

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА/GRADUATION THESIS

Динамика полевых наблюдаемых в квантовых каналах с учетом термализации

Автор/ Author

Медведева Светлана Сергеевна

Направленность (профиль) образовательной программы/Major

Оптические и квантовые технологии в коммуникациях 2017

Квалификация/ Degree level

Бакалавр

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor

Гайдаш Андрей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, лаборатория квантовых процессов и измерений, ведущий научный сотрудник

Группа/Group

V3400

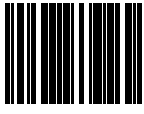
Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster

факультет фотоники

Направление подготовки/ Subject area

12.03.03 Фотоника и оптоинформатика

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Медведева Светлана Сергеевна	
14.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Медведева
Светлана
Сергеевна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/ Head
of Graduate Project

Документ подписан	
Гайдаш Андрей Алексеевич	
14.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Гайдаш Андрей
Алексеевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

ЗАДАНИЕ НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ /
OBJECTIVES FOR A GRADUATION THESIS

Обучающийся / Student Медведева Светлана Сергеевна

Группа/Group V3400

Факультет/институт/кластер/ Faculty/Institute/Cluster факультет фотоники и оптоинформатики

Квалификация/ Degree level Бакалавр

Направление подготовки/ Subject area 12.03.03 Фотоника и оптоинформатика

Направленность (профиль) образовательной программы/Major Оптические и квантовые технологии в коммуникациях 2017

Специализация/ Specialization

Тема ВКР/ Thesis topic Динамика полевых наблюдаемых в квантовых каналах с учетом термализации

Руководитель ВКР/ Thesis supervisor Гайдаш Андрей Алексеевич, кандидат физико-математических наук, Университет ИТМО, лаборатория квантовых процессов и измерений, ведущий научный сотрудник

Срок сдачи студентом законченной работы до / Deadline for submission of complete thesis 31.05.2021

Техническое задание и исходные данные к работе/ Requirements and premise for the thesis

Целью выполнения работы является исследование свойств оптоволоконных квантовых каналов, в частности динамики полевых наблюдаемых с учетом термализации. Задачи, решаемые при выполнении работы: 1. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику среднего числа фотонов и его дисперсии для сжатых вакуумных состояний. 2. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику среднего числа фотонов и его дисперсии для сжатых когерентных состояний. 3. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику среднего числа фотонов и его дисперсии для суперпозиции когерентных состояний. 4. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику средних значений операторов квадратур в случае сжатых вакуумных состояний. 5. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику средних значений операторов квадратур в случае сжатых когерентных состояний. 6. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику средних значений операторов квадратур в случае суперпозиции когерентных состояний.

Содержание выпускной квалификационной работы (перечень подлежащих разработке вопросов)/ Content of the thesis (list of key issues)

1. Исследование динамики открытых квантовых систем.
2. Исследование динамики среднего числа фотонов и его дисперсии в оптическом волокне.
3. Исследование динамики средних значений операторов квадратур в оптическом волокне.

Перечень графического материала (с указанием обязательного материала) / List of graphic materials (with a list of required material)

Исходные материалы и пособия / Source materials and publications

Pirandola S. et al. Advances in quantum cryptography //Advances in Optics and Photonics. – 2020. – Т. 12. – №. 4. – С. 1012-1236.

Rivas A., Huelga S. F. Open quantum systems. – Berlin : Springer, 2012. – Т. 10. – С. 978-3.

Schoeller H. Dynamics of open quantum systems, Computing Solids: Models, Ab-initio Methods and Supercomputing, Lecture Notes of the 45th Spring School 2014. – 2014.

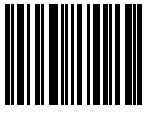
Zhang W. M. Exact master equation and general non-Markovian dynamics in open quantum systems //The European Physical Journal Special Topics. – 2019. – Т. 227. – №. 15. – С. 1849-1867.

Megier N., Smirne A., Vacchini B. Evolution equations for quantum semi-Markov dynamics //Entropy. – 2020. – Т. 22. – №. 7. – С. 796.

Дата выдачи задания/ Objectives issued on 09.03.2021

СОГЛАСОВАНО / AGREED:

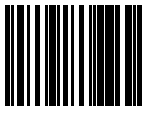
Руководитель ВКР/
Thesis supervisor

Документ подписан	
Гайдаш Андрей Алексеевич	
09.03.2021	

(эл. подпись)

Гайдаш Андрей
Алексеевич

Задание принял к
исполнению/ Objectives
assumed by

Документ подписан	
Медведева Светлана Сергеевна	
19.03.2021	

(эл. подпись)

Медведева
Светлана
Сергеевна

Руководитель ОП/ Head
of educational program

Документ подписан	
Козлов Сергей Аркадьевич	
29.04.2021	

(эл. подпись)

Козлов Сергей
Аркадьевич

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University**

**АННОТАЦИЯ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ /
SUMMARY OF A GRADUATION THESIS**

Обучающийся/ Student

Медведева Светлана Сергеевна

Наименование темы ВКР / Title of the thesis

Динамика полевых наблюдаемых в квантовых каналах с учетом термализации

Наименование организации, где выполнена ВКР/ Name of organization

Университет ИТМО

**ХАРАКТЕРИСТИКА ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ/
DESCRIPTION OF THE GRADUATION THESIS**

1. Цель исследования / Research objective

Исследование свойств оптоволоконных квантовых каналов, в частности динамики полевых наблюдаемых с учетом термализации.

2. Задачи, решаемые в ВКР / Research tasks

1. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику среднего числа фотонов и его дисперсии для сжатых вакуумных состояний. 2. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику среднего числа фотонов и его дисперсии для сжатых когерентных состояний. 3. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику среднего числа фотонов и его дисперсии для суперпозиции когерентных состояний. 4. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику средних значений операторов квадратур в случае сжатых вакуумных состояний. 5. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику средних значений операторов квадратур в случае сжатых когерентных состояний. 6. Вывод и анализ выражений, описывающих динамику средних значений операторов квадратур в случае суперпозиции когерентных состояний.

3. Краткая характеристика полученных результатов / Short summary of results/conclusions

1. Были выведены и проанализированы выражения, описывающие динамику дисперсии среднего числа фотонов сжатого вакуумного состояния, сжатого когерентного состояния и суперпозиции когерентных состояний при прохождении через оптоволокно. 2. Были определены расстояния распространения, на которых происходит потеря квантовых свойств состояния, и расстояния, на которых можно считать произошедшей термализацию системы. 3. Были выведены и проанализированы выражения, описывающие динамику средних значений наблюдаемых операторов квадратур для сжатого когерентного состояния и суперпозиции когерентных состояний при прохождении через оптоволокно. 4. Была получена зависимость уменьшения амплитуды средних значений наблюдаемых от расстояния распространения.

4. Наличие публикаций по теме выпускной работы/ Have you produced any publications on the topic of the thesis

- 1 Gaidash A., Kozubov A., Medvedeva S., Miroshnichenko G. The Influence of Signal Polarization on Quantum Bit Error Rate for Subcarrier Wave Quantum Key Distribution Protocol//Entropy, 2020, Vol. 22, No. 12, pp. 1393 (Статья; Scopus, Web of Science)
- 2 Медведева С.С., Гайдаш А.А., Мирошниченко Г.П. Анализ динамики дисперсии среднего числа фотонов произвольного квантового состояния в оптическом волокне// Сборник трудов XII Международной конференции «Фундаментальные проблемы оптики – 2020» - 2020. - С. 95 (Тезисы)

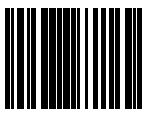
5. Наличие выступлений на конференциях по теме выпускной работы/ Have you produced any conference reports on the topic of the thesis

- 1 КМУ 2021, 14.04.2021 - 17.04.2021 (Конференция, статус - всероссийский)
- 2 XII Международная конференция "Фундаментальные проблемы оптики" (ФПО 2020), 19.10.2020 - 23.10.2020 (Конференция, статус - международный)

6. Полученные гранты, при выполнении работы/ Grants received while working on the thesis

7. Дополнительные сведения/ Additional information

Обучающийся/Student

Документ подписан	
Медведева Светлана Сергеевна	
14.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Медведева
Светлана
Сергеевна

(Фамилия И.О./ name
and surname)

Руководитель ВКР/ Head
of Graduate Project

Документ подписан	
Гайдаш Андрей Алексеевич	
14.05.2021	

(эл. подпись/ signature)

Гайдаш Андрей
Алексеевич

(Фамилия И.О./ name
and surname)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
1 ДИНАМИКА ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ	9
1.1 Открытая квантовая система	9
1.2 Методы описания динамики открытых квантовых систем.....	10
1.3 Уравнение Лиувилля – фон Неймана	11
1.4 Уравнение Накадзимы – Цванцига	12
1.5 Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада	13
1.6 Динамика одномодового состояния в оптоволокне.....	14
2 ДИНАМИКА ДИСПЕРСИИ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ФОТОНОВ	17
2.1 Уравнение динамики дисперсии среднего числа фотонов состояния	17
2.2 Динамика дисперсии среднего числа фотонов сжатого вакуумного	18
состояния.....	
2.3 Динамика дисперсии среднего числа фотонов сжатого когерентного	22
состояния.....	
2.4 Динамика дисперсии среднего числа фотонов суперпозиции	29
когерентных состояний	
2.5 Динамика дисперсии среднего числа фотонов состояния: основные	33
выводы.....	
3 ДИНАМИКА НАБЛЮДАЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ КВАДРАТУР	35
3.1 Уравнение динамики средних значений наблюдаемых операторов	35
квадратур состояния	
3.2 Динамика средних значений наблюдаемых операторов квадратур	36
сжатого когерентного состояния.....	
3.3 Динамика средних значений наблюдаемых операторов квадратур	39
суперпозиции когерентных состояний	
3.4 Динамика среднего значения наблюдаемых операторов квадратур	42
состояния: основные выводы.....	
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	43
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	45

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время квантовые технологии являются одним из наиболее активно развивающихся направлений исследований [1]. Можно выделить четыре области исследований: квантовые коммуникации, опирающиеся на постулаты квантовой физики для защищённой передачи данных [2]; квантовая симуляция, где доступная для контроля квантовая система используется для моделирования системы, управление характеристиками которой не доступно в лаборатории [3]; квантовые вычисления, использующие уникальные квантовые эффекты для значительного ускорения вычислений, например, факторизации чисел [4]; квантовая метрология, где высокочувствительная к внешнему воздействию квантовая система помогает повысить точность производимых измерений физических величин [5].

Такой широкий спектр применений обусловлен возможностью использования не имеющих аналогов в классической физике квантовых эффектов. Явления суперпозиции и запутанности выступают уникальным преимуществом в решении ряда задач. Однако квантовые состояния подвержены декогеренции – большинство квантовых неклассических особенностей могут быть разрушены воздействием окружающей среды на квантовую систему [6]. При описании изменения во времени квантовой системы необходимо учитывать явление декогеренции, что можно корректно сделать в рамках теории открытых квантовых систем. Поэтому особый интерес не только в сфере фундаментальных исследований, но и в сфере непосредственного применения квантовых технологий представляет рассмотрение открытых квантовых систем.

Так в данной работе с помощью теории открытых квантовых систем рассматриваются особенности распространения квантового состояния света в оптоволоконном канале. А именно производится вывод и анализ аналитических выражений, описывающих динамику полевых наблюдаемых: дисперсии среднего числа фотонов и средних значений операторов квадратур.

Проводится исследование важной энергетической характеристики квантового состояния – дисперсии среднего числа фотонов в моде, так как наблюдение данной величины позволяет дать оценку времени термализации квантового состояния в канале. Кроме того, в работе проводится исследование изменения во времени состояния с помощью анализа динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур. Представлены результаты моделирования найденных динамик для нескольких конкретных примеров квантовых состояний, наиболее активно используемых как в фундаментальных исследованиях, так и в технических решениях: сжатого вакуумного, сжатого когерентного и суперпозиции когерентных состояний.

1 ДИНАМИКА ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

1.1 Открытая квантовая система

Для описания квантовомеханических систем с учетом их взаимодействия с внешней средой используется теория открытых квантовых систем. Открытые квантовые системы – квантовые системы, которые обмениваются энергией или частицами с окружающей средой. Открытые квантовые системы характеризуются неунитарной динамикой, тогда как изолированные квантовые системы характеризуются унитарной динамикой [7].

Состояние квантовой системы S в Гильбертовом пространстве \mathcal{H}_S может быть описано с помощью матрицы плотности $\rho(t)$. Тогда изменение энергии этой системы может быть представлено временной эволюцией наблюдаемой гамильтониана $H(t) = \langle \hat{H}(t) \rangle = \text{tr} \{ \hat{H} \rho(t) \}$. Окружающая среда B (от heat bath, термостат: система с бесконечным числом степеней свободы, так что частоты её мод образуют континуум, находящаяся в состоянии термического равновесия), с которой входит во взаимодействие открытая система S , в своем Гильбертовом пространстве \mathcal{H}_B может быть описана временной эволюцией матрицы плотности $\rho_B(t)$. Тогда наблюдаемая гамильтониана $H_B(t) = \langle \hat{H}_B(t) \rangle = \text{tr} \{ \hat{H}_B \rho_B(t) \}$ описывает изменение энергии. Можно перейти к рассмотрению полной изолированной системы $S + B$, в расширенном Гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$ описываемой матрицей плотности $\rho_{SB}(t)$. В этом случае интересующая квантовая система может быть представлена приведенной матрицей плотности $\rho(t) = \text{tr}_B \{ \rho_{SB}(t) \}$. При этом изменение энергии полной системы описывает наблюдаемая гамильтониана $H_{SB}(t) = \langle \hat{H}_{SB}(t) \rangle = \text{tr} \{ \hat{H}_{SB} \rho_{SB}(t) \}$, где оператор учитывает взаимодействие открытой системы с окружающей средой:

$$\hat{H}_{SB} = \hat{H} \otimes \hat{I}_B + \hat{I} \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_I, \quad (1)$$

где гамильтониан $\hat{H}_I(t)$ отвечает за взаимодействие системы с окружающей средой.

1.2 Методы описания динамики открытых квантовых систем

Динамика открытых квантовых систем может быть описана различными способами. Отличия существующих подходов заключаются в ряде критериев. Например, по представлению системы, рассматриваемой в задаче, подходы можно разделить на представляющие квантовую систему непосредственно как открытую и на производящие замену открытой системы рассмотрением большей, но формально изолированной системы. Может различаться математический объект, динамика которого исследуется: кроме представления матриц плотности используются волновые функции, корреляционные функции. Объединяет различные подходы наличие некоторых приближений, учитывающих важные для конкретной задачи условия и отбрасывающих те, которыми можно пренебречь [8].

