



МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого»
(ТГПУ им. Л.Н. Толстого)

Кафедра общей и теоретической физики

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)**

на тему:

**ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ И ИХ
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИКИ**

Выполнила
студентка группы 120951
очной формы обучения
факультета математики, физики и
информатики
Паршкова Татьяна Геннадиевна

Тула — 2020

**Работа выполнена на факультете математики, физики и информатики
ФГБОУ ВО «ТГПУ им. Л. Н. Толстого»**

Руководитель выпускной квалификационной работы — Панин Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики

_____ В.А. Панин
(Дата) (Подпись)

Работа допущена к защите:

Заведующий кафедрой общей и теоретической физики

_____ Д.А. Нургулеев
(Дата) (Подпись)

Защита состоится « ____ » _____ 2020 года в учебном корпусе № ____ ТГПУ им. Л. Н. Толстого, в аудитории № ____ в ____ часов.

Декан факультета математики, физики и информатики

_____ И.Ю. Реброва
(Дата) (Подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ. КРАТКИЙ ОБЗОР.....	8
1.1. Принцип Гюйгенса	8
1.2. Принцип Гюйгенса-Френеля	9
1.3. Дифракция Френеля и Фраунгофера	16
1.4. Теория дифракции Кирхгофа	24
1.5. Свободное распространение сферической волны.....	32
1.6. Принцип Бабинне для дополнительных экранов	38
1.7. Значение теории дифракции Кирхгофа	39
ГЛАВА 2. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ И МЕТОДИКА ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ДИФРАГИРОВАННОГО СВЕТА.....	42
ГЛАВА 3. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РАСЧЁТА ДИФРАГИРОВАННОГО ПОЛЯ.....	59
ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЗОН ФРЕНЕЛЯ И СПИРАЛИ ФРЕНЕЛЯ В ЗАДАЧАХ ШКОЛЬНОГО КУРСА ФИЗИКИ	74
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	87
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	88

ВВЕДЕНИЕ

Под дифракцией (в широком смысле слова) понимается поведение волн в некоторой области, которая имеет границу с теми или иными свойствами. Теория дифракции, рассматривающая волновые движения, описываемые линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с линейными же краевыми условиями, занимает промежуточное положение между физикой и прикладной математикой, сдвигаясь с течением времени к последней.

Рассматривая теорию дифракции с математической точки зрения, можно отметить, что ее целью является разработка аналитических и вычислительных методов нахождения решений задач для волновых уравнений с постоянными или переменными коэффициентами в областях различной формы при разных граничных условиях, а также изучение свойств, которые отражают поведение волн в различных условиях (дифракции). Часто выбор конкретных задач теории дифракции и появление новых направлений исходят из потребностей разделов физики (акустики, оптики, радиофизики, гидродинамики и др.). Поэтому разработкой дифракционных проблем в настоящее время занимаются как физики, так и математики, значение которых в развитии теории непрерывно увеличивается.

Явление дифракции имеет большое значение в жизни человека: широкое распространение имеют высокочувствительные спектральные приборы с дифракционной решеткой (монокроматоры, спектрографы, спектрофотометры и др.), которые используют явление дифракции света; дифракция на ультразвуковых волнах в прозрачных средах делает возможным определение упругих констант вещества; важную роль играет практическое применение приборов, которые основаны на квантовых оптических явлениях - фотоэлементов и фотоэлектронных умножителей, усилителей яркости изображения (электроннооптических преобразователей),

передающих телевизионных трубок и т.д.; получение мощных потоков монохроматического лазерного излучения с разными длинами волн позволило заниматься разработкой оптических методов разделения изотопов и стимулирования направленного протекания химических реакций и др. В технике использование лазеров привело к появлению оптических методов обработки материалов. Многообразие применения явления дифракции доказывает важность его открытия и глубокого длительного изучения, которое происходило не одно столетие.

Изучение явления дифракции приходится на 17 век. Оно началось с открытий таких ученых, как Томас Юнг, Франческо Гримальди, Доменик Араго, Семион Пуассон и др. Они выдвигали различные предположения, проводили эксперименты, в которых не могли точно описать полученные результаты. Объяснение явления дифракции стало возможным в конце 17 века благодаря Христиану Гюйгенсу, который выдвинул идею о механизме распространения света. Идеи Гюйгенса смогли получить дальнейшее развитие в работах французского ученого Огюстена Жака Френеля, который дополнил принцип Гюйгенса, смог с точностью определить распределение света в дифракционных картинах, а также для объяснения дифракции света предложил модель полуволновых зон, которые позже получили название зоны Френеля. Теория дифракции и ее количественная математическая формулировка получили название принцип Гюйгенса-Френеля. Была получена расчетная формула, которая содержит в себе коэффициент наклона, не определенный Френелем. Позже Густав Кирхгоф, базировавший свою работу на принципе Гюйгенса-Френеля, определил значение коэффициента наклона, развил векторную и интегральные теоремы, что будет более подробно рассмотрено далее.

Данные методы нельзя было назвать идеальными и окончательными, т.к. они имели приближенные результаты. Но именно эти методы являются при решении краевых задач электродинамики «эвристическими» подходами.

Под данными решениями понимается совокупность аналитических формул и алгоритмов их применения. Их используют в случае, когда строгое аналитическое решение отсутствует, а численное решение применять нецелесообразно, например, ввиду сложности интерпретации результатов расчета. В отсутствие строгих математических доказательств эвристические решения строятся на основании понимания физической природы явления дифракции, а иногда – на основе интуиции.

В данной дипломной работе будут рассмотрены эвристические подходы для решения задач дифракции Гюйгенса, Френеля и Кирхгофа, проиллюстрировано использование этих подходов на конкретных случаях, подробно разобрано решение ряда задач по расчету дифрагированного поля с использованием соответствующих интегральных дифракционных формул.

Целью данной дипломной работы является изучение эвристических методов при описании дифракции света, методов постановки и решения задач дифракции в ряде конкретных случаев, а также применение данных методов в школьном курсе физики.

Основными задачами при выполнении работы являются

- 1) изучение литературы по теме дипломной работы;
- 2) анализ алгоритмов решения задач по дифракции света с помощью эвристических методов для различных конкретных случаев;
- 3) отбор наиболее типичных задач по дифракции и их подробное решение с использованием эвристических методов;
- 4) изучение и отбор теоретического материала по теме дипломной работы для школьного курса физики;
- 5) отбор задач по изучаемой теме для школьного курса физики и их подробное решение.

Дипломная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

В первой главе показан краткий обзор эвристических методов теории дифракции.

Во второй главе рассмотрена методика использования метода зон Френеля при вычислении интенсивности дифрагированного света.

В третьей главе приведена методика применения интегральных дифференциальных формул для расчёта дифрагированного поля.

ГЛАВА 1. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ. КРАТКИЙ ОБЗОР.

1.1. Принцип Гюйгенса

В 1665 году Гримальди (1618 — 1663) было опубликовано первое сообщение с точным описанием дифракционных явлений. Описанные им измерения проводились при помощи устройства, схема которого изображена на рисунке 1.1.: источником света освещается отверстие в непрозрачном экране, а в плоскости, расположенной на некотором расстоянии позади экрана, измеряется освещенность.

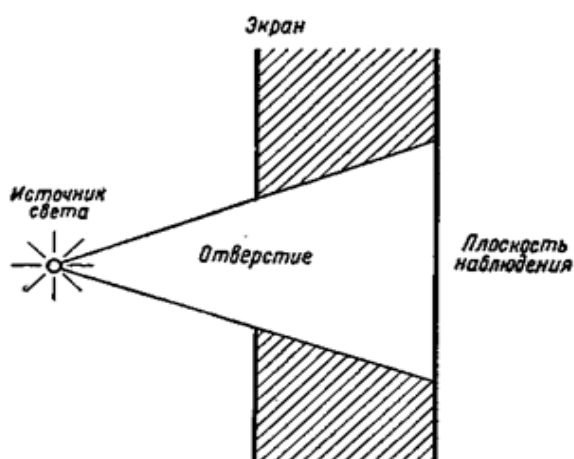


Рисунок 1.1. Схема устройства Гримальди

Согласно корпускулярной теории света, господствовавшей в то время, в отсутствие отражения и преломления лучи света должны распространяться прямолинейно, поэтому тень позади экрана должна иметь четкие границы. Но наблюдения Гримальди показали, что переход от света к тени происходит не резко, а постепенно. Удовлетворительного объяснения данным результатам наблюдений на основе корпускулярной теории света найти не удалось. Первый шаг в развитии теории, которая позволяла объяснить такие эффекты, был сделан в 1678 году основоположником волновой теории света Христианом Гюйгенсом (1629–1695). Гюйгенс выдвинул интуитивное утверждение, согласно которому каждую точку волнового фронта светового возмущения можно считать центром вторичного возмущения, вызывающего

элементарные сферические волны, а волновой фронт в поздний момент времени – огибающей этих волн (рисунок 1.2.).

Принцип Гюйгенса (в первоначальной форме) удовлетворительно объяснял законы преломления и отражения света, помогал построить последовательность волновых поверхностей по одной заданной волновой поверхности, но не позволял вычислить распределение освещенности в дифракционной картине.

