависимость $F_1(S_z; \lambda)$ (жёлтая поверхность) от $F_2(S_z; \lambda)$ (голубая поверхность) при пересечении с единичной плоскостью (фиолетовая) относительно S_z и λ на (а) распределение Пуассона с параметрами $\gamma_a \rightarrow 0$, $\gamma_{\parallel} = 0.5$, $\gamma_{\perp} = 0.25$, $N = 1000$, $h = 0$, $S_{z0} = 1$, $\omega_a = 1$, $J = 0.0625$, $\langle k \rangle = 3.1$, $k_{max} = 9$ и (б) на степенное распределение с параметрами $\gamma = 3$, $\langle k \rangle = 3.874$, $k_{max} = 63$, $\gamma_a \rightarrow 0$, $\gamma_{\parallel} = 0.5$, $\gamma_{\perp} = 0.25$, $N = 1000$, $h = 0$, $S_{z0} = 1$, $\omega_a = 1$, $J = 0.0625$. Точка пересечения функционалов с единичной плоскостью, точка C , определяет фазовое состояние системы. Точка O соответствует сверхизлучательной парамагнитной фазе. Линия OB формирует фазовую границу парамагнетик-ферромагнетик при наличии сверхизлучения. Линия OA формирует переход от сверхизлучательного состояния к нормальному при наличии парамагнитной фазы

ляризации, фазовое состояние системы меняется, а именно, на сверхизлучательную фазу (точки A, D) с ростом параметра порядка S_z .

Помимо этого для случайной сетевой архитектуры не достигается переход в ферромагнитное состояние, в отличие от безмасштабной, где наступает фаза ферромагнетика.

Уменьшение же влияния диссипации поляризации приводит к снижению порядка в системе (точка B) и переходу её в несверхизлучательную фазу с $\lambda = 1$, а затем при $\lambda > 1$ – в состояние лазерной генерации.

Стоит отметить, что безмасштабная и случайная сетевые архитектуры имеют аналогичные фазовые кривые, при варьировании γ_a и γ_{\perp} . Таким образом, можно заключить, что данные фазовые границы мало зависят от

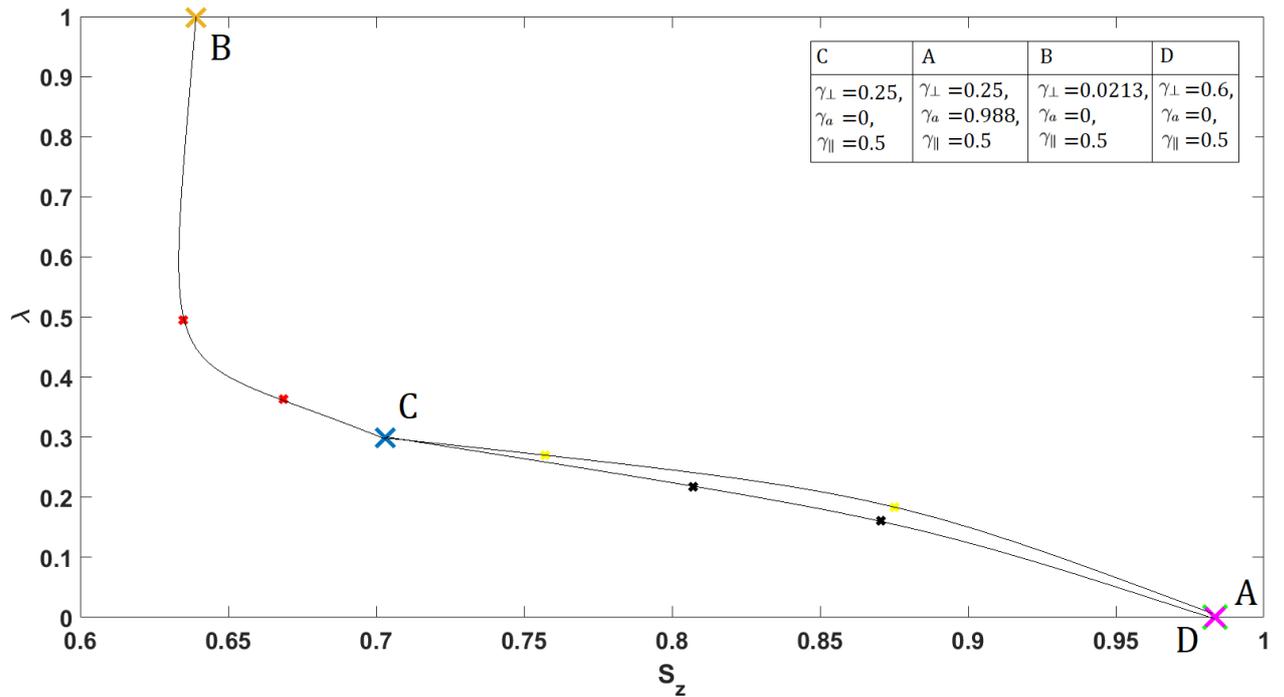


Рисунок 10 – Фазовая граница на $\lambda - S_z$ образующееся пересечением функционалов (26) для случайной сетевой архитектуры. Параметры системы: $\langle k \rangle = 3.874, k_{min} = 0, k_{max} = 9, N = 1000, h = 0, S_{z0} = 1, \omega_a = 1, J = 0.0625$. Точка *A* и *D* иллюстрируют переход сверхизлучательному состоянию, в то время, как точка *B* характеризует неупорядоченную нормальную фазу

эффекта конечного размера сети, т.е. диссипационные процессы имеют большое значение.

Для оценки влияния эффекта конечного размера сети, аналогично рисунку 7, была построена фазовая траектория точки *C* для безмасштабной сетевой архитектуры при разных показателях степени распределения (рисунок 12). Можно заметить, что фазовая кривая имеет аналогичное изолированной системе поведение.

Однако, стоит отметить, что ферромагнитное состояние системы не достигается при данных параметрах системы. Это связано с тем, что наличие диссипационных процессов, при малых значениях параметра γ для степенного распределения, уменьшает воздействие локального поля, отвечающее за установление ферромагнитного состояния.