Одно из актуальных направлений описания динамики открытых квантовых систем состоит в рассмотрении полной волновой функции многочастичной изолированной системы. Для представления в явном виде взаимодействия квантовой системы с окружающей средой в общем случае требуется создание моделей динамики квантовой системы со значительным числом степеней свободы, что требует высоких вычислительных мощностей. Поэтому большинство этих методов не являются аналитическими, а позволяют получить численное моделирование в рамках конкретных задач. Примером могут служить: усовершенствованные подходы, основанные на методе Хартри-Фока [9, 10], рассмотрение усеченного Гильбертова пространства [11], анзац Давыдова [12]. Эти методы особенно популярны в сфере исследований физической химии.

Другим подходом может быть рассмотрение различных корреляционных функций. Примером может выступать использование функции Грина для частиц-фермионов в случае рассмотрения задач квантовой термодинамики [13].

Методом, наиболее часто используемым в сфере квантовой оптики, является представление приведенной матрицы плотности. В основе этого подхода стоит исключение степеней свободы окружающей среды за счёт перехода от рассмотрения матрицы плотности полной системы к исследованию динамики подсистемы (являющейся интересующей открытой системой). Тогда временная эволюция открытой квантовой системы описывается основным кинетическим уравнением [14].

1.3 Уравнение Лиувилля – фон Неймана

Полная система $S + B$, состоящая из системы S , рассмотрение которой интересует, и окружающей среды B является собой изолированную квантовую систему $\rho_{SB}(t)$, эволюция которой описывается уравнением Лиувилля – фон Неймана (здесь и далее постоянная Планка $\hbar = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{SB}(t) = -i [\hat{H}_{SB}, \rho_{SB}(t)]. \quad (2)$$

Стоит отметить, что найденная матрица плотности $\rho_{SB}(t)$ содержит предсказание динамики всех возможных наблюдаемых. После нахождения решения уравнения может быть произведен переход к системе S $\rho(t) = \text{tr}_B \{ \rho_{SB}(t) \}$. Однако в общем случае получение решения уравнения (2) с учетом особенности гамильтониана (1) является трудоемкой задачей. И так как целью выступает рассмотрение динамики именно системы S , удобнее произвести переход к уравнению, в явном виде описывающему динамику системы S . В таком уравнении – основном кинетическом – $\rho(t)$ выступает величиной, эволюция которого описывается в явном виде, в то время как

характеристики окружающей среды B становятся параметрами. Переход к основному кинетическому уравнению может быть произведен с помощью ряда приближений, вводимых в рассмотрение уравнения Лиувилля – фон Неймана.

1.4 Уравнение Накадзимы – Цванцига

В рамках статистической физики существует подход к разбиению динамики сложной системы на релевантную и нерелевантную части с помощью операторов проекции – формализм Цванцига – Мори [15]. Этот метод в рамках механики текучих сред и физики конденсированного состояния позволяет найти наиболее точные решения, описывающие динамику релевантной части.

При рассмотрении квантовомеханических систем основные идеи формализма Цванцига-Мори используется для выведения уравнения Накадзимы – Цванцига [16, 17]. Вводимый оператор проекции $\hat{\mathcal{P}}$ разбивает матрицу плотности полной системы $\rho_{SB}(t) = (\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{Q}})\rho_{SB}(t)$ на релевантную $\hat{\mathcal{P}}\rho_{SB}(t)$ и нерелевантную $\hat{\mathcal{Q}}\rho_{SB}(t)$ части, где $\hat{\mathcal{Q}} \equiv (\hat{I} - \hat{\mathcal{P}})$. Далее рассматривается уравнение Лиувилля – фон Неймана для части $\hat{\mathcal{P}}\rho_{SB}(t)$. Найденное точное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию $\hat{\mathcal{P}}\rho_{SB}(t)$, – уравнение Накадзимы – Цванцига – в представлении взаимодействия [7] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathcal{P}}\rho_{SB}(t) = & \alpha \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{L}}(t)\hat{\mathcal{G}}(t_0)\hat{\mathcal{Q}}\rho_{SB}(t_0) + \alpha \hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{L}}(t)\hat{\mathcal{P}}\rho_{SB}(t) + \\ & + \alpha^2 \int_{t_0}^t ds \hat{\mathcal{K}}(t,s)\rho_{SB}(s), \end{aligned} \quad (3)$$

где α – параметр взаимодействия при рассмотрении гамильтониана полной системы вида: $\hat{H}_{SB}(t) = \hat{H}_{SB_0}(t) + \alpha \hat{H}_I(t)$, где $\hat{H}_{SB_0}(t)$ отвечает за несвязанные

систему и среду; $\hat{\mathcal{L}}(t)$ – лиувиллиан системы: $\hat{\mathcal{L}}(t) \equiv -i[\hat{H}_I(t), \bullet]$; $\hat{\mathcal{G}}(t,s)$ – введенный пропагатор: $\hat{\mathcal{G}}(t,s) \equiv T_{\leftarrow} \exp \left[\alpha \int_s^t ds' \hat{Q} \hat{\mathcal{L}}(s') \right]$, где T_{\leftarrow} – оператор хронологического порядка; $\hat{\mathcal{K}}(t,s)$ – ядро: $\hat{\mathcal{K}}(t,s) = \hat{\mathcal{P}} \hat{\mathcal{L}}(t) \hat{\mathcal{G}}(t,s) \hat{Q} \hat{\mathcal{L}}(s) \hat{\mathcal{P}}$.

Однако поиск решения уравнения Накадзимы – Цванцига выступает настолько же сложной задачей, как в случае рассмотрения уравнения Лиувилля – фон Неймана для полной системы. Поэтому часто вводятся некоторые приближения, позволяющие упростить вид уравнения (3). Например, состояние нерелевантной системы в начальный момент времени принимается нулевым $\hat{Q} \rho_{SB}(t_0) = 0$, изменяется ядро $\hat{\mathcal{K}}(t,s)$ или производится разложение по малому параметру α [7]. В месте с этим исследуются и другие возможности внесения приближений в уравнение Накадзимы – Цванцига [18].

1.5 Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада

Другой подход к поиску решения $\rho(t)$ состоит в непосредственном применении последовательных приближений к уравнению Лиувилля – фон Неймана для полной системы. Каждое последующее приближение порождает подгруппу уравнений нового типа [19].

Первое из приближений, которые возможно применить к уравнению Лиувилля – фон Неймана, состоит в предположении, что взаимозависимость системы и окружающей среды имеет медленный темп развития. Это рассмотрение систем, характеризующихся малой величиной силы взаимодействия со средой, носящее название приближения Борна, позволяет отбросить члены по степени параметра взаимодействия старше квадратичных.

Следующее приближение – приближение Маркова – может быть сформулировано как отсутствие памяти в рассматриваемой системе. Формально происходит подынтегральная замена матрицы плотности, зависящей от параметра интегрирования (интегрирование происходит по

времени) на матрицу плотности, зависящую только от времени в момент наблюдения. Примером уравнения такого типа может служить уравнение Редфилда [20, 21]. Система, удовлетворяющая этому приближению, носит название марковской системы. Стоит отметить, что в настоящее время интерес представляют также и не Марковские системы [22, 23].

Третье, секулярное приближение отбрасывает члены, колебания которых происходят много быстрее времени эволюции интересующей Марковской системы. Это приближение позволяет получить уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада (уравнение Линдблада) [24, 25], которое может быть представлено в следующем виде [26]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -i [\hat{H} + \hat{H}_{LS}, \rho(t)] + \sum_i \left(\hat{L}_i \rho(t) \hat{L}_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{L}_i^\dagger \hat{L}_i, \rho(t) \} \right), \quad (4)$$

где \hat{H}_{LS} – гамильтониан, введенный для перенормировки системы; \hat{L}_i , \hat{L}_i^\dagger – операторы квантового скачка.

В данное время многие фундаментальные теоретические работы [27–29] посвящены рассмотрению именно уравнения Линдблада. Однако прикладные вопросы так же требуют анализа. Например, далее будет приведен вид уравнения типа Линдблада, использующийся применительно к задаче описания электромагнитного излучения в оптоволоконном канале.

1.6 Динамика одномодового состояния в оптоволокне

Конкретный вид гамильтонианов, описывающих рассматриваемую систему, определяет и вид уравнения Линдблада. Тогда, как показано в [14], для случая одномодового состояния монохроматического электромагнитного поля с частотой ω в оптоволоконном канале возможно рассмотрение следующего основного кинетического уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -i[\hat{H}, \rho(t)] + \hat{\Gamma} \rho(t) \\ \rho(t)|_{t=0} = \rho_0 \end{cases} \quad (5)$$

для гамильтониана системы, имеющего вид:

$$\hat{H} = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (6)$$

где \hat{a}^\dagger, \hat{a} – оператор рождения и оператор уничтожения; с использованием следующего оператора:

$$\hat{\Gamma} \rho(t) = -\frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} (n_T + 1)(\hat{a}^\dagger \hat{a} \rho(t) + \rho(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\hat{a} \rho(t) \hat{a}^\dagger) \\ + n_T (\hat{a} \hat{a}^\dagger \rho(t) + \rho(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger - 2\hat{a}^\dagger \rho(t) \hat{a}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

где γ – скорость термализации [30]:

$$e^{-\gamma t} = 10^{\frac{\alpha L}{10}}, \quad (8)$$

где α – коэффициент, определяющий потери оптоволокна; $L = \frac{ct}{\beta}$ – расстояние, пройденное излучением в оптоволокне, где c – скорость света, β – константа распространения;

n_T – среднее число тепловых фотонов:

$$n_T = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{kT}} - 1}, \quad (9)$$

где k – постоянная Больцмана; T – температура окружающей среды.

В представлении Лиувилля [31]:

$$\begin{aligned} \hat{A} \rho &\equiv \vec{\hat{A}} \rho, \\ \rho \hat{A} &\equiv \vec{\hat{A}} \rho, \end{aligned} \quad (10)$$

система (5) может быть записана как

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \hat{L} \rho(t) \\ \rho(t)|_{t=0} = \rho_0 \end{cases}, \quad (11)$$

где

$$\hat{L} = -i\omega(\overleftarrow{\hat{a}^\dagger \hat{a}} - \overrightarrow{\hat{a}^\dagger \hat{a}}) + \hat{\Gamma}, \quad (12)$$

$$\hat{\Gamma} = -\frac{\gamma}{2} \left((n_T + 1) (\overleftarrow{\hat{a}^\dagger \hat{a}} + \overrightarrow{\hat{a}^\dagger \hat{a}} - 2\overleftarrow{\hat{a} \hat{a}^\dagger}) + n_T (\overleftarrow{\hat{a} \hat{a}^\dagger} + \overrightarrow{\hat{a} \hat{a}^\dagger} - 2\overleftarrow{\hat{a}^\dagger \hat{a}}) \right). \quad (13)$$

Задача поиска решения системы (9) нетривиальна и достаточно сложна: возможны подходы как непосредственного поиска $\rho(t)$ [30], так и подстановки в выражения операторов интересующих физических величин (например, оператор \hat{A}) для последующего получения средних значений – наблюдаемых [32]:

$$\text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \hat{A} \rho(t) \right\} = \text{tr} \{ \hat{A} \hat{L} \rho(t) \} \rightarrow \langle \hat{A}(t) \rangle. \quad (14)$$

2 ДИНАМИКА ДИСПЕРСИИ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ФОТОНОВ

2.1 Уравнение динамики дисперсии среднего числа фотонов состояния

Первым рассматриваемым наблюдаемым будет дисперсия среднего числа фотонов некоторого квантового состояния:

$$\Delta n(t) = \langle \hat{n}^2(t) \rangle - \langle \hat{n}(t) \rangle^2, \quad (15)$$

где \hat{n} – оператор среднего числа фотонов [33]:

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (16)$$

Именно эта физическая величина была выбрана для исследования, так как анализ дисперсии среднего числа фотонов состояния позволяет оценить изменение мощности оптического излучения.

Тогда в уравнения системы (11) можно произвести следующую подстановку:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(t) \rangle &= x(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} x(t) &= \text{tr} \{ \hat{n} \hat{L} \rho(t) \}, \end{aligned} \quad (17)$$

в этом случае исследуемое наблюдаемое – среднее число фотонов состояния;
и

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}^2(t) \rangle &= y(t), \\ \frac{\partial}{\partial t} y(t) &= \text{tr} \{ \hat{n}^2 \hat{L} \rho(t) \}, \end{aligned} \quad (18)$$

здесь исследуемое наблюдаемое – квадрат среднего числа фотонов состояния.

Подстановка (17), (18) в (11) позволяет получить две системы уравнений, состоящие из линейного дифференциального уравнения первого порядка и начального условия для двух наблюдаемых – две задачи Коши. Решение полученных систем имеет вид:

$$x(t) = n_T (1 - e^{-\gamma t}) + x_0 e^{-\gamma t}, \quad (19)$$

$$y(t) = (1 + 2n_T)n_T + (1 + 4n_T)(x_0 - n_T)e^{-\gamma t} + (y_0 - (1 + 4n_T)x_0 + 2n_T^2)e^{-2\gamma t}, \quad (20)$$

где x_0, y_0 – константы, вид которых определяется для конкретного состояния условиями:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t)|_{t=0} = \langle \hat{n}(t) \rangle|_{t=0} = \text{tr}\{\hat{n}\rho_0\}, \\ y_0 &= y(t)|_{t=0} = \langle \hat{n}^2(t) \rangle|_{t=0} = \text{tr}\{\hat{n}^2\rho_0\}, \end{aligned} \quad (21)$$

Возможно произвести проверку полученных выше выражений $x(t)$ и $y(t)$, сравнив с предельными значениями выражений, составляющими:

$$\begin{aligned} x(t)|_{t \rightarrow \infty} &= \text{tr}\{\hat{n}\rho_T(t)\} = n_T, \\ y(t)|_{t \rightarrow \infty} &= \text{tr}\{\hat{n}^2\rho_T(t)\} = n_T(1 + 2n_T), \end{aligned} \quad (22)$$

где ρ_T – матрица плотности теплового состояния:

$$\rho_T = \frac{1}{1 + n_T} \sum_m \left(\frac{n_T}{1 + n_T} \right)^m |m\rangle\langle m|. \quad (23)$$

2.2 Динамика дисперсии среднего числа фотонов сжатого вакуумного состояния

Вакуумное состояние представляет собой состояние моды электромагнитного излучения с наименьшей энергией и точно определенным числом фотонов в моде, равным 0 [33]. Матрица плотности вакуумного состояния имеет вид:

$$\rho_{0(\text{вак})} = |0\rangle\langle 0|. \quad (24)$$

Интересен переход к рассмотрению сжатого вакуумного состояния, так как его наблюдение обнаруживает ненулевое среднее число фотонов в моде, но все еще нулевую амплитуду.