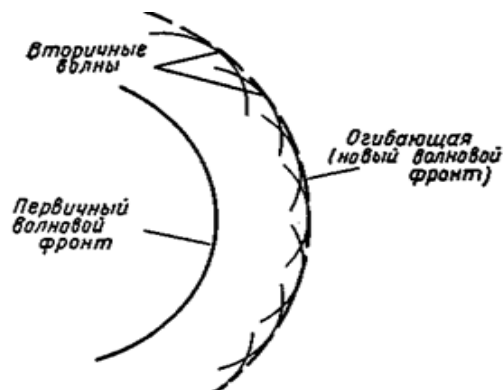


Рисунок 1.2. Волновой фронт по теории Гюйгенса

1.2. Принцип Гюйгенса-Френеля

В 1818 г. французский ученый Огюстен Жан Френель (1788-1827) преобразовал интуитивные идеи Гюйгенса, продемонстрировав, что объяснение явления дифракции можно осуществить с помощью построения Гюйгенса, дополнив его принципом интерференции Юнга. Задавая более детально свойства вторичных волн, Френель руководствовался требованием, чтобы в отсутствие препятствий интерференция вторичных волн обеспечивала воспроизведение бегущей вперед волны не только по положению волнового фронта, но и по ее амплитуде. Таким образом, сделав некоторые произвольные допущения относительно эффективных амплитуд и фаз вторичных источников Гюйгенса и предположив, что вторичные волны интерферируют друг с другом, Френель с большой точностью смог рассчитать распределение света в дифракционных картинах.

Идеи Гюйгенса и Френеля в 1882 г. были поставлены на более прочную математическую основу Густавом Кирхгофом (1824-1887), который показал, что необязательно использовать специальные предположения относительно свойств элементарных волн. Полный расчет распространения волны можно выполнить путем решения волнового уравнения. Кирхгоф

основывал свои математические построения на двух предположениях относительно граничных значений светового возмущения, падающего на поверхность препятствия, расположенного на пути света. Позднее Пуанкаре (1892 г.) и Зоммерфельд (1894 г.) доказали, что эти предположения несовместимы друг с другом.

Таким образом, предложенную Кирхгофом формулировку принципа Гюйгенса — Френеля следует рассматривать как первое приближение, хотя в большинстве случаев она дает согласие с экспериментальными данными. Теория Кирхгофа была видоизменена Зоммерфельдом, который исключил одно из граничных условий путем использования теории функций Грина (теория дифракции Релея—Зоммерфельда). В теориях Кирхгофа и Релея — Зоммерфельда используются существенные упрощения и приближения. Одно из них заключается в том, что эти теории являются скалярными, т. е. происходит рассмотрение только скалярной амплитуды одной поперечной компоненты электрического или магнитного поля. Предполагается, что другие компоненты можно рассматривать независимо таким же образом. При данном подходе не рассматривается тот факт, что различные компоненты векторов электрического и магнитного полей являются связанными уравнениями Максвелла, и поэтому их нельзя рассматривать независимо.

Однако эксперименты в микроволновой области спектра показали, что скалярная теория дает точные результаты, если выполняются два условия:

- 1) отверстия в экранах велики по сравнению с длиной волны;
- 2) дифрагированные волны наблюдаются не слишком близко от экранов.

Данные условия хорошо удовлетворяются в большинстве практически важных случаев. Однако в ряде задач данные условия не удовлетворяются, и для получения достаточно точных результатов приходится учитывать векторную природу полей. Для решения этих задач

используются соответствующие векторные обобщения теории дифракции Кирхгофа.

Возникающие при изучении дифракционных явлений проблемы можно отнести к наиболее трудным в оптике, поскольку их достаточно редко удается привести к строгому решению. Первое по-настоящему строгое решение было получено в 1896 году А. Зоммерфельдом. Он рассмотрел вопрос о дифракции плоской волны на идеально проводящем полубесконечном плоском экране. С тех пор было получено строгое решение только нескольких дифракционных задач, которые в основном относятся к двумерным структурам. Из-за возникающих математических трудностей в большинстве случаев приходится использовать приближенные методы, поэтому теория Гюйгенса и Френеля может служить мощным орудием, которое дает возможность решить большинство вопросов, встречающихся в инструментальной оптике.

Рассмотрим свободное распространение сферической волны от точечного источника P_0 в однородной среде. Пусть S – мгновенное положение сферического монохроматического волнового фронта с радиусом r_0 (Рис. 1.3.а). Уравнение сферической волны имеет вид:

$$U(r_0, t) = A \frac{e^{(ikr_0 - \omega t)}}{r_0} \quad (1)$$

где под A понимается амплитуда на расстоянии единицы длины от источника. Чтобы найти световое возмущение, возникающее в точке P , необходимо применить принцип Гюйгенса-Френеля. Согласно данному принципу каждый элемент волнового фронта будет восприниматься как центр вторичных возмущений, распространяющихся в виде элементарных сферических волн.

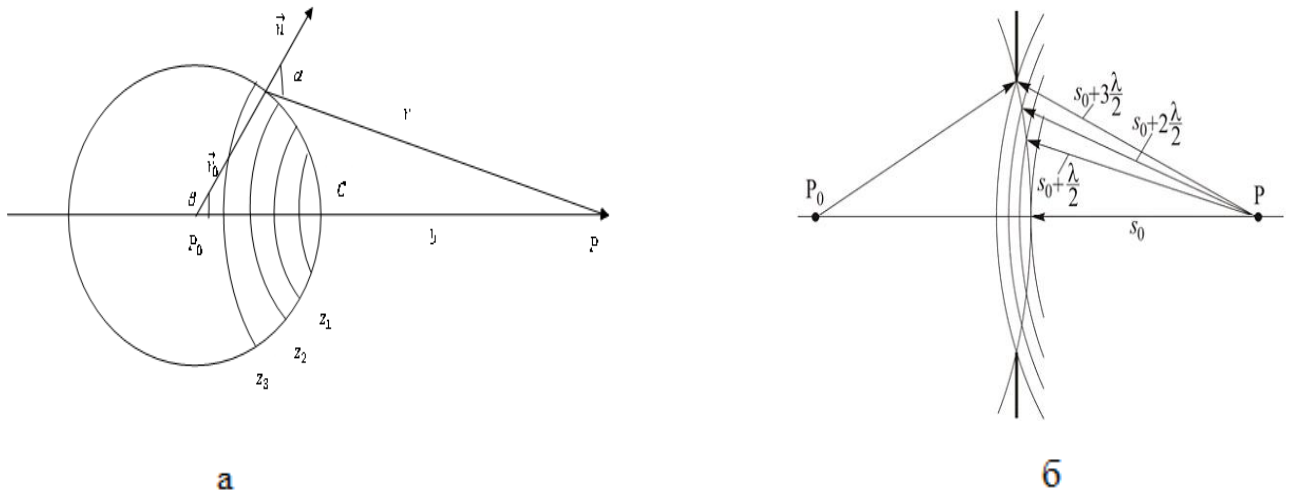


Рисунок 1.3. Световое возмущение в точке P

Возмущение в точке Q волнового фронта можно представить в виде (1), поэтому вклад в возмущение $dU(P)$, вносимый элементом dS , находящийся в точке Q, запишется следующим образом (периодический по времени множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем для сокращения записи будем опускать):

$$dU(P) = K(\alpha) \frac{A e^{i k r_0 - i \omega t}}{r_0} \frac{e^{i k r}}{r} dS \quad (2)$$

где $r = QP$; $K(\alpha)$ – коэффициент наклона, описывающий изменение амплитуды вторичных волн в зависимости от направления, α – угол (угол дифракции) между нормалью в точке Q и направлением QP. Сделаем предположение, что $K(\alpha)$ является максимальным в первоначальном направлении распространения света (при $\alpha = 0$), при увеличении α быстро уменьшается и равно нулю, когда прямая QP становится касательной к волновому фронту, т.е. при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Пусть в точке P определяется влияние той части S' первоначальной волны, которая не загороживается каким-либо препятствием, находящимся между P_0 и P. Таким образом, возмущение в точке P равно:

$$U(P) = A \frac{e^{i k r_0}}{r_0} \int_{S'} \frac{e^{i k r}}{r} K(\alpha) dS \quad (3)$$

Для вычисления этого интервала используем так называемые законы Френеля (Рис. 1.3.б). (Сейчас мы воспользуемся данным методом для получения коэффициента, подробнее этот метод будет рассмотрен далее.) Вокруг точки P построим сферы с радиусами

$$s_0; s_0 + \frac{\lambda}{2}; s_0 + 2\frac{\lambda}{2}; s_0 + 3\frac{\lambda}{2}; \dots; s_0 + n\frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

где $s_0 = CP$, а С – точка пересечения прямой P_0P с волновым фронтом S. Если за элемент площади dS принять площадь кольца, которое вырезается из волнового фронта двумя бесконечно близкими концентрическими сферами в точке наблюдения P, то $dS = 2\pi r_0 \sin\theta d\theta = 2\pi r_0^2 \sin\theta d\theta$.