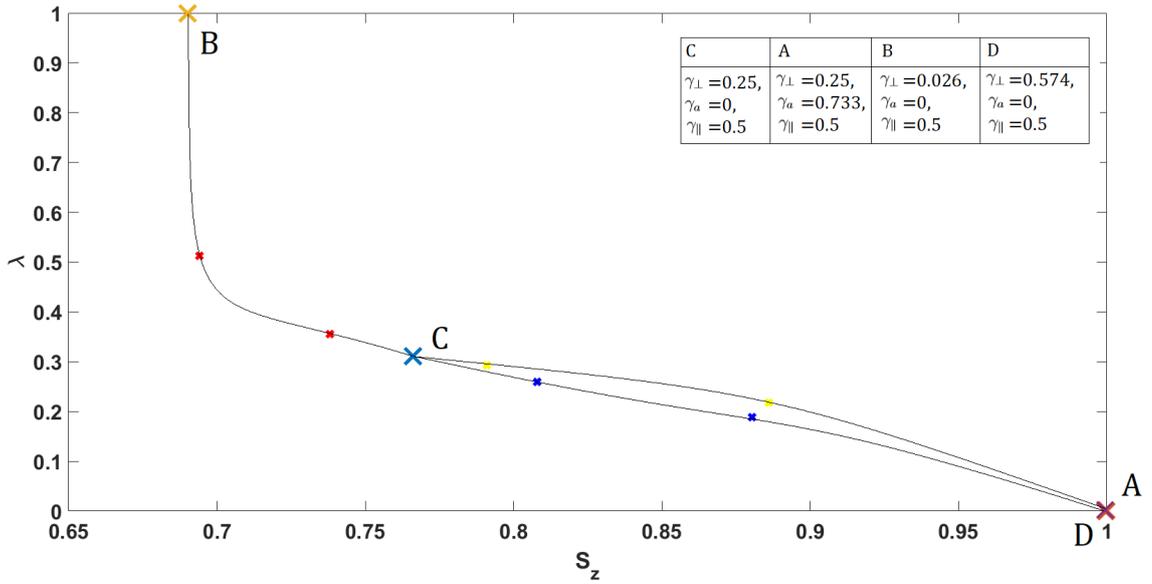


Рисунок 11 – Фазовая граница на $\lambda - S_z$ образующееся пересечением функционалов (26) для безмасштабной сетевой архитектуры. Параметры системы: $\gamma = 3, \langle k \rangle = 3.874, k_{min} = 2, k_{max} = 63, N = 1000, h = 0, S_{z0} = 1, \omega_a = 1, J = 0.0625$. Точка A и D иллюстрируют переход сверхизлучательному, ферромагнитному состоянию, в то время, как точка B характеризует неупорядоченную нормальную фазу

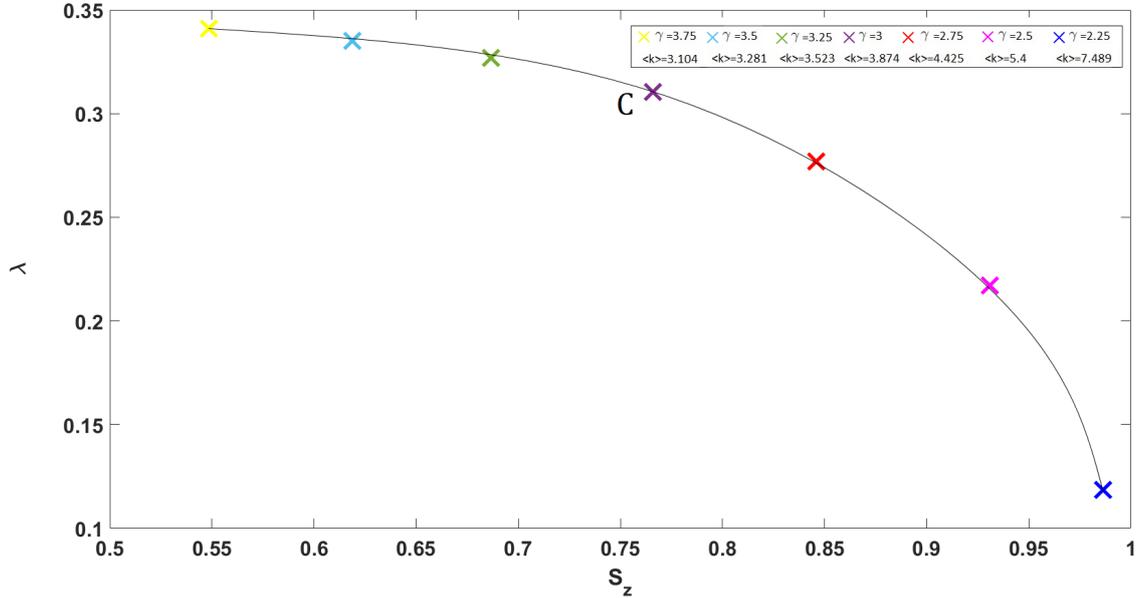


Рисунок 12 – Фазовая граница $\lambda - S_z$ для безмасштабной сетевой архитектуры, определяемая системой уравнений (26). Параметры системы $4J = 0.0625, \omega_a = 1, h = 0, N = 1000, \gamma_a = 0, \gamma_{\parallel} = 0.5, \gamma_{\perp} = 0.25, S_{z0} = 1$. Максимальное (минимальное) значение степени узла для безмасштабных сетей: $k_{max} = k_{min} N^{\frac{1}{\gamma-1}}, (k_{min} = 2)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработана модель лазерной генерации, основанная как на равновесном, так и неравновесном ФП, и учитывающая нелинейное взаимодействие ДУС, которое определяется сетевой архитектурой, с внешним квантованным фотонным полем.

Исследовались регулярные, случайные и безмасштабные сетевые архитектуры, характеризующиеся распределением степеней узлов Дельта-функцией, случайным распределением (Пуассона) и степенным законом ($p(k) \propto k^{-\gamma}$), соответственно. С помощью подхода Гейзенберга получены основные динамические уравнения на операторы фотонного поля, поляризации и инверсии населённостей, определяющие параметры порядка системы, такие как нормированную амплитуду поля и взвешенную инверсию населенности.

В работе показано, что сетевая архитектура играет ключевую роль при формировании сверхизлучательного фазового перехода. Например, в пределах аномального режима такие сети обладают большим набором топологических особенностей (например, кластеры), что вызывает сильное эффективное взаимодействие между ДУС. Данное взаимодействие поддерживает полностью упорядоченное ферромагнитное состояние, которое практически не чувствительно к изменениям внешнего фотонного поля.

В безмасштабном режиме сети демонстрируют исчезновение коллективной взвешенной инверсии. СИ фазовый переход происходит в присутствии некоторого ферромагнитного состояния.

В случайном режиме безмасштабных сетей влияние таких параметров сети, как средняя степень узлов $\langle k \rangle$ и $\zeta = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$, исчезает, что играет большую роль для СИ ФП.

Рассматривались особенности сверхизлучательного квантового фазового перехода в пределе нулевой температуры, вызванные эффектом конечного размера сети. Показано, что СИ фазовый переход происходит при критическом значении частоты квантового фотонного поля, которая в свою очередь определяется топологией системы ДУС.

Для оценки влияния диссипационных процессов, в работе был рассмотрен случай открытой системы, для которой были введены диссипационные компоненты для фотонного поля, поляризации и населённости уровней. Как

было показано, влияние диссипации в открытой системе оказывает сильное воздействие на фазового состояние системы. К примеру, как было показано, что при увеличении диспации фотонной и поляризационной компоненты, система стремится к ферромагнитному состоянию.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] S.E. Ahnert, W.P. Grant, and C.J. Pickard. Revealing and exploiting hierarchical material structure through complex atomic networks. *NPJ Computational Materials*, 3(1):1–8, 2017.
- [2] D. Tsarev, A. Trofimova, A. Alodjants, and A. Khrennikov. Phase transitions, collective emotions and decision-making problem in heterogeneous social systems. *Scientific reports*, 9(1):1–13, 2019.
- [3] D. Easley, J. Kleinberg, et al. *Networks, crowds, and markets*, volume 8. Cambridge university press Cambridge, 2010.
- [4] R.H. Dicke. Coherence in spontaneous radiation processes. *Physical review*, 93(1):99, 1954.
- [5] K. Hepp and E.H. Lieb. Equilibrium statistical mechanics of matter interacting with the quantized radiation field. *Physical Review A*, 8(5):2517, 1973.
- [6] Y.K. Wang and F.T. Hioe. Phase transition in the dicke model of superradiance. *Physical Review A*, 7(3):831, 1973.
- [7] C. Emary and T. Brandes. Chaos and the quantum phase transition in the dicke model. *Physical Review E*, 67(6):066203, 2003.
- [8] J. Larson and E.K. Irish. Some remarks on ‘superradiant’ phase transitions in light-matter systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(17):174002, 2017.
- [9] A. Khrennikov. ‘social laser’: action amplification by stimulated emission of social energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374(2058):20150094, 2016.
- [10] A. Khrennikov, Z. Toffano, and F. Dubois. Concept of information laser: from quantum theory to behavioural dynamics. *The European Physical Journal Special Topics*, 227(15):2133–2153, 2019.