Для сжатия состояния на него нужно подействовать соответствующим оператором:

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2}\xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi \hat{a}^{\dagger 2}}, \quad (25)$$

где ξ – комплексный параметр сжатия: $\xi = r \cdot e^{i\theta}$.

Действие оператора сжатия на вакуумное состояние приводит к появлению сжатого вакуумного состояния, имеющего в формализме матриц плотности следующий вид:

$$\rho_{0(\text{сж.вак})} = \hat{S}(\xi)|0\rangle\langle 0|\hat{S}^\dagger(\xi). \quad (26)$$

Тогда рассмотрение средних значений $\text{tr}\{\hat{n}\rho_{0(\text{сж.вак})}\}$ и $\text{tr}\{\hat{n}^2\rho_{0(\text{сж.вак})}\}$ позволяет найти величину констант x_0 и y_0 :

$$\begin{aligned} x_0 &= \sinh^2 r, \\ y_0 &= 2\cosh^2 r \cdot \sinh^2 r + \sinh^4 r. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, динамика дисперсии сжатого вакуумного состояния зависит только от модуля параметра сжатия r , выбор фазы параметра сжатия θ не оказывает влияния на характер динамики.

Моделирование динамики системы здесь и далее производилось при использовании следующих значений параметров. Скорость термализации γ при значениях параметров $\alpha = -0.2$ дБ/км, $\beta = 1.5$, характеризующих стандартное телекоммуникационное оптоволокно, например, SMF-28 [32], согласно выражению (8) составило $\gamma = 10$ кГц. В соответствии с выражением (9) для длины волны излучения 1550 нм и температуры окружающей среды 300 К среднее число тепловых фотонов составило $n_T = 10^{-13}$. Для удобства графики приведены с нормированной шкалой γt по оси абсцисс.

Полученная динамика дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого вакуумного состояния $\rho_{(\text{сж.вак})}(t)$ для разных значений модуля параметра сжатия r (рис. 1) приводится в линейном и логарифмическом масштабах (рис. 2, 3). Можно отметить, что при $r = 0$, т.е. при отсутствии сжатия вакуумного состояния, динамика дисперсии среднего числа фотонов соответствует термализации системы: приходу некоторого числа тепловых фотонов при изначально нулевом значении среднего числа фотонов в системе (рис. 4).

Было определено, что на малом временном интервале (рис.2, 4) динамика системы может быть описана выражением:

$$\Delta n(t) \approx (y_0 - x_0^2)e^{-2\gamma t}, \quad (28)$$

тогда как на большем временном интервале (рис.3, 4) динамика соответствует:

$$\Delta n(t) \approx x_0 e^{-\gamma t}. \quad (29)$$

Представляет интерес рассмотрение пересечения кривых этих приближенных значений динамики. Так было установлено, что значение по оси абсцисс, соответствующее пересечению (28) и (29), т.е. соответствующее смене скорости затухания, смене динамик, зависит от начальных условий следующим образом:

$$\gamma t_q = -\ln \frac{x_0}{y_0 - x_0^2}. \quad (30)$$

Пересечение линий, соответствующих динамике (29) и значений среднего числа тепловых фотонов происходит при:

$$\gamma t_T = -\ln \frac{n_T}{x_0}. \quad (31)$$

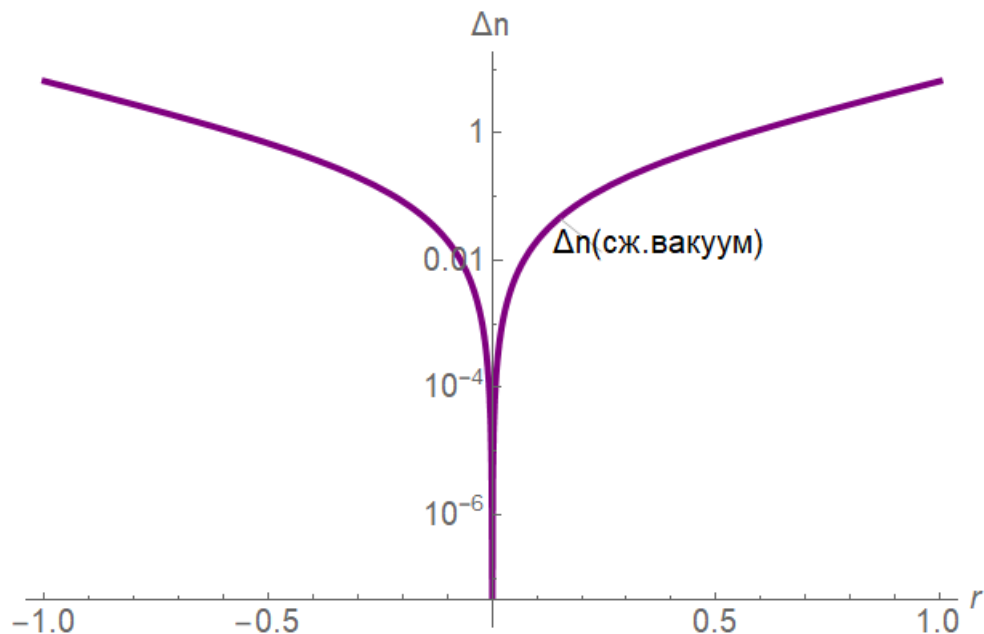


Рисунок 1 – Зависимость дисперсии среднего числа фотонов Δn_0 сжатого вакуумного состояния $\rho_{0(\text{сж.вак})}$ от модуля параметра сжатия r в логарифмическом масштабе

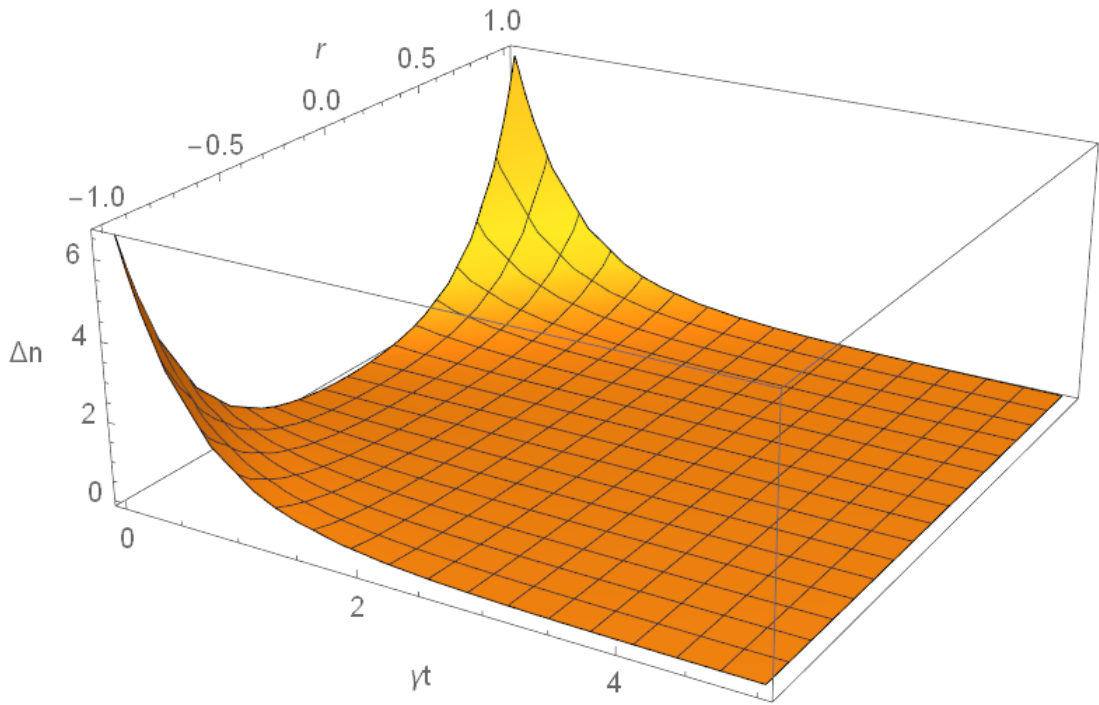


Рисунок 2 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого вакуумного состояния $\rho_{(\text{сж.вак})}(t)$ от модуля параметра сжатия r в линейном масштабе

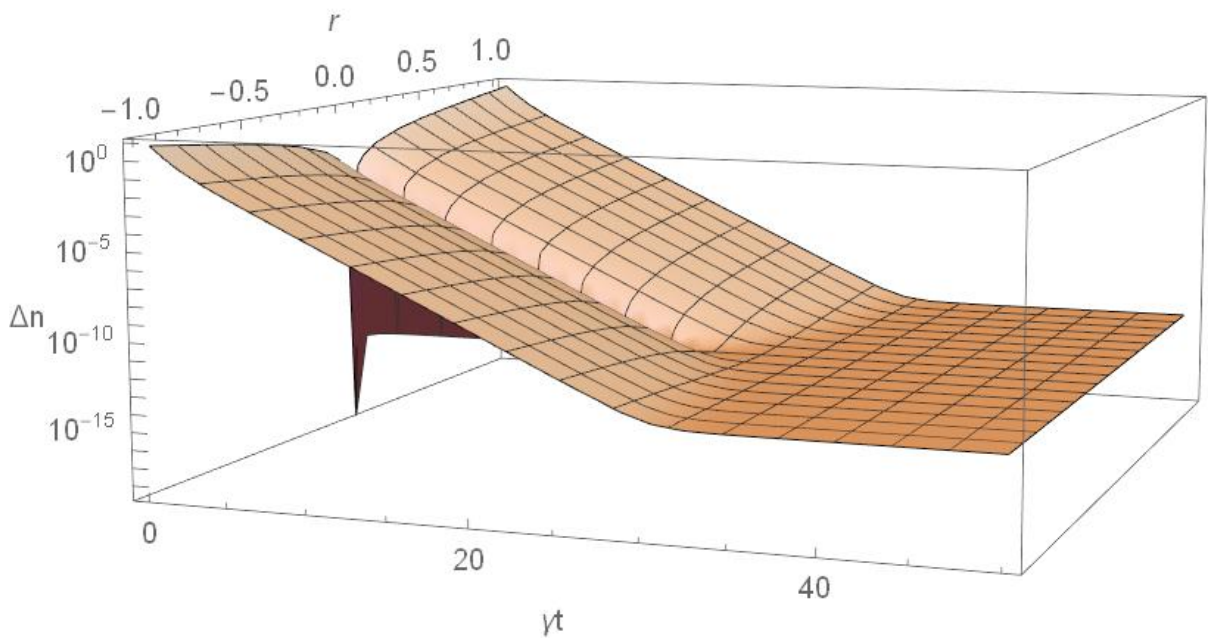


Рисунок 3 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого вакуумного состояния $\rho_{(\text{сж.вак})}(t)$ от модуля параметра сжатия r в логарифмическом масштабе

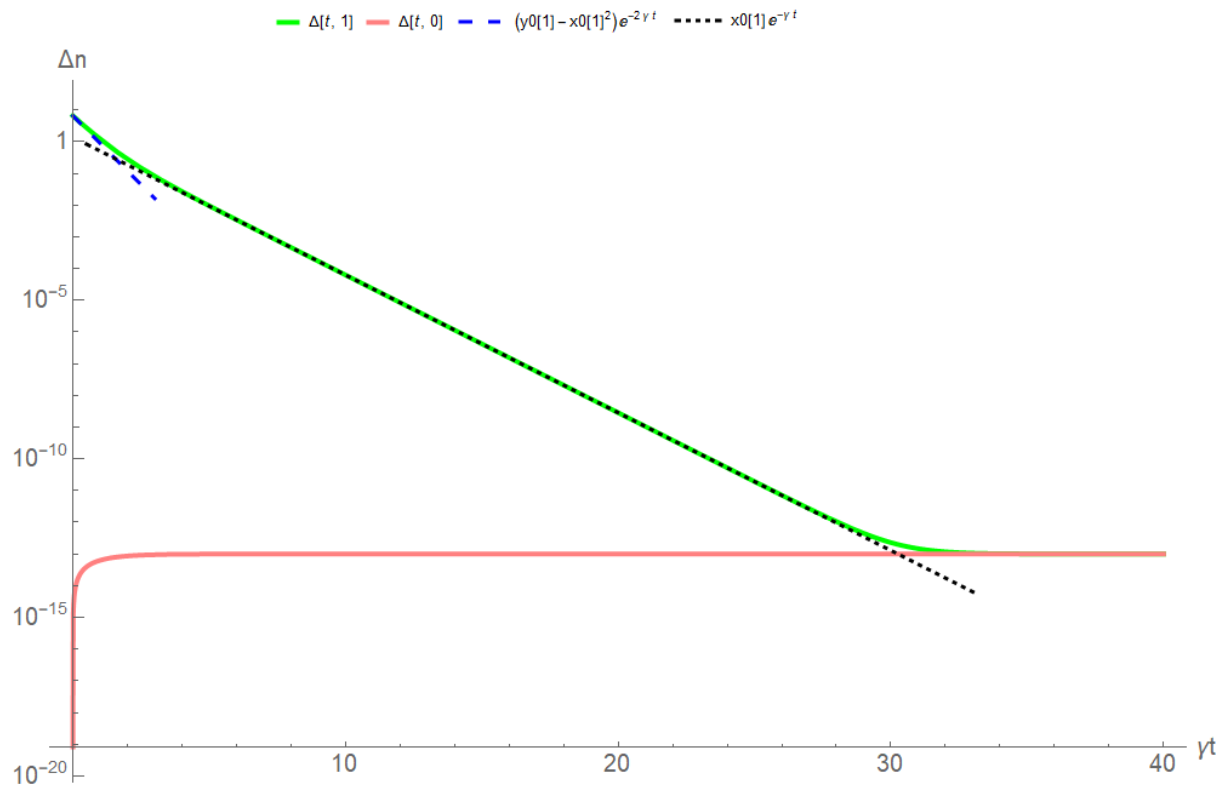


Рисунок 4 –Динамика дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ вакуумного $\rho_{(\text{вак})}(t)$ (красный) и сжатого вакуумного состояния $\rho_{(\text{сж.вак})}(t)$ при $r=1$ (зеленый) в логарифмическом масштабе, приближение на малом временном отрезке (синий пунктир), приближение на большом временном отрезке (черный пунктир)

2.3 Динамика дисперсии среднего числа фотонов сжатого когерентного состояния

Когерентное состояние является наиболее близким описанием когерентного излучения в формализме квантовой оптики:

$$\rho_{0(\text{когер})} = |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (32)$$

Однако сжатое когерентное состояние

$$\rho_{0(\text{сж.когер})} = \hat{S}(\xi)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{S}^\dagger(\xi) \quad (33)$$

не имеет классического аналога по своим уникальным особенностям.