Примем за переменную интегрирования расстояние r . Продифференцируем соотношение, получаемое по теореме косинусов, $r^2 = r_0^2 + (r_0 + s_0)^2 - 2r_0(r_0 + s_0)\cos\theta$. Переменные r и θ :
 $2rdr = 2r_0(r_0 + s_0)\sin\theta d\theta$.

Отсюда находим

$$dS = 2\pi r_0^2 \sin\theta d\theta = 2\pi r_0^2 \frac{rdr}{r_0(r_0 + s_0)} \quad (5)$$

(подставим $\sin\theta d\theta = \frac{rdr}{r_0(r_0 + s_0)}$), подставим (5) в (3).

Считаем, что r_0 и s_0 велики по сравнению с длиной волны; тогда можно сделать предположение, что в любой зоне величина K постоянна и n равна K_n . Тогда вклад зоны n в $U(P)$ равен:

$$U_m(P) = \frac{Ae^{ik_0 r_0}}{r_0} \frac{2\pi r_0^2 K_n}{r_0(r_0 + s_0)} \int_{s_0 + (n-1)\frac{\lambda}{2}}^{s_0 + n\frac{\lambda}{2}} \frac{e^{ikr}}{r} r dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{AK_n e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} \frac{2\pi}{ik} e^{ikr} \left| \begin{array}{l} s_0 + n \frac{\lambda}{2} \\ s_0 + (n-1) \frac{\lambda}{2} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \text{учитываем, что} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow k\lambda = 2\pi \end{array} \right\} = \\
&= \frac{AK_n e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} \frac{2\pi}{ik} \left(e^{iks_0 + in\pi} - e^{iks_0 + i(n-1)\pi} \right) = \\
&= \frac{AK_n e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} \frac{2\pi}{ik} e^{iks_0} e^{in\pi} \left(1 - e^{-i\pi} \right) = \frac{AK_n e^{ik(r_0 + s_0)}}{r_0 + s_0} \frac{2\pi}{ik} (-1)^n 2
\end{aligned}$$

Итак:

$$U_n(P) = \frac{4\pi K_n A}{ik(r_0 + s_0)} (-1)^n e^{ik(r_0 + s_0)}$$

или

$$U_n(P) = \frac{4\pi A i}{ik(r_0 + s_0)} (-1)^{n+1} K_n e^{ik(r_0 + s_0)} \quad (6)$$

Видно, что вклады зон, которые следуют друг за другом, имеют разные знаки. Результирующий эффект в точке P образуется суммированием вкладов от всех зон

$$U(P) = 4\pi i \frac{A e^{ik(r_0 + s_0)}}{k(r_0 + s_0)} \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} K_n \quad (7)$$

Ряд в (7) можно вычислить по предположению Френеля, абсолютные значения множителей K_n , и члены суммы в (7) медленно убывают с возрастанием номера n.

$$\Sigma = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} K_n = K_1 - K_2 + K_3 - \dots + (-1)^{N+1} K_N \quad (8)$$

Уберем в сумме (8) слагаемое K_1 и добавим слагаемое K_{N+1} . Так как члены суммы (8) медленно убывают, можно сказать, что абсолютное значение (8) почти не изменится, а знак суммы изменится на противоположный. Учитывая это вместе с (8), можно записать:

$$\Sigma \sim -(-K_2 + K_3 - \dots + (-1)^{N+1} K_N + (-1)^N K_{N+1}) \quad (8a)$$

Складывая (8) и (8a), получим:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \frac{K_1}{2} + \frac{K_{N+1}}{2}, N - \text{нечётно} \\ \Sigma &= \frac{K_1}{2} - \frac{K_{N+1}}{2}, N - \text{чётно} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Таким образом, созданное N первыми зонами Френеля волновое возмущение равно половине суммы возмущений, вносимых крайними зонами в этом приближении. Данный результат можно получить следующим образом: перепишем ряд (8)

$$\Sigma = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} K_n = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right) + \dots + \frac{(-1)^{N+1} K_N}{2}$$

Функции K_n изменяются очень медленно, Френель допустил, что все члены в скобках равны нулю. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \frac{K_1}{2} + \frac{K_N}{2}, N - \text{нечётно} \\ \Sigma &= \frac{K_1}{2} - \frac{K_N}{2}, N - \text{чётно} \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

Предположим, что для последней зоны, видимой из точки P при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $K_N = 0$, следовательно, $\Sigma = \frac{1}{2} K_1$, подставляя в (7), получим

$$U(P) = 2\pi i \frac{A e^{ik(r_0+s_0)}}{k(r_0+s_0)} K_1 \quad (10)$$

Данная формула позволяет определить множитель K_1 . Действительно, при свободном распространении сферической волны (1) световое возмущение заранее известно в любой точке пространства. В частности в точке наблюдения (заменяем $r_0 \rightarrow r_0 + s_0$)

$$U(P) = A \frac{e^{ik(r_0+s_0)}}{r_0+s_0} \quad (11)$$

Сравнивая (11) и (10), находим: $\frac{2\pi i}{K} K_1 = 1$

$$K_1 = \frac{-ik}{2\pi} = -\frac{i}{\lambda} = \frac{K}{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\lambda} \quad (12)$$

Можно найти объяснение множителю $e^{-i\frac{\pi}{2}}$, сделав предположение, что вторичные волны отстают по фазе на четвертую периода от первичной волны. Также можно объяснить наличие множителя $\frac{1}{\lambda}$ при допущении, что амплитуда вторичных и первичных волн относятся как 4λ . С учетом допущений относительно амплитуды и фазы вторичных волн принцип Гюйгенса-Френеля правильно описывает распространение сферических волн в свободном пространстве. Но данные дополнительные предположения могут рассматриваться лишь как удобный способ интерпретации математических выражений (т.е. они не имеют какого-либо физического смысла). Истолкование множителя (12) становится очевидным только в теории дифракции Кирхгофа.

1.3. Дифракция Френеля и Фраунгофера

Явление дифракции принято классифицировать в зависимости от расстояний источника и точки наблюдения (экрана) от препятствия, поставленного на пути распространения света. Здесь имеют место быть два случая, дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. Рассмотрим их более подробно.

Пусть от источника света P_0 свет падает на бесконечный непрозрачный экран с отверстием S (Рис. 1.4). При приближенном решении задачи о дифракции электромагнитной волны на этом отверстии, когда отклонения от

геометрической оптики являются малыми, можно считать, что в точках отверстия поле будет являться таким же, как при отсутствии экрана. (Такое приближение справедливо, если по сравнению с длиной волны все размеры велики, это относится и к размерам экранов или отверстий, и к расстояниям от них до точек испускания и наблюдения света).

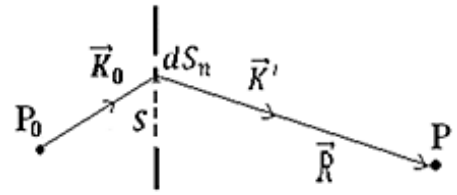


Рис. 1.4. К выводу формулы, описывающей дифракцию света на отверстии произвольной формы

Разобьем поверхность отверстия S на участки с площадью dS , которые являются малыми по сравнению с размерами отверстия, но считаются большими по сравнению с длиной волны. Таким образом, каждый из данных участков, до которых дошла световая волна, согласно принципу Гюйгенса, можно рассматривать так, будто этот участок сам становится источником световой волны, распространяющейся во все стороны от него. Поле в точке P можно рассматривать как результат наложения полей, которые исходят из всех участков dS .

Рассмотрим некоторый элемент поверхности dS . Обозначим поле на участке dS через U . (В общем случае изменяется от точки к точке поверхности S). Тогда поле, которое создается в точке P за экраном участком dS , будет пропорционально $U dS_n$, где dS_n – проекция элемента dS на направление пришедшего из точки P_0 в dS луча (проекция вектора $\frac{\vec{k}_0}{k_0}$ на нормаль к поверхности).

Учитывая уравнение для сферической волны, распространяющейся из dS , поле, создаваемое этим участком волны в точке P , можно записать в виде

$$aU \frac{e^{ikR}}{R} dS_n \quad (1)$$

где R – расстояние от dS до P , k – абсолютная величина волнового вектора света; a – неизвестная постоянная, которая учитывает изменение фазы волны при ее распространении от dS к точке P . Полное поле в точке P рассматривается как результат наложения полей, создаваемых всеми dS .

$$U(P) = a \int_S \frac{U e^{ikR}}{R} dS_n, \quad (2)$$

где интегрирование проводится по всей поверхности отверстия.

Чтобы определить постоянную a , необходимо рассмотреть плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x ; волновые поверхности которой параллельны плоскости yz (Рис. 1.5). Пусть U есть значение поля в плоскости $x = 0$.