- [11] W. Cota, S.C. Ferreira, R. Pastor-Satorras, and M. Starnini. Quantifying echo chamber effects in information spreading over political communication networks. *EPJ Data Science*, 8(1):1–13, 2019.
- [12] F. Baumann, Ph. Lorenz-Spreen, I. M. Sokolov, and M. Starnini. Modeling echo chambers and polarization dynamics in social networks. *Physical Review Letters*, 124(4):048301, 2020.
- [13] S. Fortunato and D. Hric. Community detection in networks: A user guide. *Physics reports*, 659:1–44, 2016.
- [14] G. Bianconi. Mean field solution of the ising model on a barabási–albert network. *Physics Letters A*, 303(2-3):166–168, 2002.
- [15] K. Suchacki and J.A. Hołyst. Ising model on connected complex networks. In *Order, Disorder and Criticality: Advanced Problems of Phase Transition Theory Volume 3*, pages 167–200. World Scientific, 2013.
- [16] V. Guleva, E. Shikov, K. Bochenina, S. Kovalchuk, A. Alodjants, and A. Boukhanovsky. Emerging complexity in distributed intelligent systems. *Entropy*, 22(12):1437, 2020.
- [17] R. Albert and A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*, 74(1):47, 2002.
- [18] M. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM review*, 45(2):167–256, 2003.
- [19] S. Vucchaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D-U Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424(4-5):175–308, 2006.
- [20] В.И. Масленников, О.В. Некоркин. Адаптивные динамические сети. *Успехи физических наук*, 187(7):745–756, 2017.
- [21] М.В. Иванченко. Синхронизация и образование структур в сложных осцилляторных ансамблях (колебания на нескольких временных масштабах, нерегулярная топология связи). PhD thesis, Нижегород. гос. ун-т им. НИ Лобачевского, 2007.

- [22] Г.П. Сафина, О.С. Циронис. Формирование фазовых кластеров в иерархических ансамблях джозефсоновских переходов. In Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации, pages 188–189, 2019.
- [23] Е.В. Терехин, А.Т. Будилова. Сетевые механизмы физиологической регуляции. Биологический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Успехи физиологических наук, 26(4), 1995.
- [24] А.В. Олескин. Сетевые структуры, социальная организация микроорганизмов и взаимоотношения микробиота-хозяин. Вестник восстановительной медицины, (1):29–36, 2016.
- [25] А.В. Олескин. Сетевые структуры в биосистемах. Журнал общей биологии, 74(2):112–138, 2013.
- [26] А.И. Константинов С.В. Софронова Е.А. Губайдуллин, И.М. Дивеев. Разработка кинетических моделей сложных химических реакций методом сетевого оператора. Современные проблемы науки и образования, (6):157–157, 2014.
- [27] А.В. Немчинов, Д.М. Кочетков. Анализ планировочных схем сетей автомобильных дорог. Вестник евразийской науки, 8(5 (36)), 2016.
- [28] Д.Е. Поздяев, В.И. Шапошников. Применение эвристических методов оптимизации для многокритериальной оценки и модификации транспортной сети авиакомпании. In Информационные системы и технологии-2019, pages 754–762, 2019.
- [29] А.И. Арефьева Е.В. Кинаш Н.А. Тихомиров, А.А. Труфанов. Сетевое описание и детализация угроз в проблемах обеспечения безопасности мегаполис. Научные и образовательные проблемы гражданской защиты, (2), 2014.
- [30] Е.В. Перепелица. Беспроводная коммуникация в воззрениях Мануэля Кастельса. Право. by, (5):72–77, 2020.
- [31] S. Brito, A. Canabarro, R. Chaves, and D. Cavalcanti. Statistical properties of the quantum internet. Physical Review Letters, 124(21):210501, 2020.

- [32] М.А. Сафонова. Сетевая структура и идентичности в локальном сообществе социологов. Социологические исследования, (6):107–120, 2012.
- [33] M. Newman, A.-L. Barabási, and D.J. Watts. The structure and dynamics of networks.
- [34] L. da F. Costa, F.A. Rodrigues, G. Travieso, and P. R. Villas Boas. Characterization of complex networks: A survey of measurements. *Advances in physics*, 56(1):167–242, 2007.
- [35] T. Gross and B. Blasius. Adaptive coevolutionary networks: a review. *Journal of the Royal Society Interface*, 5(20):259–271, 2008.
- [36] B. Blasius and T. Gross. Dynamic and topological interplay in adaptive networks. *Reviews of nonlinear dynamics and complexity*, 2:63–106, 2009.
- [37] S.N. Dorogovtsev and J.F. Mendes. *Evolution of networks: From biological nets to the Internet and WWW*. OUP Oxford, 2013.
- [38] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [39] R. Albert and A.-L. Barabási. Topology of evolving networks: local events and universality. *Physical review letters*, 85(24):5234, 2000.
- [40] M. Á. Serrano. Rich-club vs rich-multipolarization phenomena in weighted networks. *Physical Review E*, 78(2):026101, 2008.
- [41] S.N. Dorogovtsev. *Lectures on complex networks*, oxf. master ser. phys., 2010, 20.
- [42] A.-L. Barabási. Chapter 5: The barabási-albert model. *Network science*. Cambridge University Press, Cambridge, 475, 2016.
- [43] G. Bianconi and A.-L. Barabási. Bose-einstein condensation in complex networks. *Physical review letters*, 86(24):5632, 2001.
- [44] S.-D. Poisson. *Researches into the Probabilities of Judgements in Criminal and Civil Cases*. NG-Verlag (Viatcheslav Demidov Inhaber), 2013.