Значения констант x_0 и y_0 , найденные с помощью средних значений $\text{tr}\{\hat{n}\rho_{0(\text{сж. когер})}\}$ и $\text{tr}\{\hat{n}^2\rho_{0(\text{сж. когер})}\}$, составили:

$$\begin{aligned}
x_0 &= |\alpha|^2 (\cosh^2 r + \sinh^2 r) - (\alpha^*)^2 e^{i\theta} \cosh r \cdot \sinh r - \\
&\quad - \alpha^2 e^{-i\theta} \cosh r \cdot \sinh r + \sinh^2 r, \\
y_0 &= |\alpha|^2 (1 + |\alpha|^2) \cosh^4 r + (1 + 3|\alpha|^2 + |\alpha|^4) \sinh^4 r - \\
&\quad - \left[(\alpha^*)^2 (2 + |\alpha|^2) e^{i\theta} + (\alpha^*)^2 |\alpha|^2 + \left(\begin{array}{l} (\alpha^*)^2 |\alpha|^2 \\ + \alpha^2 (2 + |\alpha|^2) \end{array} \right) e^{-i\theta} \right] \cosh^3 r \cdot \sinh r + \\
&\quad + \left[|\alpha|^4 + |\alpha|^4 e^{2i\theta} + |\alpha|^4 e^{-2i\theta} + |\alpha|^2 (2 + |\alpha|^2) + (2 + 4|\alpha|^2 + |\alpha|^4) \right] \cosh^2 r \cdot \sinh^2 r - \\
&\quad - \left[(\alpha^*)^2 (4 + 2|\alpha|^2) e^{i\theta} + \alpha^2 (4 + 2|\alpha|^2) e^{-i\theta} \right] \cosh r \cdot \sinh^3 r - \\
&\quad - (\alpha^*)^2 (2 + |\alpha|^2).
\end{aligned} \tag{34}$$

Параметр сжатия, модуль параметра сжатия r и фаза параметра сжатия θ , оказывает значительное влияние на начальные условия рассмотрения динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$, что приведено на рис.5 и рис.6. Поэтому динамика дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж. когер})}(t)$ была рассмотрена для различных значений модуля параметра сжатия r и фазы параметра сжатия θ в линейном и логарифмическом масштабах (рис.7–10).

Сравнение динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ когерентного $\rho_{(\text{когер})}(t)$ и сжатого когерентного $\rho_{(\text{сж. когер})}(t)$ состояний в логарифмическом (рис.11) масштабах показывает, что сжатое когерентное состояние, как и сжатое вакуумное состояние, рассмотренное выше,

характеризуется на малом временном интервале быстрым затуханием, описываемым выражением (29). Динамика дисперсии среднего числа фотонов когерентного состояния, не претерпевшего сжатия, описывается выражением (28), как и динамика дисперсии среднего числа фотонов сжатого когерентного состояния на большем временном отрезке.

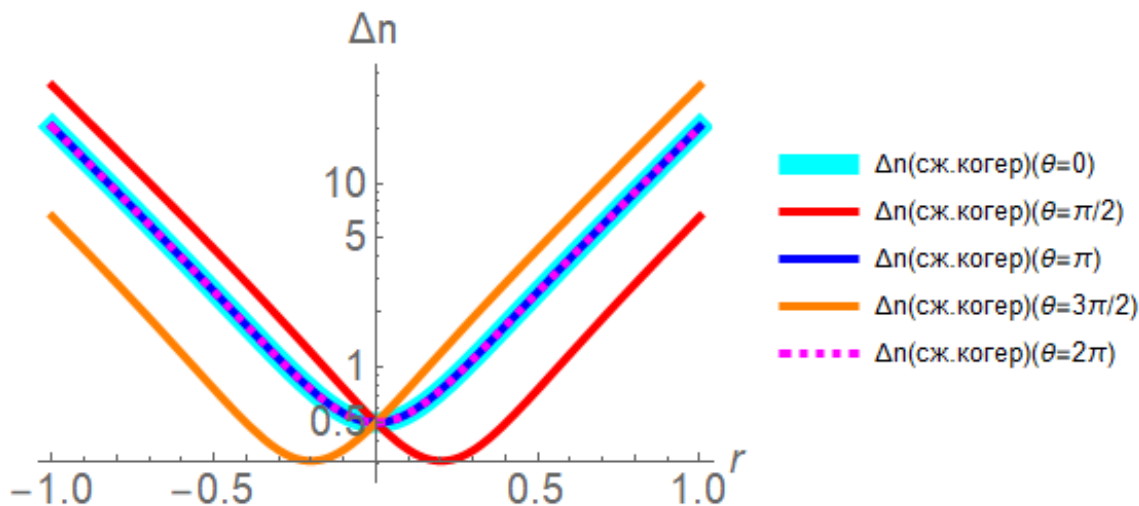


Рисунок 5 – Зависимость дисперсии среднего числа фотонов Δn_0 сжатого когерентного состояния $\rho_{0(\text{сж. когер})}$ от модуля параметра сжатия r при различных значениях фазы параметра сжатия θ в логарифмическом масштабе

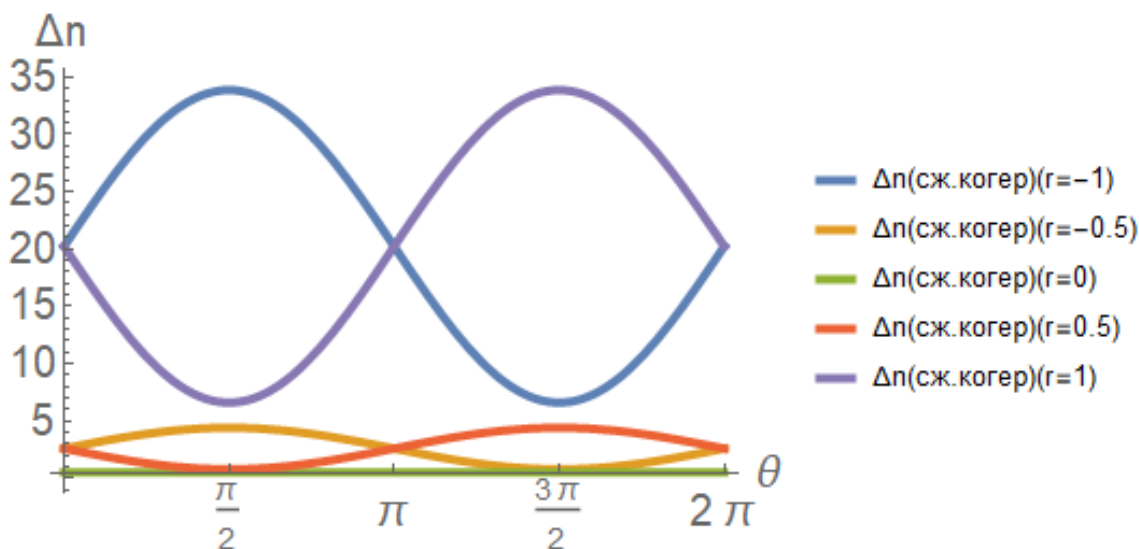


Рисунок 6 – Зависимость дисперсии среднего числа фотонов Δn_0 сжатого когерентного состояния $\rho_{0(\text{сж. когер})}$ от фазы параметра сжатия θ при различных значениях модуля параметра сжатия r в линейном масштабе

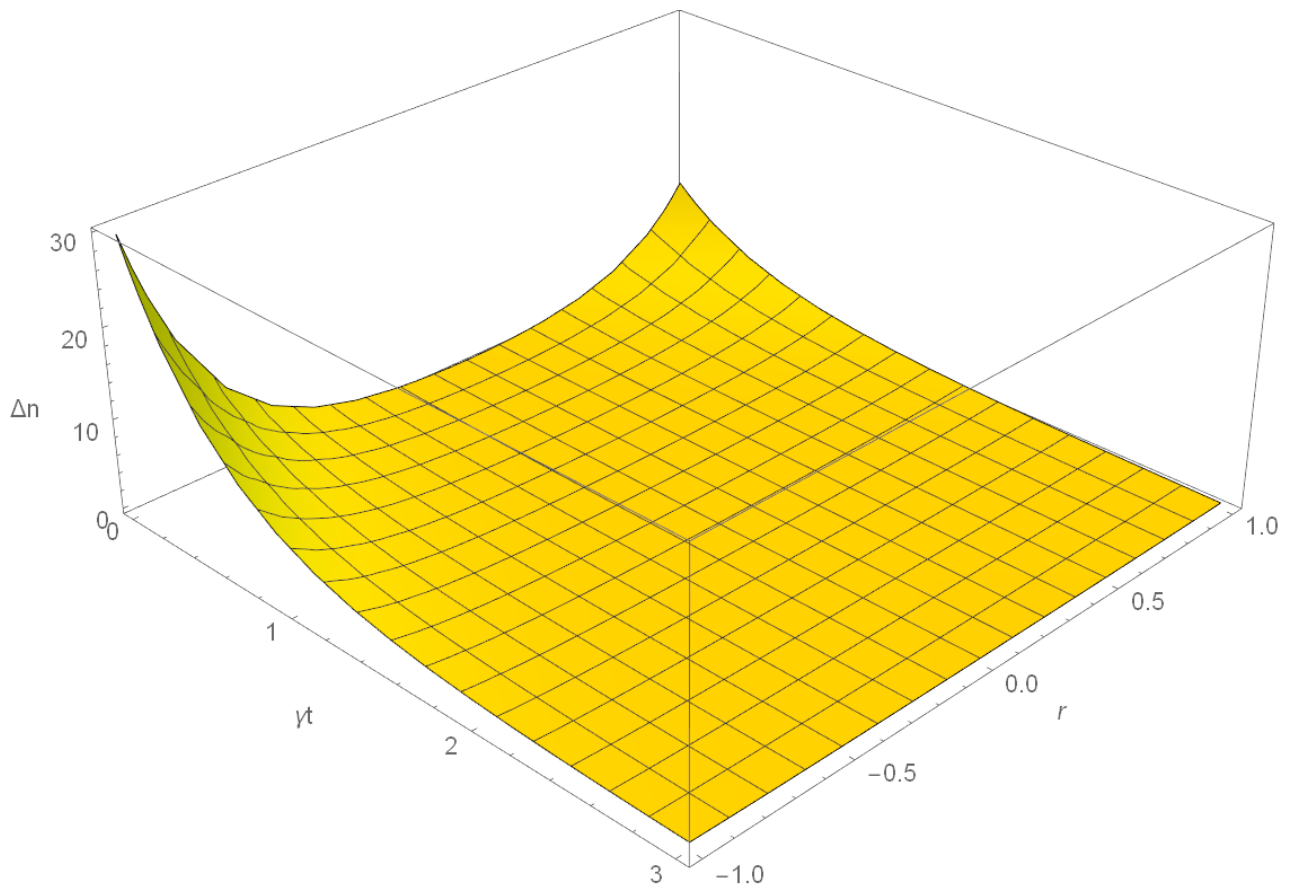


Рисунок 7 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж.когер})}(t)$ от модуля параметра сжатия r при значении фазы параметра сжатия $\theta = \frac{3\pi}{4}$ в линейном масштабе

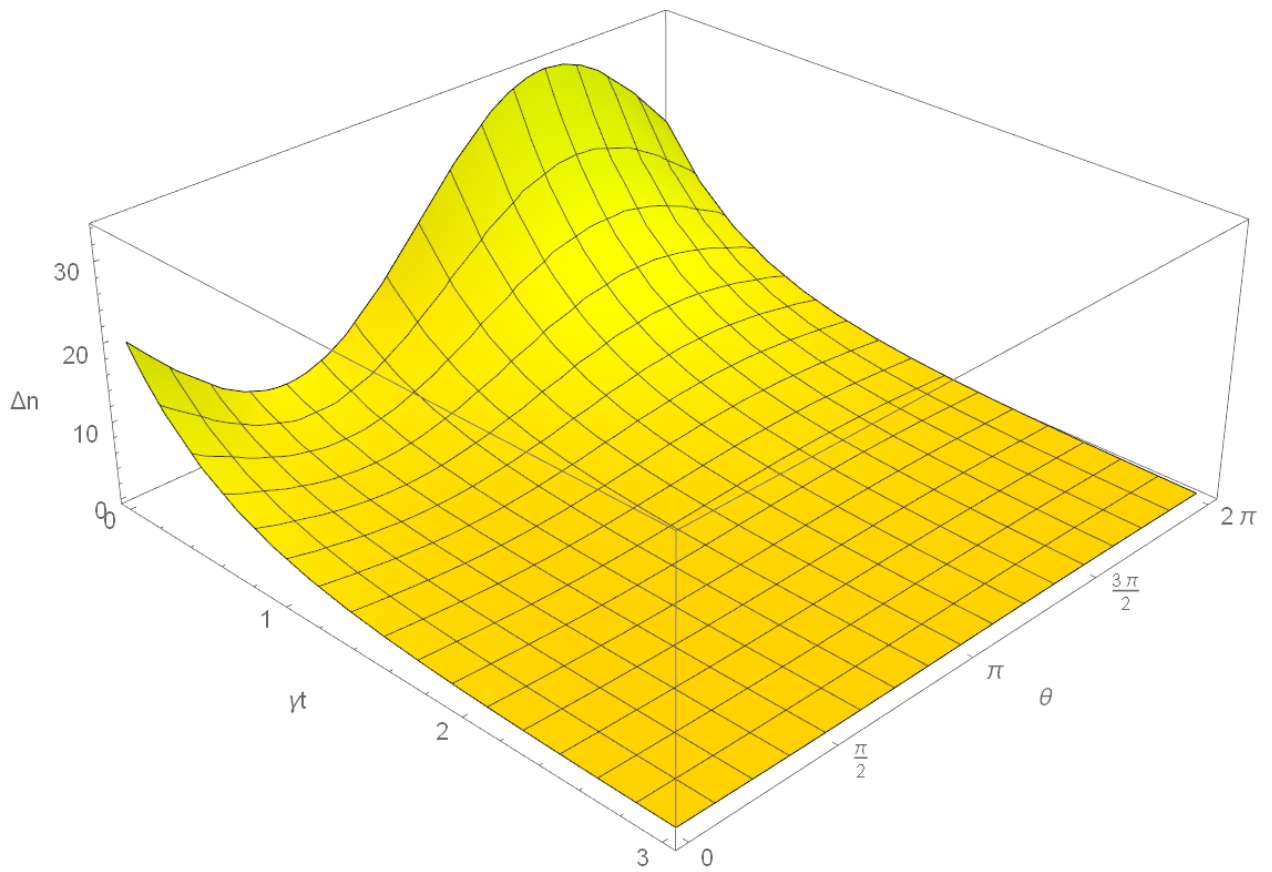


Рисунок 8 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж.когер})}(t)$ от модуля параметра сжатия r при значении фазы параметра сжатия $\theta = \frac{3\pi}{4}$ в логарифмическом масштабе