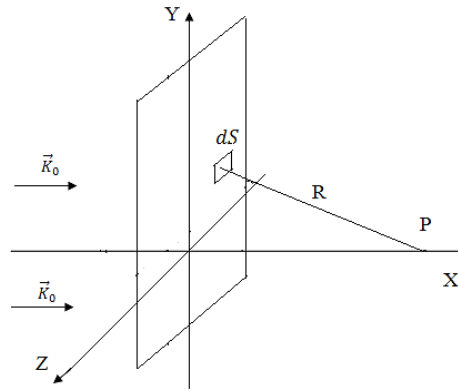


Рис. 1.5. Использование плоской волны для вычисления постоянной a в формуле (2)

Тогда, учитывая уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x в точке P , которую мы выберем на оси x , поле будет равно

$$U(P) = U e^{ikx} \quad (3)$$

Также поле в точке P можно определить, исходя из формулы (2), выбрав в качестве поверхности интегрирования плоскость $x = 0$ (волновой фронт, пришедший в эту плоскость). При этом в силу малости угла дифракции существенны будут только точки плоскости yz , близкие к началу координат, т.е. точки, в которых

$$|y|; |z| \ll x \quad (4)$$

где x – координаты точки P . Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2}} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x} \quad (5)$$

Подставим (5) в (2), положив при этом в множителе $\frac{1}{R}$ в знаменателе

$R \approx x$ и, учитывая, что U – постоянная (в плоскости $x = 0$), получаем:

$$U(P) = aU \frac{e^{ikx}}{x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \frac{y^2}{2x}} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \frac{z^2}{2x}} dz \quad (6)$$

Рассмотрим интеграл по y в (6), в котором сделаем замену переменной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \frac{y^2}{2x}} dy = \left\{ \begin{array}{l} y = \xi \sqrt{\frac{2x}{k}} \\ dy = \sqrt{\frac{2x}{k}} d\xi \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{2x}{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi \quad (7)$$

В соответствии с формулой Эйлера представим этот интеграл в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \xi^2 d\xi = 2 \int_0^{\infty} \cos \xi^2 d\xi + 2i \int_0^{\infty} \sin \xi^2 d\xi \quad (8)$$

Полученные интегралы

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos \xi^2 d\xi; I_2 = \int_0^{\infty} \sin \xi^2 d\xi \quad (9)$$

называются интегралами Френеля. Данные интегралы имеют большое значение при решении многих дифракционных задач и хорошо изучены. Как показывается в математическом анализе (например, Фихтенгольц, т. 2 стр. 741), их значения равны

$$\int_0^{\infty} \cos \xi^2 d\xi = \int_0^{\infty} \sin \xi^2 d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (10)$$

Подставим (10) в (8); затем в (7), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i); \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2x}{k}}(1+i) \quad (11)$$

Учитывая, что интеграл по Z в (6) отличается от интеграла по y только заменой переменной интегрирования $y \rightarrow z$, и поэтому он также равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2x}{k}}(1+i) \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (6), получаем

$$U(P) = aU \frac{e^{ikx}}{x} \frac{\pi}{2} \frac{2x}{k} (1+i)^2 = aU \frac{\pi}{k} e^{ikx} (1+2i-1) = aU e^{ikx} \frac{2\pi i}{k} \quad (13)$$

При сравнении данного выражения с (3) имеем, что постоянная a определяется выражением: $a = \frac{k}{2\pi i}$.

Подставляя данное выражение в (2) находим окончательное решение поставленной задачи

$$U(P) = \frac{k}{2\pi i} \int_S \frac{U}{R} e^{ikR} dS_n \quad (14)$$

Замечание.

Проводя в интегралах Френеля (9) замену переменной $\xi^2 = t$, эти интегралы можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} \cos \xi^2 d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt; \int_0^{\infty} \sin \xi^2 d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \quad (15)$$

Так как функция $\frac{1}{\sqrt{t}}$ достаточно медленно убывает, то наиболее существенный вклад в интеграл вносят первые близкие к нулю полупериоды, последующие полупериоды будут по модулю почти одинаковы, и,

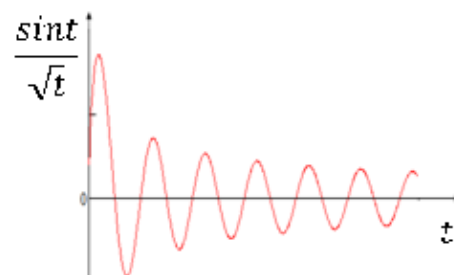


Рис. 1.6. Значение интеграла в (15) определяется первыми полупериодами подынтегральной функции

чередуюсь по знаку, будут компенсировать друг друга, так что значение интеграла, практически перестанет меняться (Рис. 1.6). Этим оправдывается разложение корня (5), которое обусловлено малостью углов дифракции, в результате чего при интегрировании в (2) будут учитываться только точки, близкие нулю.

Интегралы Френеля. Спираль Корню.

Если плоская волна падает на прямоугольное отверстие, имеющее конечные размеры, то интегрирование в (6) нужно будет проводить уже в конечных пределах (от одного края отверстия до другого), и поэтому интегралы Френеля (9) будут иметь верхний конечный предел, который обозначим через v , а сами интегралы, которые будут функциями данного предела, представим в виде

$$C(v) = \int_0^v \cos \frac{\pi}{2} u^2 du; \quad S(v) = \int_0^v \sin \frac{\pi}{2} u^2 du \quad (16)$$

Здесь, в сравнении с (9) произведена замена переменной интегрирования $\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} u$ и, что позволило предельные значения данных интегралов записать в более простом виде:

$$C(\infty) = \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} u^2 du = \frac{1}{2}; \quad S(\infty) = \int_0^{\infty} \sin \frac{\pi}{2} u^2 du = \frac{1}{2} \quad (17)$$

Поведение интегралов Френеля можно рассмотреть с помощью изящного геометрического построения Корню. Рассмотрим плоскость с декартовыми координатами C и S . Для каждого значения переменной v в (16) на данной плоскости мы будем иметь точку с координатами $(C(v), S(v))$. Переменная v принимает всевозможные значения $(-\infty; \infty)$, поэтому данная точка описывает некоторую кривую. Рассмотрим свойства данной кривой. Так как $C(0) = S(0)$, кривая проходит через начало координат, и поскольку

$$C(-v) = -C(v); \quad S(-v) = -S(v) \quad (18)$$

она симметрична относительно начала координат.

Вычислим элемент длины дуги нашей кривой:

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (dC)^2 + (dS)^2 = \left(\left(\frac{dC}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dS}{dv} \right)^2 \right) (dv)^2 = \\ &= \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) \right) (dv)^2 = (dv)^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$(dl)^2 = (dv)^2 \quad (19)$$

следовательно, при измерении l в направлении возрастания v параметр v представляет длину дуги кривой, измеряющейся от начала координат.

Пусть θ – угол между касательной к кривой и осью C . Тогда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dS}{dC} = \frac{\frac{dS}{dv}}{\frac{dC}{dv}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right)} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} v^2 \right) \quad (20)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} v^2 \quad (21)$$

Таким образом, θ монотонно возрастает с увеличением $|v|$. Поскольку $\theta = 0$ при $v = 0$, то в начале координат касательная к кривой будет совпадать с осью C . Когда $v^2 = 1$, то $\theta = \frac{\pi}{2}$, и касательная перпендикулярна к оси C .

Если $v^2 = 2$, то $\theta = -\pi$, в этом случае касательная к кривой снова будет параллельна оси C , но ориентирована в отрицательном направлении.

Согласно соотношениям (17) и (18), $C(\infty) = -C(-\infty) = \frac{1}{2}$; $S(\infty) = -S(-\infty) = \frac{1}{2}$,

и обе ветви кривой при $|v| \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются к точкам с

координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$ и $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$, которые называются фокусами (полюсами).

Такая кривая называется спиралью Корню (Рис. 1.7). Числа, отмеченные вдоль кривой, будут определять значение параметра ν . Спираль Корню является полезной при рассмотрении общих свойств дифракционных картин Френеля. (Например, она дает возможность найти амплитуду светового колебания в любой точке экрана при дифракции света от прямоугольного края полуплоскости).

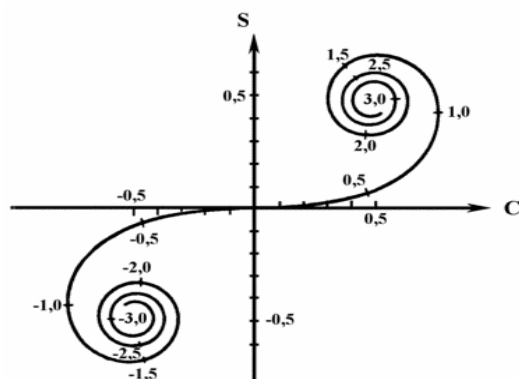


Рис. 1.7. Спираль Корню

Подробнее решение задачи с использованием спирали Корню будет рассмотрено далее.

Получим из формулы (14) формулу для расчета поля в случае дифракции Фраунгофера

$$U(P) = \frac{k}{2\pi i} \int \frac{U}{R} e^{ikR} dS_n \quad (22)$$

Если выбрать начало координат в отверстии, то считая, что на отверстие падает плоская волна, ее уравнение можно записать в виде

$$U = U_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (23)$$

где U_0 – амплитуда поля на отверстии.