- [45] R. Solomonoff, A. Rapoport, M. Newman, A.-L. Barabási, and D.J. Watts. Connectivity of random nets. In *The structure and dynamics of networks*, pages 27–37. Princeton University Press, 1951.
- [46] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs i publ. *Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [47] P. Erdős, A. Rényi, et al. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5(1):17–60, 1960.
- [48] P. Erdős, A. Rényi, et al. On the evolution of random graphs. *Bull. Inst. Internat. Statist.*, 38(1):343–347, 1961.
- [49] P. Erdős et al. On the strength of connectedness of a random graph. 1961.
- [50] P. Erdős and A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 14:295–315, 1963.
- [51] P. Erdős and A. Rényi. On random matrices. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, 8:455–461, 1964.
- [52] P. Erdős and A. Rényi. On the existence of a factor of degree one of a connected random graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 17:359–368, 1966.
- [53] P. Erdős and A. Rényi. On random matrices ii. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 3:459–464, 1968.
- [54] H. Ahmadian and B. Kleijn. Phase transitions in random graphs. 2019.
- [55] Tom van den Bosch. The phase transition in the erdős-rényi random graph model. 2014.
- [56] N. Alon and J.H. Spencer. *Wiley interscience series in discrete mathematics and optimization. The probabilistic method*, pages 353–354, 2008.
- [57] И.А. Квасников. *Термодинамика и статистическая физика. Т. 1: Теория равновесных систем: Термодинамика. М.: Едиториал УРСС, 70, 2002.*
- [58] Е.М. Ландау, Л.Д. Лифшиц. *Теоретическая физика. В 10 томах. Т. 5: Статистическая физика. Часть 1, 1995.*

- [59] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, and J.F. Mendes. Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections. *Physical Review E*, 66(1):016104, 2002.
- [60] A. Griffin, D.W. Snoke, and Stringari S. Bose-einstein condensation. Cambridge University Press, 2:281, 1995.
- [61] S.A. Moskalenko and D.W. Snoke. Bose-Einstein condensation of excitons and biexcitons: and coherent nonlinear optics with excitons. Cambridge University Press, 2000.
- [62] J.J. Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Physical Review*, 112(5):1555, 1958.
- [63] M.G. Raizen, R.J. Thompson, R.J. Brecha, H.J. Kimble, and H.J. Carmichael. Normal-mode splitting and linewidth averaging for two-state atoms in an optical cavity. *Physical Review Letters*, 63(3):240, 1989.
- [64] C. Weisbuch, Mr. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa. Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity. *Physical Review Letters*, 69(23):3314, 1992.
- [65] A. Tredicucci, Y. Chen, V. Pellegrini, M. Börger, L. Sorba, F. Beltram, and F. Bassani. Controlled exciton-photon interaction in semiconductor bulk microcavities. *Physical review letters*, 75(21):3906, 1995.
- [66] D.G. Lidzey, D.D.C. Bradley, M.S. Skolnick, T. Virgili, S. Walker, and D.M. Whittaker. Strong exciton–photon coupling in an organic semiconductor microcavity. *Nature*, 395(6697):53–55, 1998.
- [67] D.G. Lidzey, D.D.C. Bradley, T. Virgili, A. Armitage, M.S. Skolnick, and S. Walker. Room temperature polariton emission from strongly coupled organic semiconductor microcavities. *Physical review letters*, 82(16):3316, 1999.
- [68] R. Rapaport, R. Harel, E. Cohen, A. Ron, E. Linder, and L.N. Pfeiffer. Negatively charged quantum well polaritons in a gaas/alas microcavity: An analog of atoms in a cavity. *Physical review letters*, 84(7):1607, 2000.

- [69] L.S. Dang, D. Heger, R. André, F. Boeuf, and R. Romestain. Stimulation of polariton photoluminescence in semiconductor microcavity. *Physical Review Letters*, 81(18):3920, 1998.
- [70] P. Senellart and J. Bloch. Nonlinear emission of microcavity polaritons in the low density regime. *Physical Review Letters*, 82(6):1233, 1999.
- [71] V. Pellegrini, R. Colombelli, L. Sorba, and F. Beltram. Acoustic-phonon-mediated polariton photoluminescence in a gas bulk microcavity. *Physical Review B*, 59(15):10059, 1999.
- [72] J.J. Baumberg, P.G. Savvidis, R.M. Stevenson, A.I. Tartakovskii, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, and J.S. Roberts. Parametric oscillation in a vertical microcavity: A polariton condensate or micro-optical parametric oscillation. *Physical Review B*, 62(24):R16247, 2000.
- [73] P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, R.M. Stevenson, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, and J.S. Roberts. Angle-resonant stimulated polariton amplifier. *Physical review letters*, 84(7):1547, 2000.
- [74] R.M. Stevenson, V.N. Astratov, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A.I. Tartakovskii, P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, and J.S. Roberts. Continuous wave observation of massive polariton redistribution by stimulated scattering in semiconductor microcavities. *Physical Review Letters*, 85(17):3680, 2000.
- [75] А.П. Пухов А.А. Андрианов, Е.С. Виноградов. Лекции по квантовой оптике. 2018.
- [76] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J.M.J. Keeling, F.M. Marchetti, M.H. Szymańska, R. André, J.L. Staehli, et al. Bose–einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, 443(7110):409–414, 2006.
- [77] P.R. Eastham and P.B. Littlewood. Bose condensation of cavity polaritons beyond the linear regime: The thermal equilibrium of a model microcavity. *Physical Review B*, 64(23):235101, 2001.

- [78] J.G. Bohnet, Z. Chen, J.M. Weiner, D. Meiser, M.J. Holland, and J.K. Thompson. A steady-state superradiant laser with less than one intracavity photon. *Nature*, 484(7392):78–81, 2012.
- [79] I. Yu. Chestnov, A.P. Alodjants, and S.M. Arakelian. Lasing and high-temperature phase transitions in atomic systems with dressed-state polaritons. *Physical Review A*, 88(6):063834, 2013.
- [80] E. Akkermans, A. Gero, and R. Kaiser. Photon localization and dicke superradiance in atomic gases. *Physical review letters*, 101(10):103602, 2008.
- [81] Z. Wang, H. Li, W. Feng, X. Song, C. Song, W. Liu, Q. Guo, X. Zhang, H. Dong, D. Zheng, et al. Controllable switching between superradiant and subradiant states in a 10-qubit superconducting circuit. *Physical review letters*, 124(1):013601, 2020.
- [82] M. Bamba, K. Inomata, and Y. Nakamura. Superradiant phase transition in a superconducting circuit in thermal equilibrium. *Physical review letters*, 117(17):173601, 2016.
- [83] K. Cong, Q. Zhang, Y. Wang, G.T. Noe, A. Belyanin, and J. Kono. Dicke superradiance in solids. *JOSA B*, 33(7):C80–C101, 2016.
- [84] Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J.Q. You, and F. Nori. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 85(2):623, 2013.
- [85] K.J. Vahala. Optical microcavities. *nature*, 424(6950):839–846, 2003.
- [86] A.P. Alodjants, I.O. Barinov, and S.M. Arakelian. Strongly localized polaritons in an array of trapped two-level atoms interacting with a light field. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(9):095502, 2010.
- [87] H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto. Exciton-polariton bose-einstein condensation. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1589, 2010.
- [88] I.Yu. Chestnov, A.P. Alodjants, S.M. Arakelian, J. Klaers, F. Vewinger, and M. Weitz. Bose-einstein condensation for trapped atomic polaritons in a biconical waveguide cavity. *Physical Review A*, 85(5):053648, 2012.