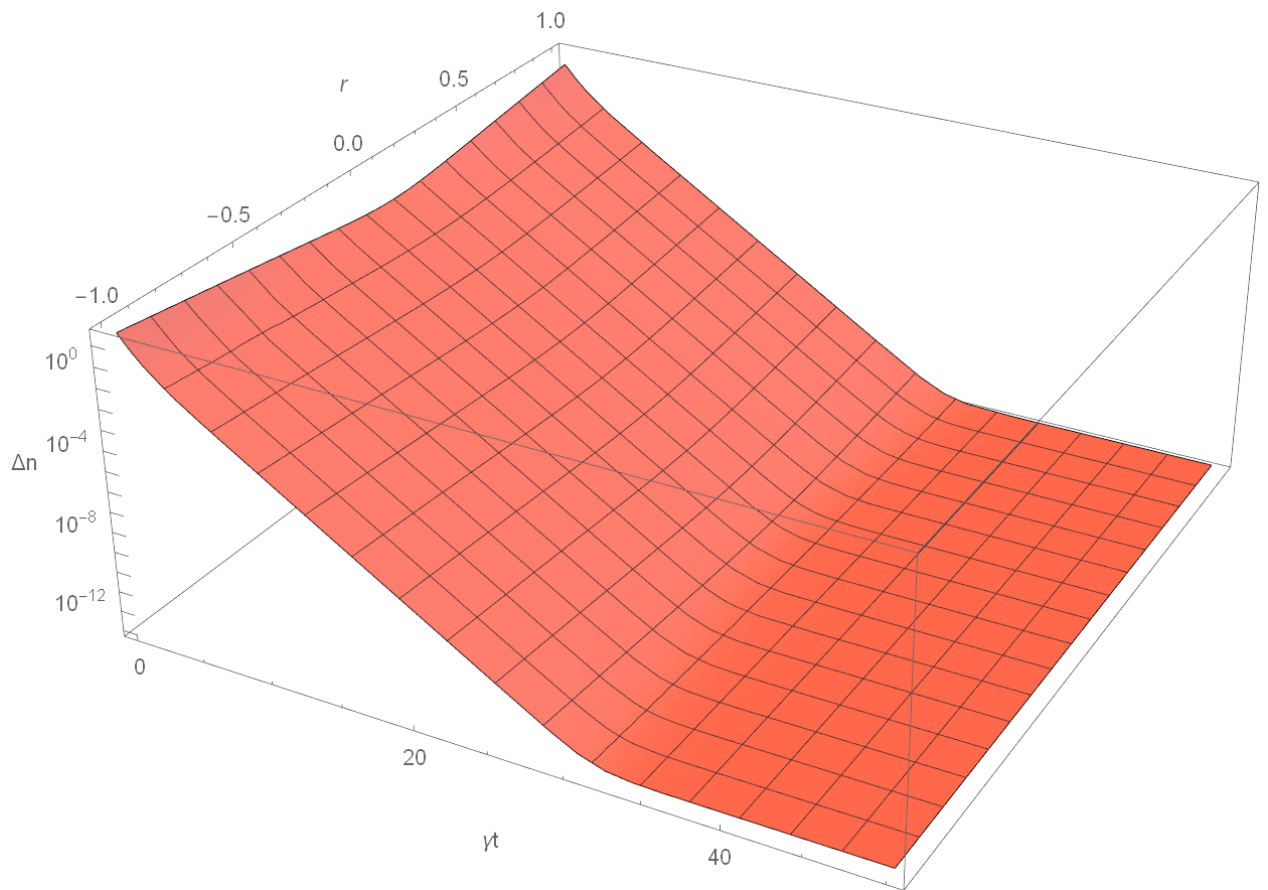


Рисунок 9 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж.когер})}(t)$ от фазы параметра сжатия θ при значении модуля параметра сжатия $r=1$ в линейном масштабе

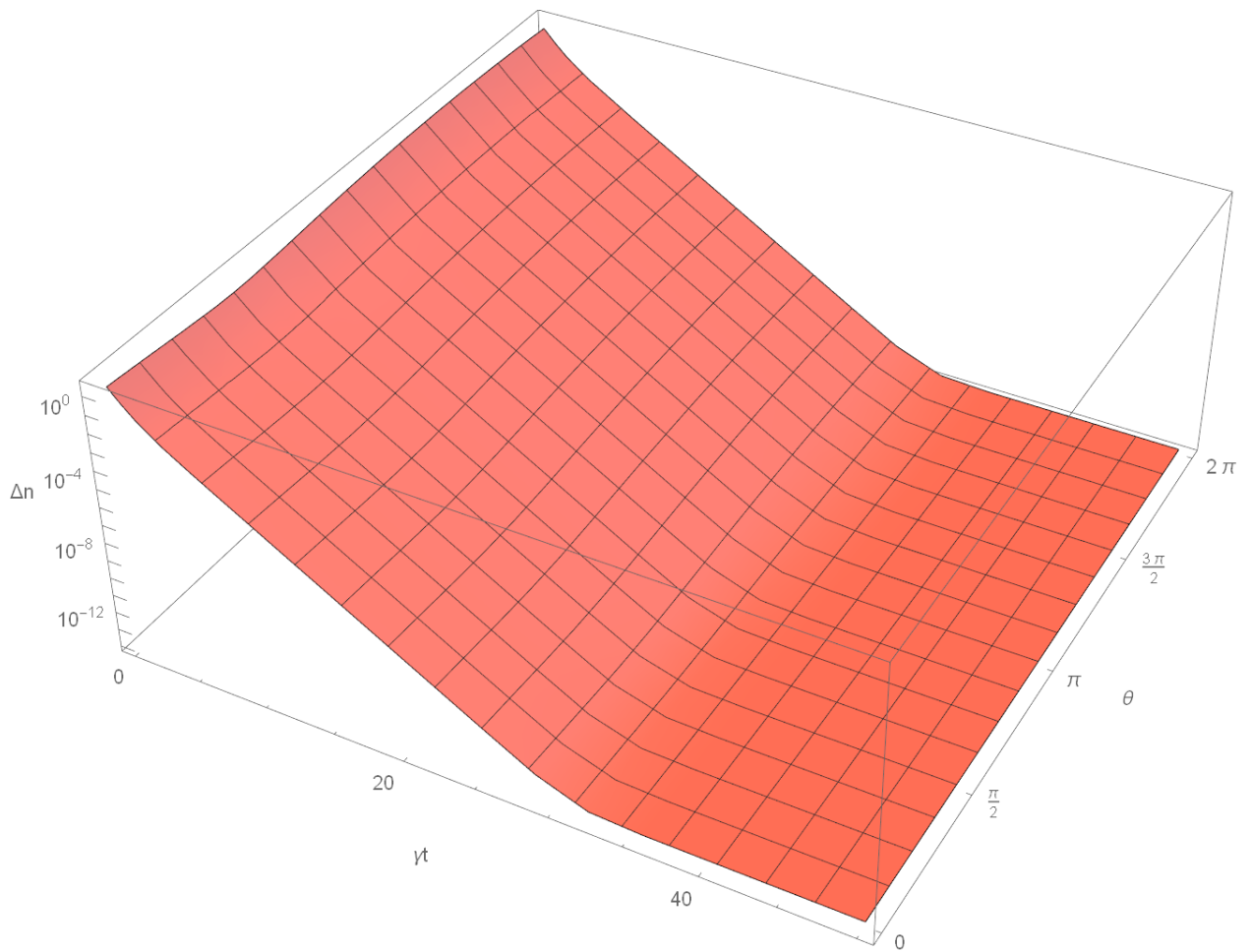


Рисунок 10 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж.когер})}(t)$ от фазы параметра сжатия θ при значении модуля параметра сжатия $r=1$ в логарифмическом масштабе

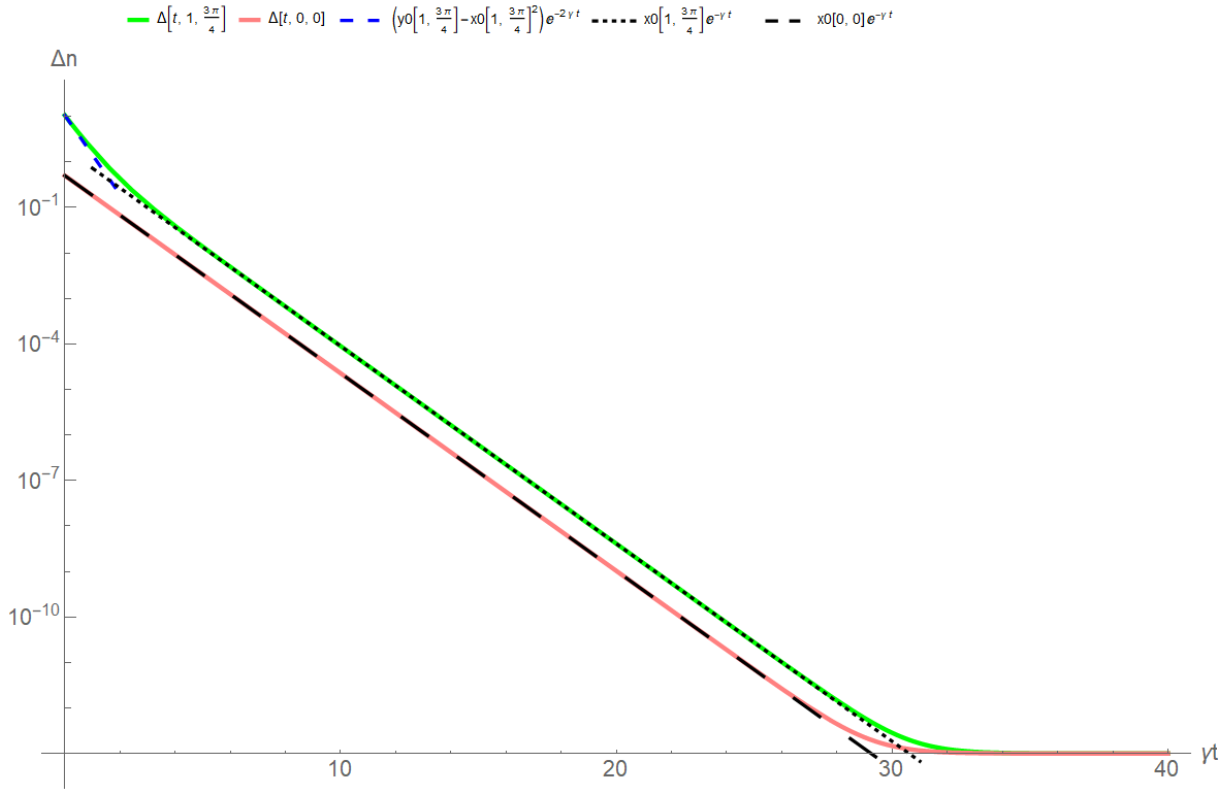


Рисунок 11 –Динамика дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ когерентного состояния $\rho_{\text{(когер)}}(t)$ (красный) и сжатого когерентного состояния $\rho_{\text{(сж.когер)}}(t)$ при $r=1$ и $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (зеленый) в логарифмическом масштабе, приближение на малом временном отрезке (синий пунктир), приближение на большом временном отрезке (черный пунктир)

2.4 Динамика дисперсии среднего числа фотонов суперпозиции когерентных состояний

Суперпозиция когерентных состояний

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos(\varphi)e^{-2|\alpha|^2})}} (|\alpha\rangle + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle), \quad (35)$$

в представлении матрицы плотности имеет вид:

$$\rho_{0(\text{суперпоз.})} = \frac{1}{\mathcal{N}} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + e^{-i\varphi} |\alpha\rangle\langle-\alpha| + e^{i\varphi} |-\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|), \quad (36)$$

где нормировочный коэффициент \mathcal{N} составляет:

$$\mathcal{N} = \left| \sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \varphi)} \right|^2. \quad (37)$$

Это состояние также является примером уникального квантового эффекта, заключающегося в нахождении квантового состояния в двух взаимоисключающих состояниях одновременно.

При значении разности фаз $\varphi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ такую суперпозицию называют четной (при разложении этого состояния по базису Фока сумма содержит только слагаемые с четными значениями числа фотонов в моде):

$$|\psi\rangle_{\text{even}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2})}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (38)$$

тогда как при $\varphi = \pi(1 + 2n)$, $n \in \mathbb{Z}$ нечетной (при разложении этого состояния по базису Фока сумма содержит только слагаемые с нечетными значениями числа фотонов в моде):

$$|\psi\rangle_{\text{odd}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - e^{-2|\alpha|^2})}} (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle). \quad (39)$$

Рассмотрение средних значений $\text{tr}\{\hat{n}\rho_{0(\text{суперпоз.})}\}$ и $\text{tr}\{\hat{n}^2\rho_{0(\text{суперпоз.})}\}$

позволило найти необходимые константы x_0 и y_0 :

$$x_0 = \frac{2|\alpha|^2}{\left| \sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \varphi)} \right|^2} (1 - e^{-2|\alpha|^2} \cos \varphi),$$

$$y_0 = \frac{2|\alpha|^2}{\left| \sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha|^2} \cos \varphi)} \right|^2} \left(1 + |\alpha|^2 - e^{-2|\alpha|^2} (\cos \varphi - |\alpha|^2 \cos \varphi) \right). \quad (40)$$

Динамика дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ суперпозиции когерентных состояний $\rho_{(\text{суперпоз.})}(t)$ приведена для различных значений разности фаз φ (рис. 12) в линейном (рис. 13) и логарифмическом (рис. 14) масштабах. Рассмотрение динамики дисперсии среднего числа фотонов суперпозиции когерентных состояний в логарифмическом масштабе (рис. 15) позволяет определить, что выражение (29) и в этом случае способно дать описание динамики на большем временном интервале. Нетривиальным результатом оказалось наблюдение увеличения значения дисперсии среднего числа фотонов при нечётной суперпозиции когерентных состояний, что показано на рис. 15.