Тогда $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{r}$; $R^2 = R_0^2 + r^2 - 2\vec{R}_0\vec{r}$;

$$R = R_0 \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{R}_0\vec{r}}{R_0^2}} \approx R_0 - \vec{k}' \quad (24)$$

где $\vec{k}' = \frac{\vec{R}_0}{R_0}$ – волновой вектор дифрагированного света.

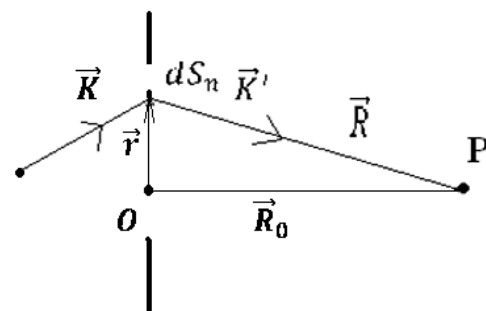


Рис. 1.8. Дифракция Фраунгофера плоской волны на отверстии произвольной формы

Полагая в знаменателе в (1) $R \approx R_0$, и подставив (23) в (24), получаем

$$U(P) = \frac{kU_0}{2\pi i} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{R}} dS_n \quad (25)$$

Использование данной формулы будет подробно рассмотрено при решении задач.

1.4. Теория дифракции Кирхгофа

Основная идея теории Гюйгенса-Френеля заключается в том, что световое возмущение в точке P образуется в результате суперпозиции вторичных волн, которые испускаются поверхностью, находящейся между точкой наблюдения и источником света. До Кирхгофа этот принцип являлся только гипотезой. Кирхгоф (1883 г.) продемонстрировал, что принцип Гюйгенса-Френеля рассматривается как приближенная форма определенной интегральной теоремы. В данной теореме решение однородного волнового уравнения в произвольной точке поля можно определить благодаря значениям искомой величины и ее первой производной во всех точках произвольной замкнутой поверхности, окружающей точку P .

Сделаем предположение, согласно которому среда, в которой распространяется свет, будет являться однородной. Пусть световое поле характеризуется величиной $V(\vec{r}, t)$. (Под данной величиной можно понимать какую-либо проекцию векторов \vec{E} или \vec{B} на оси декартовой системы координат). Эта величина будет удовлетворять волновому уравнению (положим $n = 1$)

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

При рассмотрении случая строго монохроматического поля

$$V(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

В вакууме часть, которая зависит от координат, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)U = 0 \quad (3)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$.

Пусть под ν понимается объём, ограниченный произвольной замкнутой поверхностью S , P – точка, находящаяся внутри него (Рис. 1.9). Пусть U имеет непрерывные частные производные 1^{го} и 2^{го} порядков внутри объекта и на поверхности S .

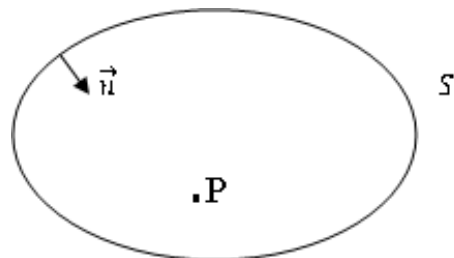


Рисунок 1.9. Точка P внутри ограниченной замкнутой поверхности

Если U' является любой другой функцией, удовлетворяющей тем же требованиям, что и U , то по теореме Грина (вторая формула Грина) получится

$$\int_{\nu} (u\Delta u' - u'\Delta u) d\nu = -\oint_S \left(u \frac{\partial u'}{\partial n} - u' \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (4)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ имеет значение дифференцирования вдоль внутренней нормали и поверхности S . (Теорема Грина формулируется для внешней нормали, но в этом случае ее удобно использовать для внутренней нормали).

Если U' удовлетворяет волновому уравнению (уравнению Гельмгольца), т.е.

$$(\Delta + k^2)U' = 0 \quad (5)$$

то из (3) и (5) будет следовать, что подынтегральное выражение в левой части (4)

$$u\Delta u' - u'\Delta u = -k^2(uu' - u'u) = 0 \quad (6)$$

в каждой точке объёма ν обращается в ноль, таким образом, из (4) получаем

$$\oint_S \left(u \frac{\partial u'}{\partial n} - u' \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (7)$$

Рассмотрим функцию

$$u'(r) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad (8)$$

где под r понимается расстояние от точки P до произвольной точки с координатами (x, y, z) .

Данная функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца (5), и, при подстановке в (2), описывает сферическую волну, которая расходится от источника в точке P (при $r=0$). Функция имеет особенность при $r=0$, но чтобы применить теорему Грина, необходимо, чтобы u' была непрерывной и дифференцируемой внутри объема V .

Точку P требуется исключить из области интегрирования (из объема V). Для этого окружим P небольшой сферой радиуса ε и произведем интегрирование по объему, заключенному между S и поверхностью сферы S' (Рис. 1.10.). В (7) будут рассматриваться уже две поверхности S и S' .

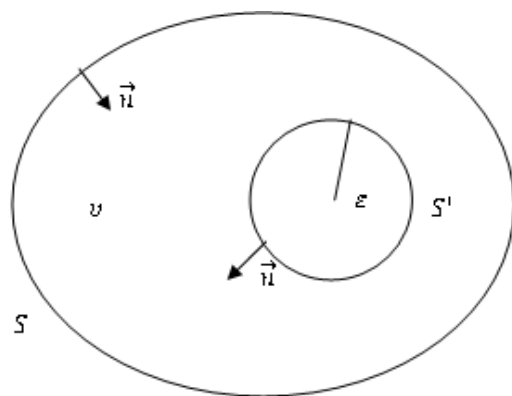


Рисунок 1.10. Исключение точки P из объема V

Из (7) имеем:

$$\left(\oint_S + \oint_{S'} \right) \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (9)$$

Рассмотрим отдельно интеграл по сфере S' :

$$\oint_{S'} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS' = \left\{ \begin{array}{l} dS' = \varepsilon^2 d\Omega \\ r = \varepsilon \\ d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi \end{array} \right\} = \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \varepsilon^2 d\Omega$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u, \vec{n}); \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \vec{e}_r, \vec{e}_r \right) = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r}$$

в сферической системе координат, получим:

$$\oint_{S'} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS' = \int_{\Omega} \left(u \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(ik - \frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \varepsilon^2 d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} u e^{ik\varepsilon} \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} u e^{ik\varepsilon} - \int_{\Omega} e^{ik\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r} \varepsilon d\Omega$$

т.к. u и $\frac{\partial u}{\partial r}$ в окрестностях точки P конечны, то можно перейти в выражении

к $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом 1^{ый} и 3^{ий} интегралы обращаются в ноль, получаем

$$\oint_{S'} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS' = -4\pi U(P) \quad (10)$$

подставив (10) в (9), будем иметь:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11)$$

Это интегральная теорема Кирхгофа (интегральная теорема Гельмгольца и Кирхгофа).

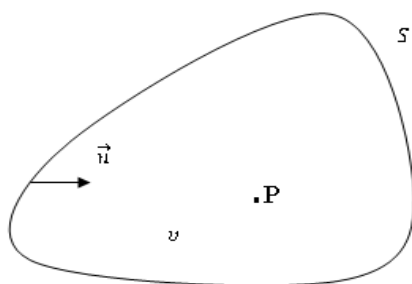


Рисунок 1.11. Точка P внутри поверхности S

В (11) световое поле в точке P выражается интегралом по замкнутой поверхности S . Точка P лежит внутри S , а источники света – вне её (Рис. 1.11). В данной ситуации видно отличие от ситуации, рассматриваемой в принципе Гюйгенса-

Френеля, когда источники света находятся внутри замкнутой поверхности S , а точка P – вне этой поверхности. Чтобы данное различие смогло исчезнуть, следует преобразовать формулу (11), сделав предположение, что все источники света $S_1; S_n; \dots$ лежат в конечной области пространства, окружив

область замкнутой поверхностью S . Пусть точка P находится в пространстве вне поверхности S (Рис. 1.12).

Опишем из точки P как из центра сферу S' такого большого радиуса, чтобы она окружила поверхность S . Тогда в пространстве между S и S' не будет находиться источников света, таким образом, для вычисления $U(P)$ можно применить (11)

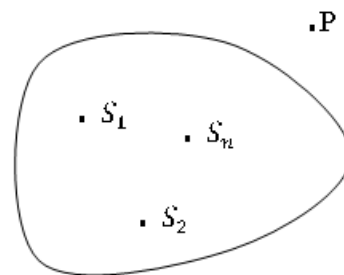


Рисунок 1.12. Источники света $S_1 \dots S_n$

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left(\oint_S + \oint_{S'} \right) \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (12)$$

Рассмотрим интеграл по сфере S' с условием, что её радиус $R \rightarrow \infty$. Для этого требуется выяснить поведение функции U на бесконечности. Сделаем предположение, что в пространстве, ограниченном S , находится один или несколько точечных источников света S_1, \dots, S_n, \dots (Рис. 1.13.).