- [89] O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, and D.W. Snoke. Theory of bose-einstein condensation and superfluidity of two-dimensional polaritons in an in-plane harmonic potential. *Physical Review B*, 77(15):155317, 2008.
- [90] E. Merzbacher. *Quantum mechanics*, 3rd edition. New York: John Wiley and Sons, 1998.
- [91] Haken, Risken, Lax, Louisell, Scully, M. O. Lamb see Scully, and M. S. Zubairy. For the quantum theory of the laser. *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997).
- [92] H. Haken. Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems. *Reviews of modern physics*, 47(1):67, 1975.
- [93] H. Haken. *Laser theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [94] T. Kadowaki and H. Nishimori. Quantum annealing in the transverse ising model. *Physical Review E*, 58(5):5355, 1998.
- [95] A.B. Finnila, M.A. Gomez, C. Sebenik, C. Stenson, and J.D. Doll. Quantum annealing: A new method for minimizing multidimensional functions. *Chemical physics letters*, 219(5-6):343–348, 1994.
- [96] Е. М. Ландау, Л.Д. Лифшиц. *Квантовая механика: Нерелятивистская теория*. 1989.
- [97] S. Dorogovtsev, A. Goltsev, and Mendes J. F. Critical phenomena in complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 80:1275, 2008.
- [98] M.H. Szymanska. Bose condensation and lasing in optical microstructures. arXiv preprint cond-mat/0204307, 2001.
- [99] Е.М. Ландау, Л.Д. Лившиц. *Теоретическая физика в десяти томах. Т. 1. Механика. Изд. 4-е, испр.* Наука, 1988.
- [100] R. W. Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, 2020.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

1. Получение уравнений динамики с помощью подхода Гейзенберга Гамильтониан системы:

$$H = -\sum \left[J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right] - \frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) + \omega_a a^\dagger a - \frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a), \quad (27)$$

1.1 Для оператора фотонного поля: $i\dot{a} = [a, H] = aH - Ha$:

$$\left[a, -\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right] = a(-\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j)) - (-\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j))a = 0, \quad (28)$$

$$\left[a, -\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right] = a(-\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)) - (-\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i))a = 0, \quad (29)$$

$$[a, \omega_a a^\dagger a] = a\omega_a a^\dagger a - \omega_a a^\dagger a a = \omega_a a a^\dagger a - \omega_a a^\dagger a a = \omega_a (a a^\dagger - a^\dagger a) a = \omega_a a, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \left[a, -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a \right] &= a(-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) - \\ &- (-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) a = -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) - \\ &- (-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) a = -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a a^\dagger g_i^\dagger e_i + a e_i^\dagger g_i a - a^\dagger g_i^\dagger e_i a - e_i^\dagger g_i a a = \\ &= -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a a^\dagger g_i^\dagger e_i - a^\dagger g_i^\dagger e_i a) + (a e_i^\dagger g_i a - e_i^\dagger g_i a a) = \\ &= -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum g_i^\dagger e_i (a a^\dagger - a^\dagger a) = -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum g_i^\dagger e_i. \end{aligned} \quad (31)$$

При $p_i = g_i^\dagger e_i$ выражение (31) примет вид: $-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum p_i$.

1.2 Для оператора поляризации: $i\dot{p}_i = [p_i, H] = p_i H - H p_i$

Для первого слагаемого Гамильтониана имеем:

$$\left[p_i, -\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right].$$

Используя правило Лейбница: $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$, пусть $\hat{A} = p_i$, $\hat{B} = -\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)$, $\hat{C} = -(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j)$, получаем:

$$\begin{aligned} & \left[p_i, -\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right] (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) + \\ & + \left(-\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right) \left[p_i, (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & -\sum J_{ij} \left(\left[p_i, (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right] (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) + (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \left[p_i, (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right] \right) = \\ & = -\sum J_{ij} (2p_i (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j)). \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \left[p_i, -\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right] = \\ & = p_i \left(-\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right) - \left(-\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right) p_i = \\ & = -\frac{1}{2}h \sum (g_i^\dagger e_i e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger e_i g_i^\dagger g_i) - \\ & - e_i^\dagger e_i g_i^\dagger e_i + g_i^\dagger g_i g_i^\dagger e_i = -\frac{1}{2}h \sum p_i = -h \sum p_i. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\left[p_i, \omega_a a^\dagger a \right] = (p_i \omega_a a^\dagger a - \omega_a a^\dagger a p_i) = 0. \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \left[p_i, -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) \right] = (p_i \left(-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) \right)) - \\ & - \left(-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) \right) p_i = \frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i). \end{aligned} \quad (36)$$

Пусть $S_{z,i} = e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i$, тогда выражение (36) примет вид: $-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum a S_{z,i}$.

1.3 Для оператора инверсии населённостей: $iS_{z,i} = [S_{z,i}, H] = S_{z,i}H - HS_{z,i}$.

Для первого слагаемого Гамильтониана имеем:

$$\left[S_{z,i}, -\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right].$$

Используя правило Лейбница: $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$, пусть $\hat{A} = S_{z,i}$, $\hat{B} = -\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)$, $\hat{C} = -(e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j)$, получаем:

$$\begin{aligned} & \left[S_{z,i}, -\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right] (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) + \\ & + \left(-\sum J_{ij}(e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right) \left[S_{z,i}, (e_j^\dagger e_j - g_j^\dagger g_j) \right] = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\left[S_{z,i}, -\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i) \right] = (S_{z,i}(-\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i)) - (-\frac{1}{2}h \sum (e_i^\dagger e_i - g_i^\dagger g_i))S_{z,i}) = 0. \quad (38)$$

$$[S_{z,i}, \omega_a a^\dagger a] = S_{z,i} \omega_a a^\dagger a - \omega_a a^\dagger a S_{z,i} = 0. \quad (39)$$

$$\left[S_{z,i}, -\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a) \right] = S_{z,i}(-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a)) - (-\frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum (a^\dagger g_i^\dagger e_i + e_i^\dagger g_i a))S_{z,i} = -\frac{2\chi}{\sqrt{N}} \sum (a p_i^\dagger - a^\dagger p_i). \quad (40)$$

2. Получение интеграла движения исходя из уравнений динамики.

$$i\dot{a} = \Omega_a a - \frac{\chi}{\sqrt{N}} \sum p_i, \quad (41a)$$

$$i\dot{p}_i = -2p_i \sum J_{ij} S_{z,j} - H p_i + \frac{\chi}{\sqrt{N}} a S_{z,i}, \quad (41b)$$

$$i\dot{S}_{z,i} = i\gamma_{\parallel} (S_{z,0} - S_{z,i}) - \frac{2\chi}{\sqrt{N}} (a p_i^\dagger - a^\dagger p_i). \quad (41c)$$

Выражая a из (41b):

$$a = \frac{(i\frac{d}{dt} + 2\sum J_{ij} S_{z,j} + H) p_i \sqrt{N}}{\chi S_{z,i}}. \quad (42)$$

Подставляя полученное выражение в (41c):

$$i\dot{S}_{z,i} = i\gamma_{\parallel} (S_{z,0} - S_{z,i}) - \frac{2\chi}{\sqrt{N}} \left(\left(\frac{(i\frac{d}{dt} + 2\sum J_{ij} S_{z,j} + H) p_i \sqrt{N}}{\chi S_{z,i}} \right) p_i^\dagger - \frac{(-i\frac{d}{dt} + 2\sum J_{ij} S_{z,j} + H^\dagger) p_i^\dagger \sqrt{N}}{\chi S_{z,i}} p_i \right). \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt} (S_{z,i}^2 + 4|p_i|^2) = 2\gamma_{\parallel} \left(\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}} S_{z,i} (S_{z,0} - S_{z,i}) - 4|p_i|^2 \right). \quad (44)$$

Таким образом, интеграл движения: $S_{z,i}^2 + 4|p_i|^2 = const.$

3. Получение системы уравнений на параметры порядка для изолированной

системы.