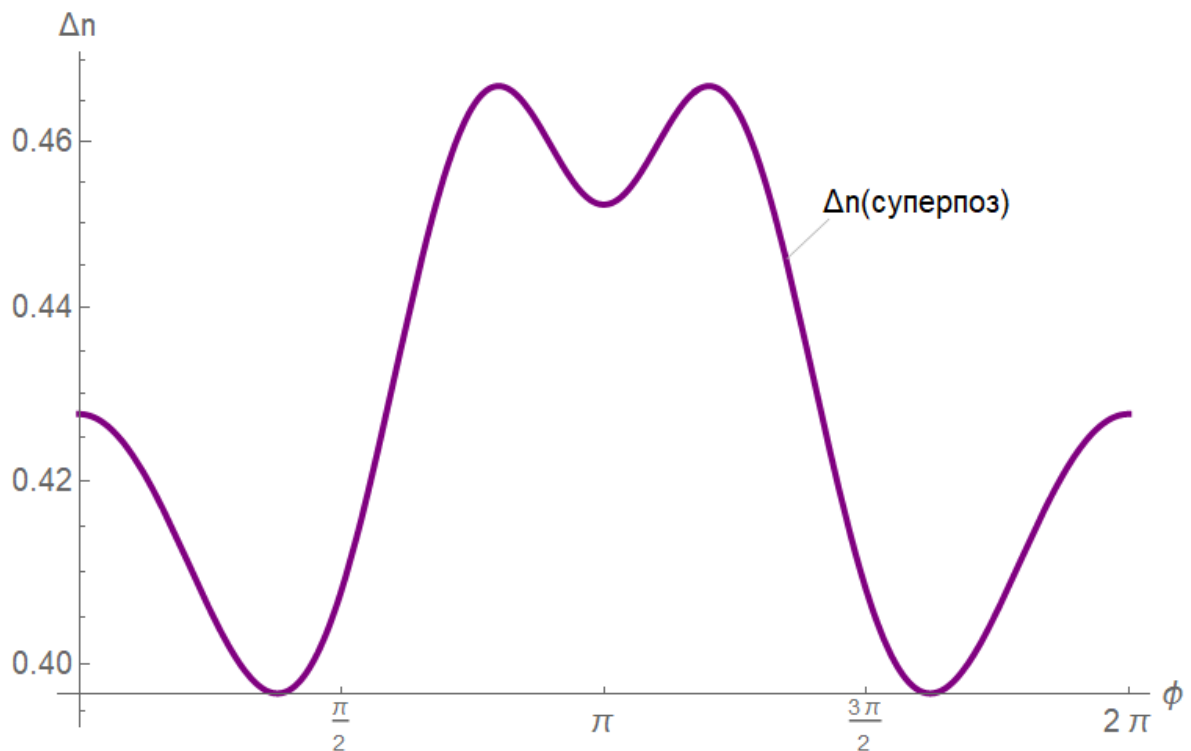


Рисунок 12 – Зависимость дисперсии среднего числа фотонов Δn_0 суперпозиции когерентных состояний $\rho_{0(\text{суперпоз.})}$ от разности фаз φ в линейном масштабе

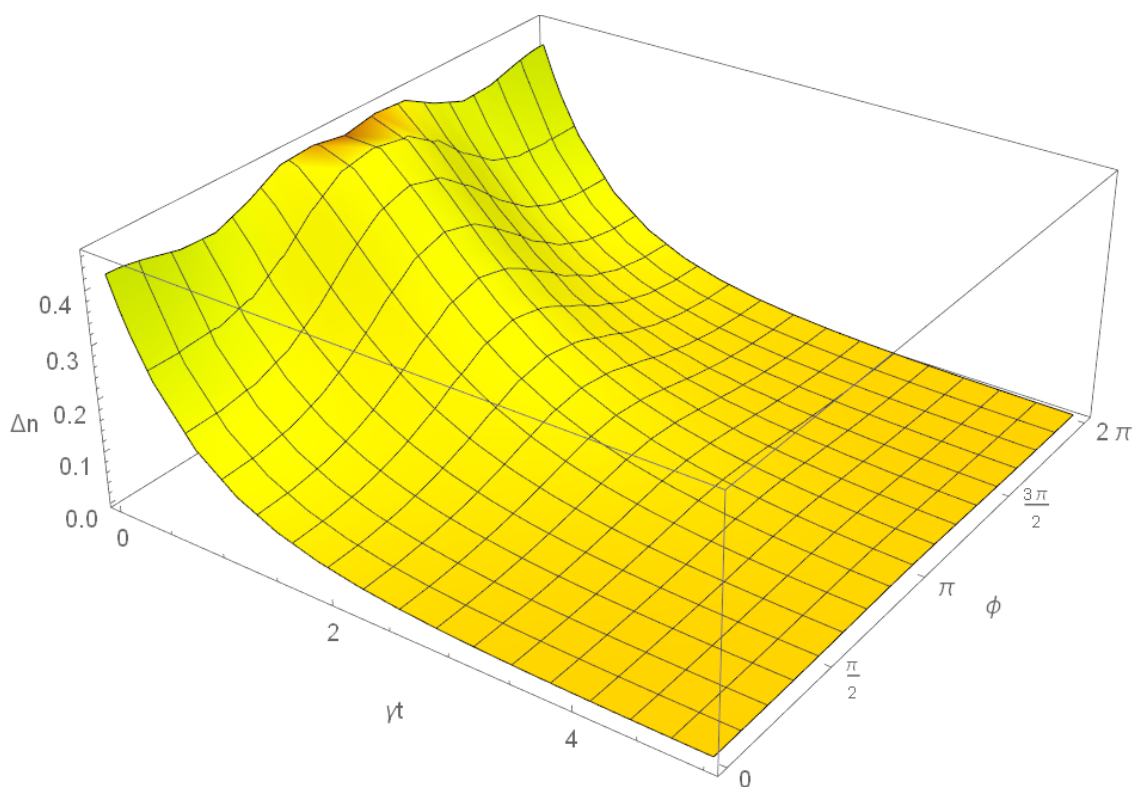


Рисунок 13 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ суперпозиции когерентных состояний $\rho_{(\text{суперпоз.})}(t)$ от разности фаз φ в линейном масштабе

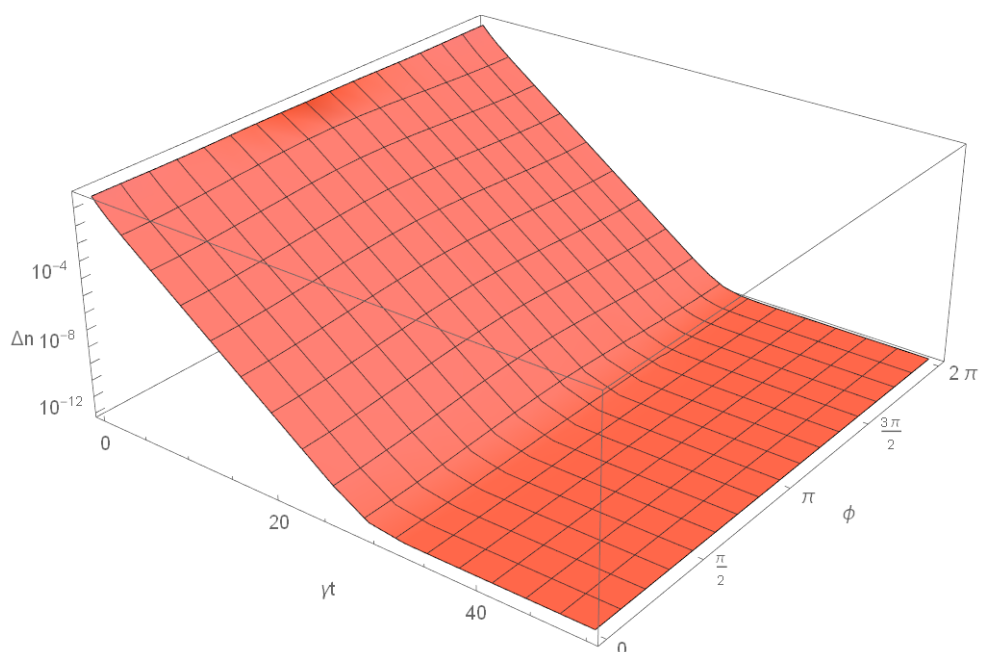


Рисунок 14 – Зависимость динамики дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ суперпозиции когерентных состояний $\rho_{(\text{суперпоз.})}(t)$ от разности фаз φ в логарифмическом масштабе

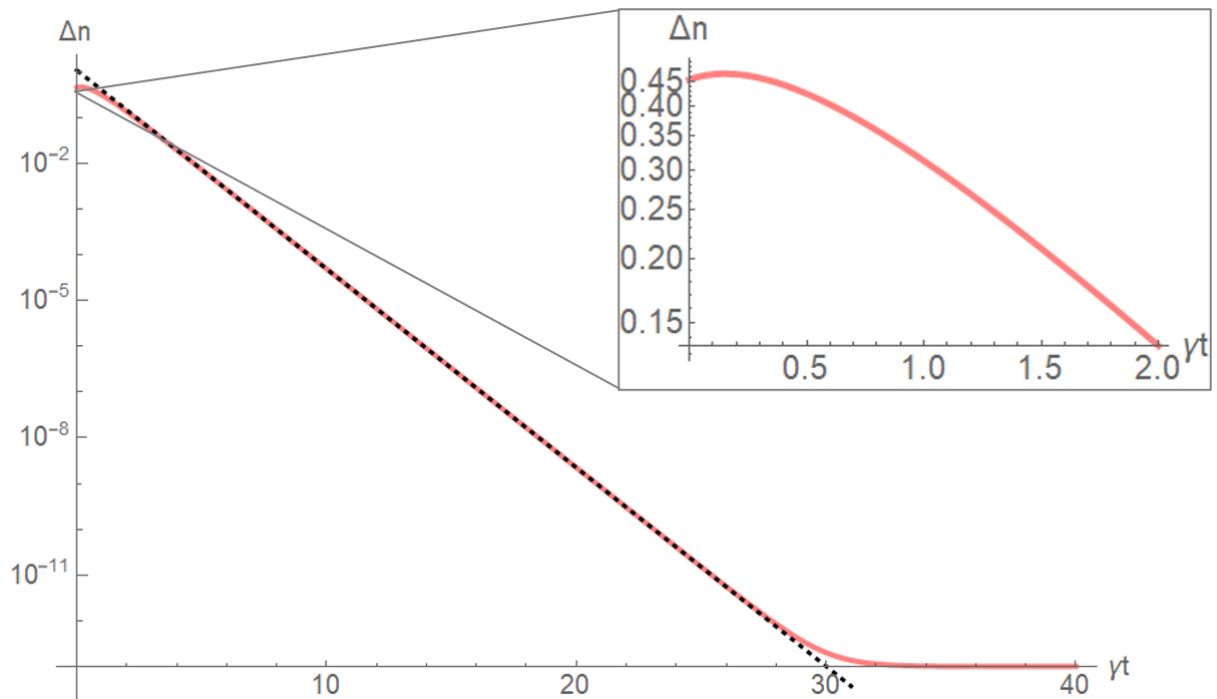


Рисунок 15 – Динамика дисперсии среднего числа фотонов $\Delta n(t)$ суперпозиции когерентных состояний $\rho_{(\text{суперпоз.})}(t)$ при значении разности фаз $\varphi = \pi$ (красный) в логарифмическом масштабе, приближение на большом временном отрезке (черный пунктир)

2.5 Динамика дисперсии среднего числа фотонов состояния: основные выводы

В данной части работы была рассмотрена динамика дисперсии среднего числа фотонов квантового состояния. С помощью теории открытых квантовых систем и формализма матриц плотности были выведены аналитические выражения, способные дать описание этой динамики.

Было установлено, что динамика дисперсии среднего числа фотонов характеризуется экспоненциальным затуханием. Скорость затухания различна на двух временных отрезках. Были найдены аппроксимирующие динамик на двух временных отрезках.

В качестве примеров были приведены численные модели динамики дисперсии среднего числа фотонов сжатого вакуумного, сжатого когерентного состояний и суперпозиции когерентных состояний. Было установлено влияние

значений параметра сжатия на начальные значения величины дисперсии: при увеличении по модулю значения модуля параметра сжатия r происходит увеличение значений дисперсии среднего числа фотонов.

С помощью выражений (30) и (31) были определены значения дистанции L_q – расстояние, на котором происходит смена динамики затухания значения дисперсии среднего числа фотонов, и L_T – расстояние, на котором можно говорить о термализации системы. Стоит отметить, что полная термализация системы – присутствие только тепловых фотонов в моде – наступает асимптотически при стремлении времени распространения к бесконечности. Поэтому за фактический момент термализации далее будет принята координата по оси абсцисс пересечения приближения динамики дисперсии (29) и значения среднего числа тепловых фотонов. Было определено, что для сжатого вакуумного состояния, характеризующегося $r=1$ характерные расстояния составили: $L_{q(\text{сж.вак})} \sim 34$ км, $L_{T(\text{сж.вак})} \sim 690$ км; для сжатого когерентного состояния, характеризующегося $r=1$ и $\theta = \frac{3\pi}{4}$: $L_{q(\text{сж.когер})} \sim 36$ км, $L_{T(\text{сж.когер})} \sim 700$ км; для суперпозиции когерентных состояний при $\varphi = \frac{3\pi}{4}$: $L_{T(\text{суперпоз.})} \sim 630$ км.

3 ДИНАМИКА НАБЛЮДАЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ КВАДРАТУР

3.1 Уравнение динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур состояния

Представляет интерес рассмотрение средних значений наблюдаемых операторов квадратур:

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \\ \hat{p} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}),\end{aligned}\tag{41}$$

так как операторы квадратур \hat{q} и \hat{p} представляют вещественную и мнимую части оператора комплексной амплитуды $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p})$.