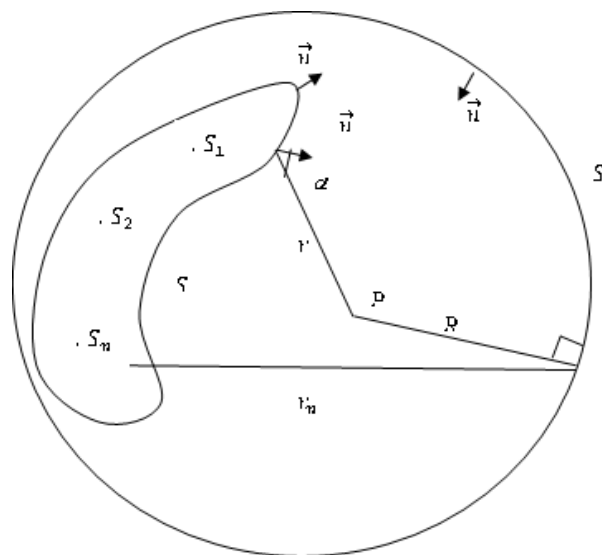


Рисунок 1.13. Источники света $S_1 \dots S_n$ в ограниченном пространстве S

Тогда поле этих источников в произвольной точке сферы S' представится в виде

$$U = \sum_n c_n \frac{e^{ikr_n}}{r_n} \quad (13)$$

где c_n – не зависящие от r коэффициенты. Если радиус сферы $R \rightarrow \infty$, то $r_n \rightarrow \infty$, однако разность $r_n - R = a_n$ (см. рис. 1.13) будет оставаться конечной. Представим (13) в виде

$$U = \sum_n c_n \frac{e^{ik()}}{R + a_n} = \frac{e^{vkr}}{R} \sum_n \frac{A_n}{1 + \frac{a_n}{R}} \quad (14)$$

где A_n – новые постоянные. При разложении выражения, находящегося под знаком суммы, в ряд по степеням $\frac{1}{r}$, получим

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ \sum_n A_n - \frac{1}{R} \sum_n A_n a_n + \frac{1}{R^2} \sum_n A_n a_n^2 - \dots \right\} \quad (15)$$

$$\left(\text{т.к.} \left(\frac{1}{1+\alpha x} \right)' = -\frac{\alpha}{(1+\alpha x)^2} \right); \left(\left(\frac{1}{1+\alpha x} \right)'' = -\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha x)^2} \right)' = \frac{2\alpha^2}{(1+2x)^3} \right)$$

Запишем (15) в более компактном виде

$$U = \frac{e^{ikR}}{R} (c + \Phi) \quad (16)$$

где c – постоянная, которая не зависит от r , $\Phi \rightarrow 0$, при $R \rightarrow \infty$, по крайней мере, как $\frac{1}{R}$. Подставляя (16) в интеграл по сфере S' в (12), получим ($dS' = R^2 d\Omega$; R – радиус сферы S').

$$\oint_{S'} \left(U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS' = \oint_{\Omega} \left(\frac{e^{ikR}}{R} (c + \Phi(R)) \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \left(ik - \frac{1}{R} \right) (c + \Phi) \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) R^2 d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right)^2 \left[(c + \Phi(R)) \left(ik - \frac{1}{R} \right) - \left(ik - \frac{1}{R} \right) (c + \Phi) + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right] r^2 d\Omega = \int_{\Omega} e^{ikr} \left[c \left(ik - \frac{1}{r} \right) + \Phi(R) \left(ik - \frac{1}{r} \right) - c \left(ik - \frac{1}{r} \right) \right] = \int_{\Omega} e^{ikr} \frac{\partial \Phi}{\partial R} d\Omega \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$

Так как из (16) и (15) видно, что производная $\frac{\partial \Phi}{\partial R}$ будет стремиться к нулю, при $r \rightarrow \infty$ по крайней мере как $\frac{1}{R^2}$. При удалении сферы S' в бесконечность

$$\oint_{S'} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS' \quad R \rightarrow 0 \quad (17)$$

следовательно, из (12) имеем

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{du}{dn} \right) dS \quad (18)$$

получим формулу, совпадающую с (11), но уже соответствующую принципу Гюйгенса-Френеля. Из проведенного рассмотрения следует, что при удалении в бесконечность некоторого участка поверхности S в (18) часть интеграла в (18) по данному участку стремится к нулю. Предполагается, что все источники света находятся в конечной области пространства.

Формулы (11) и (18) представляют принцип Гюйгенса-Френеля в формулировке Кирхгофа. В данных формулах под \vec{n} понимается внутренняя нормаль по отношению к тому пространству, в котором находится точка наблюдения P . Выполним дифференцирование по \vec{n} в (18) функции $\frac{e^{ikr}}{r}$; учитывая, что

$$\frac{\partial f(r)}{\partial n} = (\text{grad} f, \vec{n}) = \frac{\partial f}{\partial r} (\vec{e}_r, \vec{n}) \quad (19)$$

где \vec{e}_r - единичный вектор, направленный в точке поверхности S от P (вдоль \vec{r}) (рисунок 1.14.), т.к.

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial r} (\vec{e}_r, \vec{n}) = -\cos\alpha < 0$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} = - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \cos\alpha \quad (20)$$

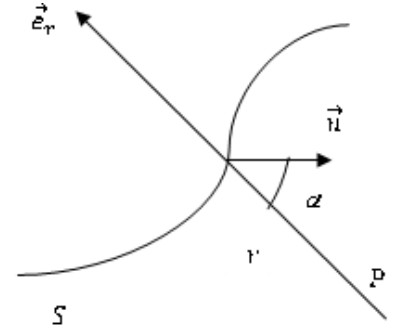


Рисунок 1.14. Направление единичного вектора \vec{e}_r от P

Подставим (20) в (18)

$$U(P) = - \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\left(ik - \frac{1}{r} \right) U \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial n} \right) \frac{e^{ikr}}{r} dS \quad (21)$$

Если ввести обозначение $K(\alpha, r) = - \frac{1}{4\pi} \left[\left(ik - \frac{1}{r} \right) U \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial n} \right]$,

то (21) запишется в виде

$$U(P) = \oint_S K(\alpha, r) \frac{e^{ikr}}{r} dS \quad (23)$$

Формулы (23) и (22) связывают теорию Кирхгофа и принцип Гюйгенса: подынтегральное выражение в (23) может рассматриваться как вторичная волна, которая распространяется от площади dS к точке P . Коэффициент K зависит не только от угла α (по предположению Френеля), но также от расстояния r , потому что иначе вторичная волна не могла бы удовлетворять волновому уравнению. (Явная зависимость от r в $K(\alpha, r)$ пришла от $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)$); если бы отсутствовало $\frac{1}{r}$, то производная вычислялась бы от e^{ikr} , а эта функция не удовлетворяет уравнению Гельмгольца (3) в сферической системе координат, и, поэтому было бы несправедливо (7).

Таким образом, вторичные волны не обладают шаровой симметрией. Они являются сферическими только в том смысле, что их волновые фронты принимают форму сферы. Амплитуды зависят от направления распространения и изменяются с расстоянием, иначе, чем $\frac{1}{r}$. Только в волновой зоне, когда расстояние очень велико по сравнению с длиной волны:

$$k \gg \frac{1}{r} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{r} \rightarrow \lambda \ll r \quad (24)$$

формула (21) может быть записана в виде:

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left(ikU \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \frac{e^{ikr}}{r} dS \quad (25)$$

Благодаря мощности длин световых волн в оптике можно применять упрощенную формулу принципа Гюйгенса при решении всех конкретных задач.

1.5. Свободное распространение сферической волны

Интегральная теорема Кирхгофа формулируется благодаря основной идее принципа Гюйгенса-Френеля. Но законы, управляющие вкладами от различных элементов поверхности, являются более сложными, чем предполагал Френель. Кирхгоф продемонстрировал, что во многих случаях данную теорему можно свести к приближенной, более простой форме, которая является эквивалентной формулировке Френеля, и определить точный вид коэффициента наклона K' , остающегося неопределенным в теории Френеля. (Рис. 1.15)

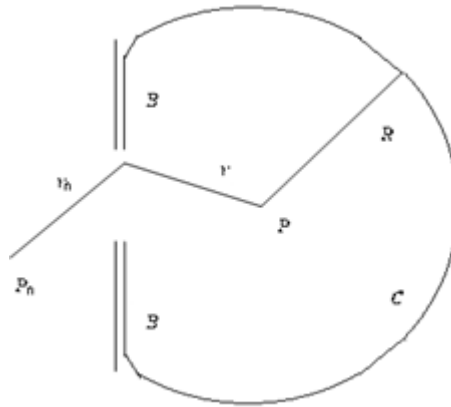


Рисунок 1.15. Монохроматическая волна от источника P_0

Рассмотрим монохроматическую волну, которая испускается точечным источником P_0 и проходит сквозь отверстие в плоском непрозрачном экране. Пусть P – точка, в которой определяется световое возмущение. Допустим, что линейные размеры отверстия будут велики по сравнению с длиной волны света, но малы по сравнению с r_0 и r .