Наличие связи между поляризацией и инверсией населенности делает возможным получение решения для системы в стационарном состоянии. Для этого решение для поляризации и фотонного поля представлено в виде: $a = ae^{-i\mu t}$ и $p_i = p_i e^{-i\mu t}$. Подставляя решения в (41a), получаем:

$$a = \frac{\chi \sum p_i}{\sqrt{N\omega_a}}. \quad (45)$$

Подставляя решения в (41b), получаем:

$$p_i = \frac{\lambda \chi S_{z,i}}{2 \sum J_{ij} S_{z,j} + h}. \quad (46)$$

Так как $S_{z,i}^2 = 1 - 4|p_i|^2$, тогда:

$$p_i = \frac{\chi \lambda}{\sqrt{((2 \sum J_{ij} S_{z,j} + h)^2 + 4\chi^2 \lambda^2)}} \quad (47)$$

Так как $\lambda = \frac{\chi \sum p_i}{N\omega_a}$, то:

$$\omega_a \lambda = \left(\frac{\chi}{N}\right) \left(\frac{\chi \lambda}{\sqrt{((2 \sum J_{ij} S_{z,j} + h)^2 + 4\chi^2 \lambda^2)}}\right). \quad (48)$$

Из (46) выражаем $S_{z,i}$:

$$S_{z,i} = \frac{(2 \sum J_{ij} S_{z,j} + h) p_i}{\chi \lambda}. \quad (49)$$

При $\sum J_{ij} S_{z,j} = 2Jk_i S_z$ и $S_z = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum k_j S_{z,j}$ имеем:

$$S_z = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum k_i \frac{p_i (4 \sum J_{ij} S_{z,j} + h)}{\chi \lambda}. \quad (50)$$

Исходя из (47), получаем:

$$S_z = \frac{1}{N \langle k \rangle} \sum \frac{k_i (h + 4Jk_i S_z)}{\sqrt{(4Jk_i S_z + h)^2 + 4\lambda^2}}. \quad (51)$$

Получены следующие выражения для параметров порядка системы, представляющие коллективно взвешенную инверсию населенности

$S_z = \frac{1}{N\langle k \rangle} \sum k_j S_{z,j}$ и среднюю амплитуду фотонного поля $\lambda = \frac{a}{\sqrt{N}}$. Также для удобства в данной системе были введены следующие безразмерные величины: $J = J/\chi$, $h = h/\chi$, $\omega_a = \omega_a/\chi$.

$$\omega_a \lambda = \frac{\lambda}{N} \sum \frac{1}{\sqrt{(4Jk_i S_z + h)^2 + 4\lambda^2}}, \quad (52a)$$

$$S_z = \frac{1}{N\langle k \rangle} \sum \frac{k_i(h + 4Jk_i S_z)}{\sqrt{(4Jk_i S_z + h)^2 + 4\lambda^2}}. \quad (52b)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

1. Листинг программ графических построений для изолированной системы

1.1 Регулярная сетевая структура

```
clc
clear all

set(0, 'DefaultAxesFontSize', 18, 'DefaultAxesFontName', 'Helvetica');
nn = 1e+2;

S_ax = linspace(0, 1, nn);
l_ax = linspace(0, 1, nn);
z_ax = linspace(0, 5, nn);

[S3, l3, Z3] = meshgrid(S_ax, l_ax, z_ax);
[S2, l2] = meshgrid(S_ax, l_ax);

Gamma_3 = sqrt(S3.^2 + 4.*l3.^2);
F1 = 1./Gamma_3 - Z3;
F2 = Z3 - 1;
Z2 = 1.*ones(nn, nn);

F3 = F1 - F2;
F_line = interp3(S3, l3, Z3, F3, S2, l2, Z2);
C = contours(S2, l2, F_line, [0 0]);
S_L = C(1, 2:end);
lambda_L = C(2, 2:end);
Z_line = interp2(S2, l2, Z2, S_L, lambda_L);

figure
box on
patch(isosurface(S3, l3, Z3, F1, 0), 'FaceColor', [0.0 0.6 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 1);
patch(isosurface(S3, l3, Z3, F2, 0), 'FaceColor', [1.0 0.0 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 1);

line(S_L, lambda_L, Z_line, 'Color', 'k', 'LineWidth', 3);

view(120, 30); camlight('left'); axis vis3d;
xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1');
```

1.2 Случайная сетевая структура

```
clc
clear all

set(0, 'DefaultAxesFontSize', 18, 'DefaultAxesFontName', 'Helvetica');

nn = 4e+1;

k_min = 0.0001;
```

```

ksr =4;

k_max = 9;
p = @(k)exp(k+0.5-ksr)./sqrt(2.*pi.*ksr).*((k+0.5)./ksr).^(-(k + 0.5));

J = 0.0625;

%-----задаём---оси-----
S_ax = linspace(1e-5,1,nn);
L_ax = linspace(1e-5,0.8,nn);
z_ax = linspace(0,5,nn);

[S3, L3, Z3] = meshgrid(S_ax,L_ax,z_ax);
[S2, L2] = meshgrid(S_ax,L_ax);
%-----

%-----строим-поверхности-----
Gamma3 = zeros(nn,nn,nn);
F1 = zeros(nn,nn,nn);
F2 = zeros(nn,nn,nn);

tic
for ii = 1:nn
    ii
    for jj = 1:nn
        for kk = 1:nn
            Gamma = @(k) sqrt(16.*J.^2.*S3(ii,jj,kk).^2.*k.^2 +
4.*L3(ii,jj,kk).^2);

            fun1=@(k) p(k)./Gamma(k);
            fun2=@(k) (k.*4.*J.*k.*p(k))./(ksr.*Gamma(k));

            F1(ii,jj,kk) = integral(fun1,k_min,k_max) - Z3(ii,jj,kk);
            F2(ii,jj,kk) = integral(fun2,k_min,k_max) - Z3(ii,jj,kk);
        end
    end
end
toc
%-----

%-----строим-кривые-пересечений-----
F3 = Z3 - 1;
Z2 = 1.*ones(nn,nn);

F31 = F1 - F3;
F32 = F2 - F3;

F_31 = interp3(S3, L3, Z3, F31, S2, L2, Z2);
F_32 = interp3(S3, L3, Z3, F32, S2, L2, Z2);

C31 = contours(S2, L2, F_31, [0 0]);
C32 = contours(S2, L2, F_32, [0 0]);

S_L31 = C31(1, 2:end);
lambda_L31 = C31(2, 2:end);
S_L32 = C32(1, 2:end);
lambda_L32 = C32(2, 2:end);

[S11,S22,L11,L22,S_cross,L_cross] =
Crosses(S_L31,lambda_L31,S_L32,lambda_L32);

```

```

Z_line31 = interp2(S2, L2, Z2, S_L31, lambda_L31);
Z_line32 = interp2(S2, L2, Z2, S_L32, lambda_L32);
%-----

figure
subplot(1,2,1)

box on
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F1, 0), 'FaceColor', [1.0 1.0 0.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.75);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F2, 0), 'FaceColor', [0.0 0.6 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.75);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F3, 0), 'FaceColor', [1.0 0.0 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.75);

line(S_L31, lambda_L31, Z_line31, 'Color', 'k', 'LineWidth', 3);
line(S_L32, lambda_L32, Z_line32, 'Color', 'k', 'LineWidth', 3);

view(120,30);
camlight('left'); axis vis3d;
xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1, F_2');

subplot(1,2,2)
hold on
box on

plot(S_L31, lambda_L31, 'k', S_L32, lambda_L32, 'k');
axis([0,1,0,0.8,0,1]);
view(0,90);

xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1, F_2');