Используя подход, приведенный в выражении (14), на основе уравнений (11) – (13) были выведены уравнения динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур:

$$\begin{aligned}q(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} (q_0 \cos \omega t + p_0 \sin \omega t), \\ p(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} (p_0 \cos \omega t - q_0 \sin \omega t),\end{aligned}\tag{42}$$

где константы q_0 и p_0 могут быть найдены для конкретного состояния из начальных условий:

$$\begin{aligned}q_0 &= \langle \hat{q}(t) \rangle \Big|_{t=0} = \text{tr} \{ \hat{q} \rho_0 \}, \\ p_0 &= \langle \hat{p}(t) \rangle \Big|_{t=0} = \text{tr} \{ \hat{p} \rho_0 \}.\end{aligned}\tag{43}$$

Далее будут рассмотрены примеры анализа динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур сжатого когерентного состояния и суперпозиции когерентных состояний. Сжатое вакуумное состояние имеет

нулевую амплитуду $\alpha = 0$, как было отмечено ранее, поэтому не представляет интереса в рассмотрении.

3.2 Динамика средних значений наблюдаемых операторов квадратур сжатого когерентного состояния

Приведенная ранее матрица плотности сжатого когерентного состояния $\rho_{0(\text{сж.когер})}$ позволяет найти константы q_0 и p_0 с помощью применения операции взятия следа $\text{tr}\{\hat{q}\rho_{0(\text{сж.когер})}\}$ и $\text{tr}\{\hat{p}\rho_{0(\text{сж.когер})}\}$:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\alpha^* + \alpha) \cosh r - (\alpha e^{-i\theta} + \alpha^* e^{i\theta}) \sinh r \right], \\ p_0 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[(\alpha^* - \alpha) \cosh r - (\alpha e^{-i\theta} - \alpha^* e^{i\theta}) \sinh r \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Динамика средних значений наблюдаемых операторов квадратур $q(t)$ и $p(t)$ сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж.когер})}(t)$ находится в зависимости от модуля параметра сжатия r и фазы параметра сжатия θ . На рис. 16, 17 приведено численное моделирование зависимости динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур $q(t)$ и $p(t)$ от значений параметра сжатия при $\omega = 10$ рад/с для демонстрации характера осцилляций. Значение ω , соответствующее рассматриваемой длине волны излучения 1550 нм, из-за очень большой величины неудобно для численного расчета. Главный интерес при анализе динамики представляет именно огибающая осцилляций. С течением времени термализация системы приводит к затуханию осцилляций, из-за чего средние значения наблюдаемых асимптотически стремятся к нулевым значениям (рис. 18). Из анализа выражений (42) было установлено, что динамика средних значений наблюдаемых операторов квадратур $q(t)$ и $p(t)$ характеризуется экспоненциальным затуханием с коэффициентом, зависящим от начальных условий следующим образом:

$$f_{\text{огиб (сжат.когер)}}(t) = \pm \sqrt{q_0^2 + p_0^2} e^{-\frac{\gamma}{2}t}. \quad (45)$$

Анализ выражения огибающей осцилляций (45) позволил дать следующую оценку: за отрезок безразмерного времени

$$\gamma t = 2 \quad (46)$$

происходит уменьшение амплитуды осцилляций в e раз.

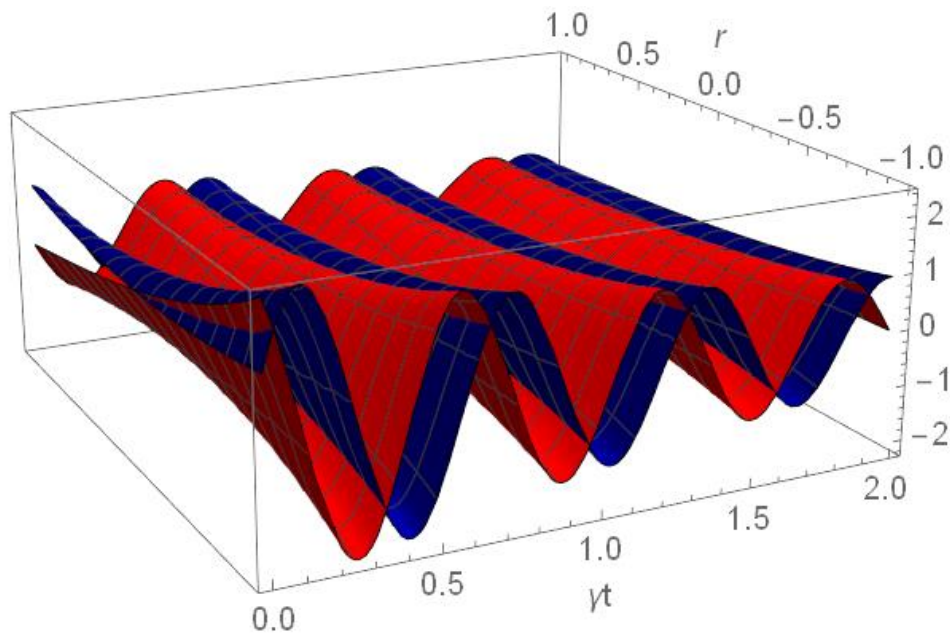


Рисунок 16 – Зависимость динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур $q(t)$ (синий) и $p(t)$ (красный) сжатого когерентного состояния $\rho_{\text{(сж.когер)}}(t)$ от модуля параметра сжатия r при значении фазы

параметра сжатия $\theta = \frac{3\pi}{4}$ в линейном масштабе

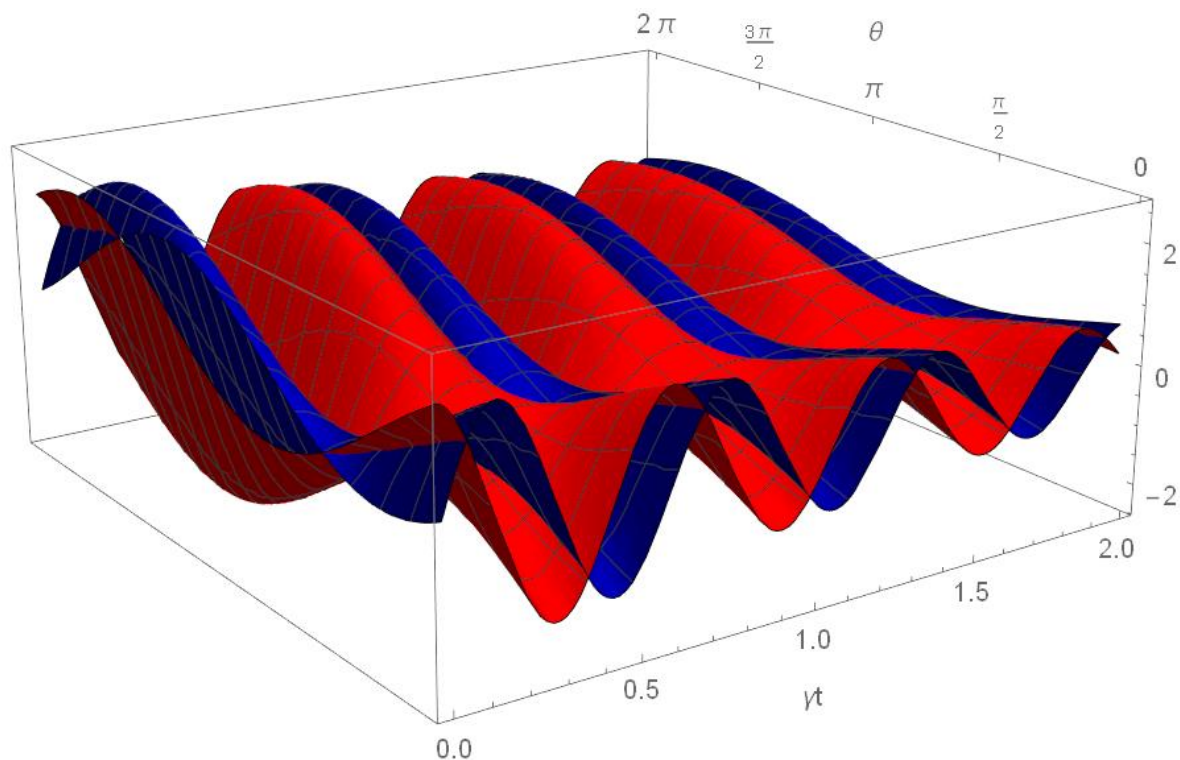


Рисунок 17 – Зависимость динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур $q(t)$ (синий) и $p(t)$ (красный) сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж. когер})}(t)$ от фазы параметра сжатия θ при значении модуля параметра сжатия $r=1$ в линейном масштабе

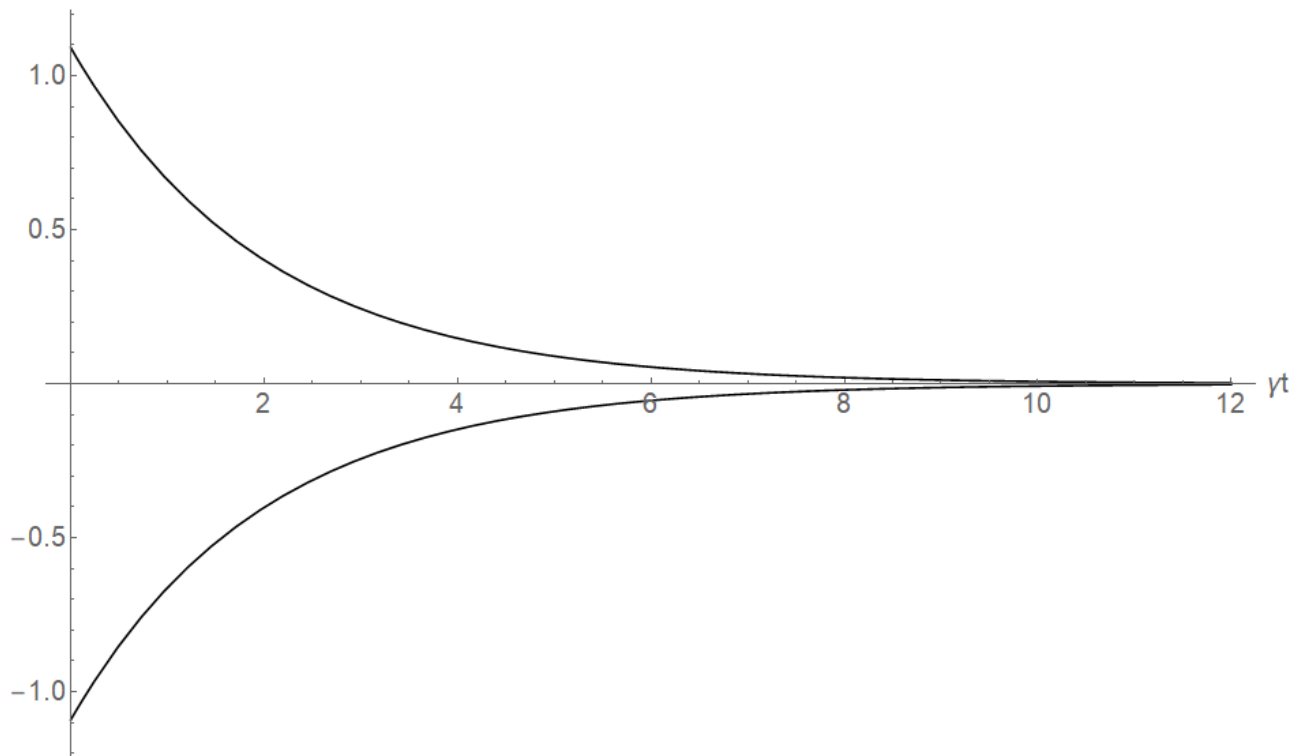


Рисунок 18 – Огибающая динамики среднего значения наблюдаемого оператора квадратуры $q(t)$ сжатого когерентного состояния $\rho_{(\text{сж.когер})}(t)$ при значении модуля параметра сжатия $r=1$ и фазы параметра сжатия $\theta = \frac{3\pi}{4}$ осциллирующих значений $f_{\text{огиб (сжат.когер)}}(t)$ в линейном масштабе

3.3 Динамика средних значений наблюдаемых операторов квадратур суперпозиции когерентных состояний

Значения констант q_0 и p_0 для суперпозиции когерентных состояний $\rho_{0(\text{суперпоз.})}$, найденные с помощью $\text{tr}\{\hat{q}\rho_{0(\text{суперпоз.})}\}$ и $\text{tr}\{\hat{p}\rho_{0(\text{суперпоз.})}\}$, составили:

$$\begin{aligned}
q_0 &= \frac{\sqrt{2}ie^{-2|\alpha|^2}}{\left|\sqrt{2(1+e^{-2|\alpha|^2}\cos\varphi)}\right|^2}(\alpha^* - \alpha)\sin\varphi, \\
p_0 &= \frac{-\sqrt{2}e^{-2|\alpha|^2}}{\left|\sqrt{2(1+e^{-2|\alpha|^2}\cos\varphi)}\right|^2}(\alpha^* + \alpha)\sin\varphi.
\end{aligned}
\tag{47}$$

Приведённая динамика средних значений наблюдаемых операторов квадратур $q(t)$ и $p(t)$ суперпозиции когерентных состояний $\rho_{(\text{суперпоз.})}(t)$, находящаяся в зависимости от разности фаз φ (рис.19) также имеет характер осцилляций, экспоненциально затухающих с течением времени (рис.20). Аналитический вид огибающей экспоненциально затухающих колебаний является аналогичным рассмотренному выше выражению (45) огибающей для случая сжатых когерентных состояний. Так же, как и в случае сжатых когерентных состояний, уменьшение амплитуды осцилляций в e раз по сравнению с начальным значением происходит при координате по оси абсцисс, описываемой выражением (46).