Для того чтобы найти возмущение в точке P , необходимо рассмотреть интеграл Кирхгофа по поверхности S , которая образована: отверстием A ; участком B неосвещенной стороны экрана и частью C большой сферы с центром в точке P и радиусом R , которая вместе с A и B формирует замкнутую поверхность. В соответствии с (25) имеем:

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_A + \int_B + \int_C \right] \left\{ ikucos\alpha + \frac{\partial u}{\partial n} \right\} \frac{e^{ikr}}{r} dS \quad (26)$$

где r – расстояние между элементом dS и P , а $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по внутренней нормали к S .

Однако, в (26) значение u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на A, B и C , которые необходимо подставить в (26), точно никогда неизвестны. Следует учитывать, что если воспользоваться приближением Кирхгофа, возможно разрешить с достаточной точностью огромное число задач классической оптики. Оно содержит следующие предложения:

- 1) Функции u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ в отверстиях экрана равны соответствующим величинам падающей волны при отсутствии экрана;
- 2) Функции u и $\frac{\partial u}{\partial n}$ равны нулю на B (с тыльной стороны экрана)

$$U|_A = U_0|_A; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_A = \frac{\partial U_0}{\partial n}|_A; \quad U|_B = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial n}|_B = 0 \quad (27)$$

где

$$U_0 = \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0}; \quad \frac{\partial U_0}{\partial n} = \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \left(ik - \frac{1}{r_0} \right) \cos(\vec{e}_{r_0}, \vec{n}) \quad (28)$$

являются величинами, которые относятся к падающему полю.

Приближения (27), которые называются граничными условиями Кирхгофа, находятся в основе теории дифракции Кирхгофа.

В (28) учтено, что

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \frac{dr_0}{dr_0} (\vec{e}_{r_0}, \vec{n}) = \cos(\vec{e}_{r_0}, \vec{n}).$$

Если сделать радиус окружности $R \rightarrow \infty$; то вкладом от интеграла по C в (26) можно пренебречь. (Рис. 1.16.)

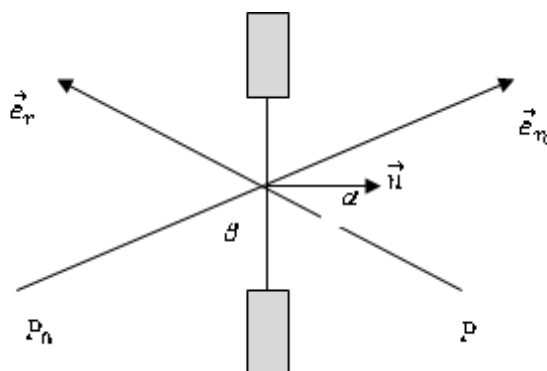


Рисунок 1.16. Радиус окружности $R \rightarrow \infty$

Подставляя (28) в (26), пренебрегая при этом $\frac{1}{r_0} \ll k$; заменяя $\cos\alpha = -\cos(\vec{e}_r, \vec{n})$, получим:

$$U(P) = -\frac{ikA}{4\pi} \int_A \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} \left(\cos(\vec{n}, \vec{e}_{r_0}) - \cos(\vec{n}, \vec{e}_r) \right) dS \quad (29)$$

Данное выражение называется дифракционной формулой Френеля-Кирхгофа. Интегрирование в (29) проводится по отверстию в экране A .

Отверстие A можно заменить любой другой незамкнутой поверхностью, границы которой будут совпадать с краем отверстия. В частности, вместо A можно использовать часть падающего волнового фронта S_0 , которая приблизительно заполняет отверстие и часть C конуса с вершиной P_0 , и с

образующими, проходящими через края отверстия (Рис. 1.17.). При достаточно большом радиусе кривизны волнового фронта вкладом от C можно пренебречь. Если вернуться к обозначению $\cos(\vec{n}, \vec{e}_r) = -\cos\alpha$, то (29) можно

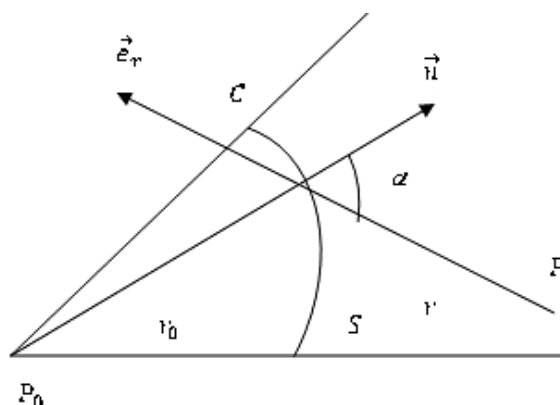


Рисунок 1.17. Часть падающего волнового фронта S_0

переписать в виде

$$U(P) = -\frac{ik}{4\pi} \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \int_{S_0} \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos\alpha) dS_0 \quad (30)$$

где r_0 – радиус волнового фронта S_0 . Сравнивая полученный результат с результатом, полученным в методе Гюйгенса-Френеля,

$$U(P) = \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \int_{S_0} \frac{e^{ikr}}{r} K(\alpha) dS_0 \quad (31)$$

(Здесь опущен временный множитель $e^{-i\omega t}$, изначально отсутствовавший в обозначении функции $U(P)$ в данной теории).

Получаем, что

$$K(\alpha) = -\frac{ik}{4\pi}(1 + \cos\alpha) \quad (32)$$

Это и есть «ослабляющий множитель» $K(\alpha)$, введённый в теории Френеля, но остающийся в ней неопределённым. Из (32) видно, что для центральной зоны $\alpha = 0$ и $K_1 = K(0) = -\frac{ik}{2\pi} = -\frac{\partial}{\lambda}$, что совпадает с результатом, который следует из теории Френеля. Однако, из (32) видно, что Френель неправильно предполагал, что $K\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. На самом деле из теории Кирхгофа следует, что «ослабляющий множитель» $K(\alpha)$ часто является мнимым и с возрастанием α монотонно убывает по абсолютной величине. Также он обращается в ноль при $\alpha = \pi$, т.е. в точке Д диаметрально противоположной точке наблюдения Р.

Интеграл (30) можно вычислить, так как в нем уже не содержится никаких неизвестных функций. Произведем вычисление, поскольку таким образом можно найти строгое обоснование метода зон Френеля и результатов, полученных этим методом.

Для простоты будем считать, что волновой фронт S_0 полностью заполняет отверстие (как при рассмотрении дифракции на круглом отверстии методом Гюйгенса-Френеля).

(Рис. 1.18.)

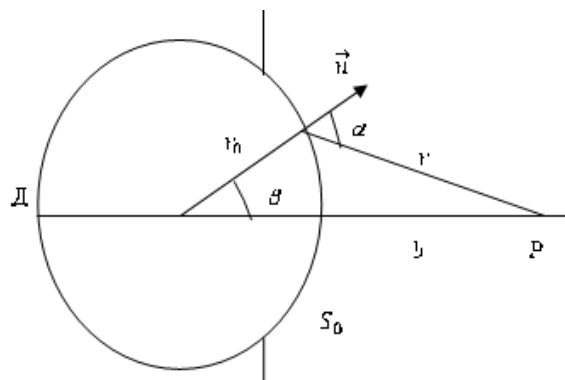


Рисунок 1.18. Дифракция на круглом отверстии

Примем за переменную интегрирования переменную r . Для этого продифференцируем соотношение (из теоремы косинусов):

$$r^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta$$

Здесь переменные r и θ :

$$2rdr = 2r_0(r_0 + b) \sin\theta d\theta \rightarrow \sin\theta d\theta = \frac{rdr}{r_0(r_0 + b)} \quad (33)$$

Подставим (33) в выражение для dS_0 :

$$dS_0 = 2\pi r_0 \sin\theta r_0 d\theta = 2\pi r_0^2 \sin\theta d\theta = 2\pi r_0^2 \frac{rdr}{r_0(r_0 + b)} \quad (34)$$

Подставляя (34) в (30), получаем:

$$U(P) = \int_{r_1}^{r_2} A(r) e^{ikr} dr \quad (35)$$

где введено обозначение

$$A(r) = -\frac{ik(1 + \cos\alpha)}{2(r_0 + b)} e^{ikr_0} \quad (36)$$

Единственной величиной, зависящей от r , является $\cos\alpha$. Через r_1 и r_2 в (35) обозначены наибольшее и наименьшее значения, которые принимает r .

Проинтегрируем (35) по частям:

$$\int_{r_1}^{r_2} A(r) e^{ikr} dr = \left\{ \begin{array}{l} U = A(r); dU = \frac{dA}{dr} dr \\ dv = e^{ikr} dr; v = \frac{e^{ikr}}{ik} \end{array} \right\} = \frac{A(r) e^{ikr}}{ik} \Big|_{r_1}^{r_2} - \frac{1}{ik} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dA}{dr} e^{ikr} dr \quad (37)$$

Вычислим отдельно производную $\frac{d\cos\alpha}{dr}$. Из рисунка по теореме косинусов имеем $(r_0 + b)^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\pi - \alpha) = r_0^2 + r^2 + 2rr_0 \cos\alpha$.