```

1.3 Безмасштабная сетевая структура

```

clc
clear all

set(0, 'DefaultAxesFontSize', 18, 'DefaultAxesFontName', 'Helvetica');

nn = 4e+1;
N=1000;
k_min = 2.0001;
ksr = 3.874;
k_max = 63.249;
gamma=3;
p = @(k) (gamma-1) .* k_min.^(gamma-1) ./ k.^gamma;

J = 0.0625;
Om=1;
%-----задаём-----оси-----
S_ax = linspace(1e-5,1,nn);
l_ax = linspace(1e-5,0.8,nn);
z_ax = linspace(0,10,nn);

```

```

[S3, L3, Z3] = meshgrid(S_ax,l_ax,z_ax);
[S2, L2] = meshgrid(S_ax,l_ax);
%-----
L2~=0; L3~=0;

%-----строим-поверхности-----
Gamma3 = zeros(nn,nn,nn);
F1 = zeros(nn,nn,nn);
F2 = zeros(nn,nn,nn);

tic
for ii = 1:nn
    ii
    for jj = 1:nn
        for kk = 1:nn
            Gamma = @(k) sqrt(16.*J.^2.*S3(ii,jj,kk).^2.*k.^2 +
4.*L3(ii,jj,kk).^2);

            fun1=@(k) p(k)./Gamma(k);
            fun2=@(k) (k.*4.*J.*k.*p(k))./(ksr.*Gamma(k));

            F1(ii,jj,kk) = integral(fun1,k_min,k_max) - Z3(ii,jj,kk);
            F2(ii,jj,kk) = integral(fun2,k_min,k_max) - Z3(ii,jj,kk);
        end
    end
end
end
toc
%-----

%-----строим-кривые-пересечений-----
F3 = Z3 - 1;
Z2 = 1.*ones(nn,nn);

F31 = F1 - F3;
F32 = F2 - F3;

F_31 = interp3(S3, L3, Z3, F31, S2, L2, Z2);
F_32 = interp3(S3, L3, Z3, F32, S2, L2, Z2);

C31 = contours(S2, L2, F_31, [0 0]);
C32 = contours(S2, L2, F_32, [0 0]);

S_L31 = C31(1, 2:end);
lambda_L31 = C31(2, 2:end);
S_L32 = C32(1, 2:end);
lambda_L32 = C32(2, 2:end);

S_min1=min(S_L31);
S_min2=min(S_L32);
S_max1=max(S_L31);
S_max2=max(S_L32);

if S_min1>S_min2
    S_limmin=S_min2;
else
    S_limmin=S_min1;
end
end

```

```

if S_max1>S_max2
    S_limmax=S_max1;
else
    S_limmax=S_max2;
end

S11=linspace(S_limmax,S_limmin,1e+4);
S22=linspace(S_limmax,S_limmin,1e+4);
L11=spline(S_L31(end:-1:1),lambda_L31(end:-1:1),S11);
L22=spline(S_L32(end:-1:1),lambda_L32(end:-1:1),S22);
m=abs(L11-L22);
m_min=min(m);
el=find(m==m_min);
coor=[S11(el), L11(el)];

Z_line31 = interp2(S2, L2, Z2, S_L31, lambda_L31);
Z_line32 = interp2(S2, L2, Z2, S_L32, lambda_L32);
%-----

figure
subplot(1,2,1)

box on
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F1, 0), 'FaceColor', [1.0 1.0 0.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.65);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F2, 0), 'FaceColor', [0.0 0.6 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.65);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F3, 0), 'FaceColor', [1.0 0.0 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.75);
zlim([0 8]);

line(S_L31, lambda_L31,Z_line31,'Color','k','LineStyle','-','LineWidth',3);
line(S_L32, lambda_L32,Z_line32,'Color','k','LineStyle','-','LineWidth',3);

view(120,30);
camlight('left'); axis vis3d;
xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1,F_2');
zlim([0 8]);
subplot(1,2,2)
box on

line(S_L31, lambda_L31,Z_line31,'Color','k','LineStyle','-','LineWidth',3);
line(S_L32, lambda_L32,Z_line32,'Color','k','LineStyle','-','LineWidth',3);
axis([0,1,0,0.8,0,1]);
view(0,90);

xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1,F_2');
zlim([0 8]);

```

2. Листинг программ графических построений для открытой системы

2.1 Регулярная сетевая структура

```
clc
clear all
nn = 1e+2;
S_ax = linspace(0.7,1,nn);
l_ax = linspace(0,0.3,nn);
z_ax = linspace(-10,10,nn);

k=4;
Ga=0.7;
Gpar=0.7;
Gper=0.7;
nn = 1e+1;
S_z0=1;
omegaa=1.12;
J = 0.0001;

[S3, l3] = meshgrid(S_ax,l_ax);

F1= real((Gpar.*S_z0.*(4.*J.*k.*S3-Gper.*1i))./((omegaa-
Ga.*1i).*((4.*J.*k.*S3).^2+Gper.^2).*Gpar+4.*l3.^2.*Gper)).*(Gpar.*S_z0.*(4.
*J.*k.*S3+Gper.*1i))./((omegaa+Ga.*1i).*((4.*J.*k.*S3).^2+Gper.^2).*Gpar+4.*
l3.^2.*Gper));
F2=(Gpar.*S_z0)./(S3.*(Gpar+4.*l3.^2.*Gper./(16.*J.^2.*k.^2.*S3.^2+Gper.^2)))
;
F3=l3./l3;
figure

surf(S3,l3,F1);
figure

surf(S3,l3,F2);

figure

surf(S3,l3,F3);
```

2.2 Случайная сетевая структура

```
clc
clear all

set(0,'DefaultAxesFontSize',18,'DefaultAxesFontName','Helvetica');

nn = 4e+1;
k_min = 0.0001;
ksr = 3.1;

k_max = 9;

p = @(k) exp(k+0.5-ksr)./sqrt(2.*pi.*ksr).*((k+0.5)./ksr).^(-(k + 0.5));

Ga=0.00001;
Gpar=0.0000000027;
```

```

Gper=0.5;

S_z0=1;
omegaa=1;
J = 0.0625;

%-----задаём---оси-----
S_ax = linspace(1e-5,1,nn);
L_ax = linspace(1e-5,1,nn);
z_ax = linspace(0,5,nn);

[S3, L3, Z3] = meshgrid(S_ax,L_ax,z_ax);
[S2, L2] = meshgrid(S_ax,L_ax);
%-----

%-----строим-поверхности-----
Gamma3 = zeros(nn,nn,nn);
F1 = zeros(nn,nn,nn);
F2 = zeros(nn,nn,nn);

tic
for ii = 1:nn
    ii
    for jj = 1:nn
        for kk = 1:nn

            fun1=@(k) (Gpar.*S_z0.*(4.*J.*k.*S3(ii,jj,kk)-
Gper.*i).*p(k))./((omegaa-
Ga.*i).*((4.*J.*k.*S3(ii,jj,kk))\ga.^2+Gper.^2).*Gpar+4.*L3(ii,jj,kk).^2.*Gp
er));
            fun2=@(k)
(Gpar.*S_z0.*k.*p(k))./(S3(ii,jj,kk).*ksr.*(Gpar+4.*L3(ii,jj,kk).^2.*Gper./(1
6.*J.^2.*k.^2.*S3(ii,jj,kk).^2+Gper.^2)));

            F1(ii,jj,kk) = integral(fun1,k_min,k_max);
            F1(ii,jj,kk)=F1(ii,jj,kk).*conj(F1(ii,jj,kk));
            F1(ii,jj,kk)=F1(ii,jj,kk)- Z3(ii,jj,kk);
            F2(ii,jj,kk) = integral(fun2,k_min,k_max) - Z3(ii,jj,kk);
        end
    end
end
toc
%-----

%-----строим-кривые-пересечений-----
F3 = Z3 - 1;
Z2 = 1.*ones(nn,nn);

F31 = F1 - F3;
F32 = F2 - F3;

F_31 = interp3(S3, L3, Z3, F31, S2, L2, Z2);
F_32 = interp3(S3, L3, Z3, F32, S2, L2, Z2);

C31 = contours(S2, L2, F_31, [0 0]);
C32 = contours(S2, L2, F_32, [0 0]);

S_L31 = C31(1, 2:end);
lambda_L31 = C31(2, 2:end);