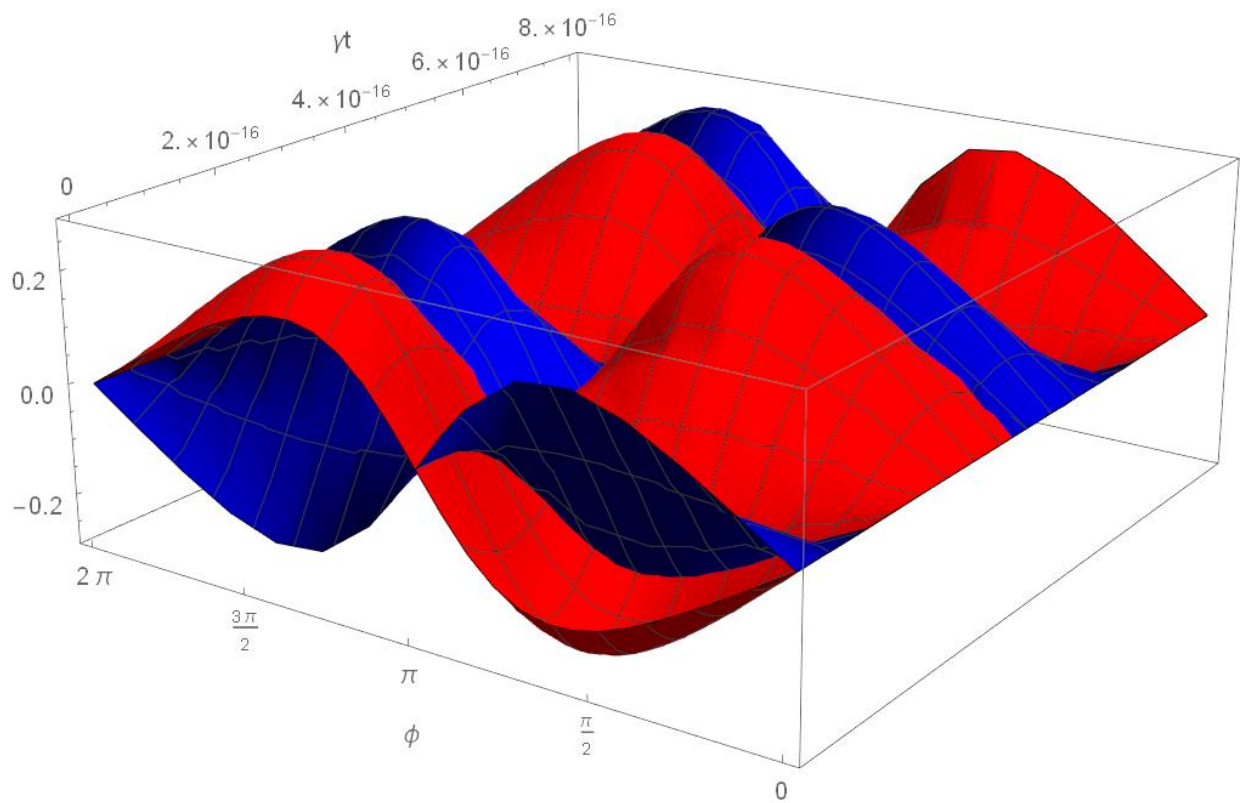


Рисунок 19 – Зависимость динамики средних значений наблюдаемых операторов квадратур $q(t)$ (синий) и $p(t)$ (красный) суперпозиции когерентных состояний $\rho_{(\text{суперпоз.})}(t)$ от разности фаз φ в линейном масштабе

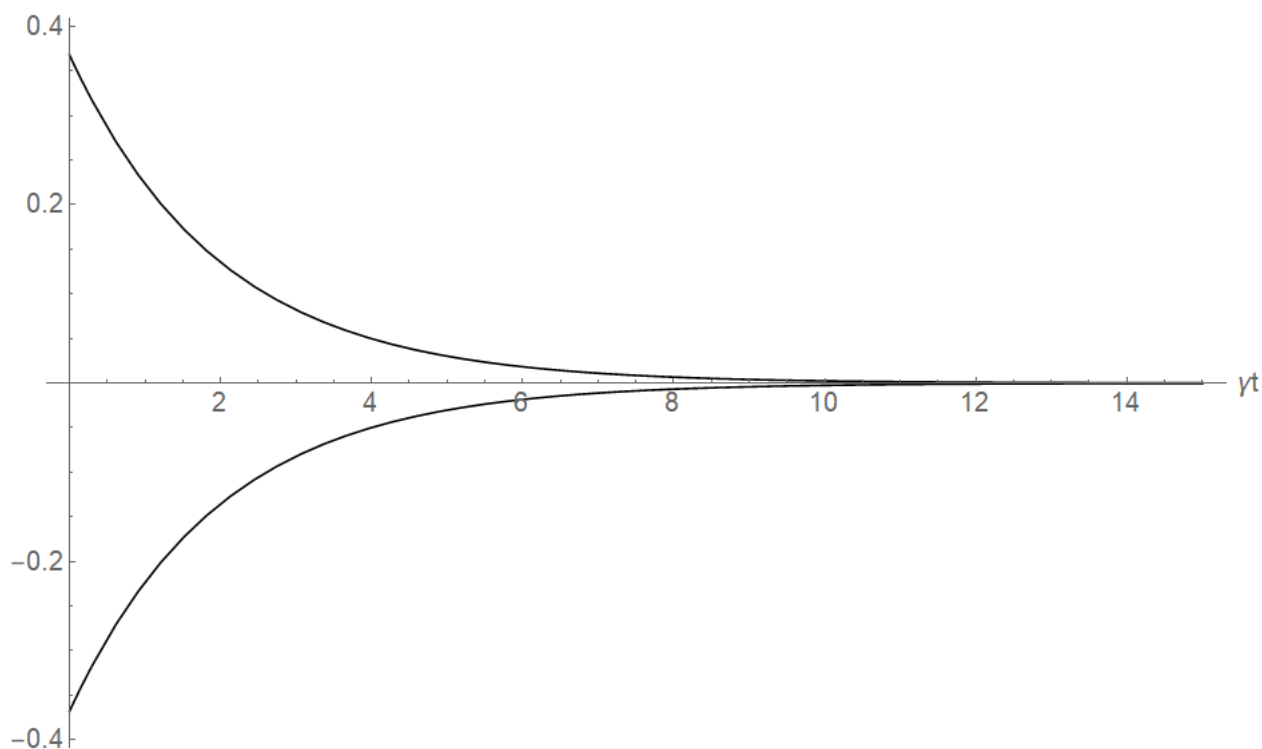


Рисунок 20 – Огибающая динамики среднего значения наблюдаемого оператора квадратуры $q(t)$ суперпозиции когерентных состояний

$\rho_{(\text{суперпоз.})}(t)$ при значении разности фаз $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ в линейном масштабе

3.4 Динамика среднего значения наблюдаемых операторов квадратур состояния: основные выводы

В ходе исследования средних значений наблюдаемых операторов квадратур подтвердился общий предполагаемый характер динамики: затухающие осцилляции. Удалось получить уточнение, показывающее, что затухание осцилляций является экспоненциальным с показателем, равным половине скорости термализации.

Было найдено аналитическое выражение, описывающее огибающую затухающих осцилляций, что позволяет определить, например, расстояние L_e , за которое происходит уменьшение величины амплитуды осцилляций в e раз. Как для случая сжатых когерентных состояний, так и для случая суперпозиции когерентных состояний оно составило порядка 45 км.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описание динамики открытых квантовых систем в настоящее время является комплексной и при этом высокомотивированной задачей. Несмотря на то, что этот вопрос в исторической ретроспективе имеет значительную историю развития, и сейчас остаются вопросы, требующие нахождения решения.

Методы, предлагаемые исследователями на протяжении развития этой области, достаточно разнообразны, и их выбор аргументирован характеристиками конкретного случая. Кроме того, с помощью приближений возможно осуществить переход от более общих уравнений, описывающих эволюцию открытых квантовых систем, к рассмотрению частных интересующих примеров.

Так в ходе работы был произведен анализ особенностей распространения неклассических состояний света в оптоволоконном канале, в рамках приближений, вводимых решением уравнения Линдблада. Были выведены и проанализированы выражения, описывающие динамику полевых наблюдаемых: дисперсии среднего числа фотонов и средних значений операторов квадратур.

Было установлено, что динамика дисперсии среднего числа фотонов характеризуется экспоненциальным затуханием, скорость которого различна на двух временных отрезках. Было определено, что динамика средних значений операторов квадратур имеет характер затухающих осцилляций. Аналитическое выражение огибающей осцилляций было найдено. Найденные аппроксимирующие динамик позволили определить характерные расстояния распространения неклассических состояний: за $L_e \sim 45$ км происходит уменьшение амплитуды средних значений операторов квадратур в e раз, на расстоянии $L_q \sim 30-40$ км происходит смена динамики убывания значений дисперсии среднего числа фотонов, а на $L_T \sim 600-700$ км можно говорить о

полной термализации состояния. Приведены интервалы значений, так как на величину расстояния распространения влияют амплитуда состояний, значения параметра сжатия или разности фаз.

Полученные результаты будут важны для учета явлений диссипации, а именно термализации, и декогеренции в открытых квантовых системах при рассмотрении широкого круга применений, например, квантовых протоколов шифрования, алгоритмов квантовых вычислений, гомодинном детектировании и создании систем квантового имаджинга. Таким образом, произведенная оценка характерных времён распространения квантовых состояний через оптоволоконный канал представляет интерес как с точки зрения фундаментальных исследований, так и прикладных разработок.

В дальнейшей работе планируется проведение эксперимента для сопоставления экспериментально полученных данных с теоретическими. Также представляет интерес анализ динамики дисперсии средних значений операторов квадратур для рассмотрения принципа неопределённости Гейзенберга и уточнения времени декогеренции. Кроме того, в силу универсальности метода планируется рассмотрение других операторов и возможности его применения для случая двумодовых и многомодовых состояний.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Acín A. et al. The quantum technologies roadmap: a European community view //New Journal of Physics. – 2018. – Т. 20. – №. 8. – С. 080201.
2. Pirandola S. et al. Advances in quantum cryptography //Advances in Optics and Photonics. – 2020. – Т. 12. – №. 4. – С. 1012-1236.
3. Georgescu I. M., Ashhab S., Nori F. Quantum simulation //Reviews of Modern Physics. – 2014. – Т. 86. – №. 1. – С. 153.
4. Preskill J. Quantum Computing in the NISQ era and beyond //Quantum. – 2018. – Т. 2. – С. 79.
5. Giovannetti V., Lloyd S., Maccone L. Advances in quantum metrology //Nature photonics. – 2011. – Т. 5. – №. 4. – С. 222.
6. Joos E. et al. Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory. – Springer Science & Business Media, 2013.
7. Breuer H. P. et al. The theory of open quantum systems. – Oxford University Press on Demand, 2002.
8. Berkelbach T. C., Thoss M. Special topic on dynamics of open quantum systems. – 2020.
9. Wang H., Thoss M. Multilayer formulation of the multiconfiguration time-dependent Hartree theory //The Journal of chemical physics. – 2003. – Т. 119. – №. 3. – С. 1289-1299.
10. Picconi D., Burghardt I. Open system dynamics using Gaussian-based multiconfigurational time-dependent Hartree wavefunctions: Application to environment-modulated tunneling //The Journal of chemical physics. – 2019. – Т. 150. – №. 22. – С. 224106.
11. Bouakline F., Fischer E. W., Saalfrank P. A quantum-mechanical tier model for phonon-driven vibrational relaxation dynamics of adsorbates at surfaces //The Journal of chemical physics. – 2019. – Т. 150. – №. 24. – С. 244105.
12. Werther M. et al. Davydov-Ansatz for Landau-Zener-Stueckelberg-Majorana transitions in an environment: Tuning the survival probability via number

- state excitation //The Journal of chemical physics. – 2019. – T. 150. – №. 23. – C. 234109.
13. Shastry A., Xu Y., Stafford C. A. The third law of thermodynamics in open quantum systems //The Journal of Chemical Physics. – 2019. – T. 151. – №. 6. – C. 064115.
 14. Carmichael H. An open systems approach to quantum optics: lectures presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991. – Springer Science & Business Media, 2009. – T. 18.
 15. Zwanzig R. Nonequilibrium statistical mechanics. – Oxford University Press, 2001.
 16. Nakajima S. On quantum theory of transport phenomena: steady diffusion //Progress of Theoretical Physics. – 1958. – T. 20. – №. 6. – C. 948-959.
 17. Zwanzig R. Ensemble method in the theory of irreversibility //The Journal of Chemical Physics. – 1960. – T. 33. – №. 5. – C. 1338-1341.
 18. Xu M. et al. Convergence of high order memory kernels in the Nakajima-Zwanzig generalized master equation and rate constants: Case study of the spin-boson model //The Journal of chemical physics. – 2018. – T. 148. – №. 16. – C. 164101.
 19. Albert V. V. et al. Lindbladians with multiple steady states: theory and applications //Bulletin of the American Physical Society. – 2017. – T. 62.
 20. Redfield A. G. The theory of relaxation processes //Advances in Magnetic and Optical Resonance. – Academic Press, 1965. – T. 1. – C. 1-32.
 21. Trushechkin A. S. Higher-order corrections to the Redfield equation with respect to the system-bath coupling based on the hierarchical equations of motion //Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – T. 40. – №. 10. – C. 1606-1618.
 22. Zhang W. M. Exact master equation and general non-Markovian dynamics in open quantum systems //The European Physical Journal Special Topics. – 2019. – T. 227. – №. 15. – C. 1849-1867.

23. Megier N., Smirne A., Vacchini B. Evolution equations for quantum semi-Markov dynamics //Entropy. – 2020. – T. 22. – №. 7. – C. 796.
24. Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E. C. G. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems //Journal of Mathematical Physics. – 1976. – T. 17. – №. 5. – C. 821-825.
25. Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups //Communications in Mathematical Physics. – 1976. – T. 48. – №. 2. – C. 119-130.
26. Manzano D. A short introduction to the Lindblad master equation //AIP Advances. – 2020. – T. 10. – №. 2. – C. 025106.
27. Teretenkov A. E. Dynamics of moments for quadratic GKSL generators //Mathematical Notes. – 2019. – T. 106. – №. 1. – C. 151-155.
28. Teretenkov A. E. Irreversible quantum evolution with quadratic generator //Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2019. – T. 22. – №. 04. – C. 1930001.
29. Trushechkin A. S. Decoherence and Coherence Preservation in the Solutions of the GKSL Equation in the Theory of Open Quantum Systems //Mathematical Notes. – 2019. – T. 106. – №. 5. – C. 986-993.
30. Gaidash A., Kozubov A., Miroschnichenko G. Dissipative dynamics of quantum states in the fiber channel //Physical Review A. – 2020. – T. 102. – №. 2. – C. 023711.
31. Royer A. Aspects of open quantum dynamics //Irreversible Quantum Dynamics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. – C. 47-63.
32. Gaidash A. et al. The Influence of Signal Polarization on Quantum Bit Error Rate for Subcarrier Wave Quantum Key Distribution Protocol //Entropy. – 2020. – T. 22. – №. 12. – C. 1393.
33. Scully M. O., Zubairy M. S. Quantum optics. – 1999.