```

```

S_L32 = C32(1, 2:end);
lambda_L32 = C32(2, 2:end);

Z_line31 = interp2(S2, L2, Z2, S_L31, lambda_L31);
Z_line32 = interp2(S2, L2, Z2, S_L32, lambda_L32);
%-----

figure
subplot(1,2,1)
box on
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F1, 0), 'FaceColor', [1.0 1.0 0.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.65);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F2, 0), 'FaceColor', [0.0 0.78 1.0],
'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.65);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F3, 0), 'FaceColor', [1.0 0.0 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.75);

line(S_L31, lambda_L31, Z_line31, 'Color', 'k', 'LineWidth', 3);
line(S_L32, lambda_L32, Z_line32, 'Color', 'k', 'LineWidth', 3);

view(120, 30);
camlight('left'); axis vis3d;
xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1, F_2');

subplot(1,2,2)
hold on
box on

plot(S_L31, lambda_L31, 'k', S_L32, lambda_L32, 'k');
axis([0,1,0,1,0,1]);
view(0, 90);

xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1, F_2');

```

2.3 Безмасштабная сетевая структура

```

clc
clear all

set(0, 'DefaultAxesFontSize', 18, 'DefaultAxesFontName', 'Helvetica');

Ga=0.00001;
Gpar=7;
Gper=0.55;

S_z0=1;
omegaa=1;
J = 0.0625;

nn = 1e+1;
N=1000;
k_min = 2.0001;

```

```

ksr = 3.874;
k_max = 63.249;
gamma=3;

p = @(k) (gamma-1) .*k_min.^(gamma-1) ./k.^gamma;

%-----задаём---оси-----
S_ax = linspace(1e-5,1,nn);
l_ax = linspace(1e-5,1,nn);
z_ax = linspace(0,10,nn);

[S3, L3, Z3] = meshgrid(S_ax,l_ax,z_ax);
[S2, L2] = meshgrid(S_ax,l_ax);
%-----
L2~=0; L3~=0;

%-----строим-поверхности-----
Gamma3 = zeros(nn,nn,nn);
F1 = zeros(nn,nn,nn);
F2 = zeros(nn,nn,nn);

tic
for ii = 1:nn
    ii
    for jj = 1:nn
        for kk = 1:nn

            fun1=@(k) (Gpar.*S_z0.*(4.*J.*k.*S3(ii,jj,kk)-
Gper.*i).*p(k))./((omegaa-
Ga.*i).*((4.*J.*k.*S3(ii,jj,kk)).^2+Gper.^2).*Gpar+4.*L3(ii,jj,kk).^2.*Gper)
);
            fun2=@(k)
(Gpar.*S_z0.*k.*p(k))./(S3(ii,jj,kk).*ksr.*(Gpar+4.*L3(ii,jj,kk).^2.*Gper./(1
6.*J.^2.*k.^2.*S3(ii,jj,kk).^2+Gper.^2)));

            F1(ii,jj,kk) = integral(fun1,k_min,k_max);
            F1(ii,jj,kk)=F1(ii,jj,kk).*conj(F1(ii,jj,kk));
            F1(ii,jj,kk)=F1(ii,jj,kk)- Z3(ii,jj,kk);
            F2(ii,jj,kk) = integral(fun2,k_min,k_max) - Z3(ii,jj,kk);
        end
    end
end
toc
%-----

%-----строим-кривые-пересечений-----
F3 = Z3 - 1;
Z2 = 1.*ones(nn,nn);

F31 = F1 - F3;
F32 = F2 - F3;

F_31 = interp3(S3, L3, Z3, F31, S2, L2, Z2);
F_32 = interp3(S3, L3, Z3, F32, S2, L2, Z2);

C31 = contours(S2, L2, F_31, [0 0]);
C32 = contours(S2, L2, F_32, [0 0]);

S_L31 = C31(1, 2:end);

```

```

lambda_L31 = C31(2, 2:end);
S_L32 = C32(1, 2:end);
lambda_L32 = C32(2, 2:end);

S_min1=min(S_L31);
S_min2=min(S_L32);
S_max1=max(S_L31);
S_max2=max(S_L32);

if S_min1>S_min2
    S_limmin=S_min2;
else
    S_limmin=S_min1;
end

if S_max1>S_max2
    S_limmax=S_max1;
else
    S_limmax=S_max2;
end

S11=linspace(S_limmax,S_limmin,1e+4);
S22=linspace(S_limmax,S_limmin,1e+4);
L11=spline(S_L31(end:-1:1),lambda_L31(end:-1:1),S11);
L22=spline(S_L32(end:-1:1),lambda_L32(end:-1:1),S22);
m=abs(L11-L22);
m_min=min(m);
e1=find(m==m_min);
coor=[S11(e1), L11(e1)];

Z_line31 = interp2(S2, L2, Z2, S_L31, lambda_L31);
Z_line32 = interp2(S2, L2, Z2, S_L32, lambda_L32);
%-----

figure
subplot(1,2,1)

box on
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F1, 0), 'FaceColor', [1.0 1.0 0.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.65);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F2, 0), 'FaceColor', [0.0 0.78 1.0],
'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.65);
patch(isosurface(S3, L3, Z3, F3, 0), 'FaceColor', [1.0 0.0 1.0], 'EdgeColor',
'none', 'FaceAlpha', 0.75);
zlim([0 8]);

line(S_L31, lambda_L31,Z_line31,'Color','k','LineWidth',3);
line(S_L32, lambda_L32,Z_line32,'Color','k','LineWidth',3);

view(120,30);
camlight('left'); axis vis3d;
xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1,F_2');
zlim([0 8]);
subplot(1,2,2)
box on

```

```
line(S_L31, lambda_L31,Z_line31, 'Color','k','LineWidth',3);
line(S_L32, lambda_L32,Z_line32, 'Color','k','LineWidth',3);
axis([0,1,0,1,0,1]);
view(0,90);

xlabel('S_z');
ylabel('\lambda');
zlabel('F_1,F_2');
zlim([0 8]);
```