Дифференцируем по r :

$$\theta = 2r + 2r_0 \cos\alpha + 2rr_0 \frac{d\cos\alpha}{dr} \rightarrow \frac{d\cos\alpha}{dr} = -\left(\frac{1}{r_0} + \frac{\cos\alpha}{r} \right) \quad (38)$$

Вычисляем производную от $A(r)$ в (36):

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{ike^{ikr_0}}{2(r_0 + b)} \frac{d\cos\alpha}{dr} = \frac{ike^{ikr_0}}{2(r_0 + b)} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{\cos\alpha}{r} \right) = -\frac{A(r)}{1 + \cos\alpha} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{\cos\alpha}{r} \right) = -\frac{ikA(r)}{1 + \cos\alpha} \left(\frac{1}{ikr_0} + \frac{\cos\alpha}{ikr} \right)$$

откуда подынтегральное выражение в (37):

$$\frac{1}{ik} \frac{dA}{dr} = -\frac{A(r)}{1 + \cos\alpha} \left(\frac{1}{ikr_0} + \frac{\cos\alpha}{\nu kr} \right) \quad (39)$$

Данной величиной, и, следовательно, интегралом в (37) необходимо пренебречь, поскольку это уже было сделано при выводе исходной формулы (29) (пренебрегли $\frac{1}{r_0}$; и при получении (26) пренебрегали $\frac{1}{r}$).

Таким образом, в (37) останется только первое слагаемое, т.е.

$$U(P) = \frac{A(r_2)e^{ikr_2} - A(r_1)e^{ikr_1}}{ik} \quad (40)$$

Важным является то, что величина $U(P)$ представлена в виде разности одной и той же функции при различных значениях аргумента r .

$$f(r) = \frac{A(r)e^{ikr}}{ik} \quad (41)$$

Причем, если заменить r на $\frac{\lambda}{2}$, то знак данной функции изменится на противоположный. Действительно, при учете, что в соответствии с (36) и (38) при малом изменении $r \cos\alpha$ меняется очень незначительно, то $A\left(r + \frac{\lambda}{2}\right) \approx A(r)$, поэтому

$$f\left(r + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{A(r)}{ik} e^{ik\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{A(r)}{ik} e^{ikr} e^{i\pi} = -\frac{A(r)}{ik} e^{ikr} = -f(r) \quad (42)$$

Это обстоятельство позволяет обосновать основной результат метода зон Френеля. Действительно, полагая

$$r_1 = b; r_2 = b + \frac{\lambda}{2}; r_3 = b + 2\frac{\lambda}{2}; r_4 = b + 3\frac{\lambda}{2}; \dots \quad (43)$$

Применяя последовательно формулу (40), найдем, что действие первой зоны Френеля может быть представлено в виде $U_1 = f_1 + f_2$; действие второй зоны Френеля $U_2 = -(f_2 + f_3)$ и т.д.

Обратим внимание, что явный вид выражений $f_k^{(r)}$ для доказательств значений не имеет. Важно только, что эта функция меняет знак при

добавлении к r величины $\frac{\lambda}{2}$. Тогда действие первых N зон выразится формулой:

$$U(P) = (f_1 + f_2) - (f_2 + f_3) + \dots + (-1)^{N+1}(f_N + f_{N+1}) \quad (44)$$

т.к. по величине, в силу малости λ , действие двух соседних зон точно одинаковы, то $f_{N+1} = f_N$. Из формулы (44), которую запишем в виде

$$U(P) = f_1 + (-1)^{N+1} f_{N+1} = f_1 + (-1)^{N+1} f_N \quad (45)$$

можно получить следующее (используя близость значений функции f в двух соседних зонах)

$$U_1 = f_1 + f_2 \approx f_1 + f_2 = 2f_1 \rightarrow f_1 = \frac{1}{2}U_1 \quad (46)$$

$$U_N = f_N + f_{N+1} = 2f_N \approx 2f_{N+1} \rightarrow f_N = \frac{1}{2}U_N; f_{N+1} = \frac{1}{2}U_N$$

Подставляя (46) в (45), получим:

$$U(P) = \frac{1}{2}U_1 + \frac{(-1)^{N+1}}{2}U_N = \frac{1}{2}(U_1 + (-1)^{N+1}U_N) \quad (47)$$

или

$$U(P) = \frac{U_1}{2} + \frac{U_N}{2} \quad (N - \text{нечётно})$$

$$U(P) = \frac{U_1}{2} - \frac{U_N}{2} \quad (N - \text{чётно}), \quad (48)$$

что совпадает с результатом, полученным в теории Френеля.

1.6. Принцип Бабиня для дополнительных экранов

Существуют случаи, когда необходимо использовать так называемые дополнительные экраны, в этой ситуации прибегают к принципу Бабиня. Данный принцип устанавливает СВЯЗЬ дифракционных полей для некоторого экрана с полями для дополнительного экрана. Дополнительные называются экраны, у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными частями другого и наоборот (Рис. 1.19).

Пусть $U_1(P)$ и $U_2(P)$ понимаются комплексные возмущения, когда лишь один из экранов помещен на пути между источниками и точкой наблюдения. Тогда в виду того, что U_1 и U_2 можно представить в виде



интегралов по отверстиям, а отверстия в дополнительных экранах располагаются таким образом, что полностью открывают весь волновой фронт, то

$$U_1 + U_2 = U \quad (59)$$

Это так называемый принцип Бабинне. Данное соотношение, особенно его строгая векторная формулировка, оказывается очень полезным для различных микроволновых задач.

1.7. Значение теории дифракции Кирхгофа

Результаты, полученные с помощью метода Кирхгофа, являются приближенными. Это обусловлено тем, что принятые допущения (граничные условия (27)) являются математически несовместимыми. В математической физике показывается, что для уравнения Лапласа решение внутри замкнутого объема однозначно можно определить заданием на его поверхности либо только U (задача Дирихле), либо только $\frac{\partial U}{\partial n}$ (задача Неймана). Это же является справедливым и для уравнения Гельмгольца. Величины U и $\frac{\partial U}{\partial n}$ нельзя независимо задавать на поверхности. Так, например, если на некотором конечном участке поверхности выполнены условия $U = 0, \frac{\partial U}{\partial n} = 0$, то следовало бы, что и везде тождественно равно 0. (По аналогии в кинематике: если $x_0 = 0$ и $v_{0x} = 0; F = 0$, то $x = 0, \Delta U = 0$ – нет внешних сил).

Данный результат не имеет смысла. Итак, в методе Кирхгофа мы получаем функцию U , которая удовлетворяет точно волновому уравнению, но только приближенно-граничным условиям. Однако, приближение Кирхгофа, успешно применяется в оптических задачах, что объясняется главным образом тем, что отношение длины волны к характерным размерам отверстий в этих задачах мало. Поэтому дифрагированное излучение в основном сохраняет направление падающей волны и предположение о равенстве нулю поля затемненной стороне экрана приблизительно выполняется.

Необходимо отметить следующее обстоятельство. Изначально теория Кирхгофа являлась скалярной теорией (все выведенные формулы (29); (30) и др. являются скалярными). В них под функцией U можно понимать любую из компонент векторов поля \vec{E} и \vec{B} . Это означает, что все компоненты этих векторов рассматриваются отдельно, независимо одна от другой. Однако эти компоненты связаны между собой уравнениями Максвелла, которым они удовлетворяют. Независимое рассмотрение компонент векторов \vec{E} и \vec{B} обуславливает то, что скалярная теория дифракции не позволяет рассмотреть эффекты, связанные с тем, что поляризация дифрагированной волны может изменяться. Эти эффекты часто существенны, например, при изучении дифракции электромагнитных волн в диапазоне радиочастот. Для учета этих эффектов были разработаны векторные обобщения интегральной формулы Кирхгофа.

Для получения векторной формулы, эквивалентной формуле Кирхгофа, будем исходить из формулы (18), которую запишем в более общем виде. Пусть радиус-вектор точки P : \vec{r} , а радиус-вектор поверхности интегрирования S : \vec{r}' , тогда в (18) $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – расстояние от P до

произвольной точки поверхности; $\frac{\partial U}{\partial n} = (\nabla U, \vec{n}) = -(\nabla' U, \vec{n}) = -(\vec{n}, \text{grad}' U)$,

т.к. дифференцирование обозначим через

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (60)$$

тогда (18) запишется в виде:

$$U(\vec{r}) = \oint_S (G, (\vec{n}, \text{grad}' U) - U(\vec{n}, \text{grad}' G)) dS' \quad (61)$$

Если написать такие соотношения для каждой декартовой составляющей \vec{E} и сложить их векторно, то получим векторную теорему для \vec{E} .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \oint_S (G, (\vec{n}, \text{grad}' \vec{E}) - \vec{E}(\vec{n}, \text{grad}' G)) dS' \quad (62)$$

Эта формула оказывается не удобной для вычислений и ее приводят к более удобному виду (Джексон):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{S_1} \left(\left[[\vec{n}, \vec{E}], \text{grad}' G + \vec{n}, \vec{E} \text{grad}' G + ik [\vec{n}, \vec{E}] G \right] \right) dS' \quad (63)$$

где S_1 – поверхность соответствующей дифракционной системы, а нормаль \vec{n} направлена внутрь области наблюдения. (Здесь подставлено $\text{rot} E = ik\vec{B}$).

Векторная теорема является важным обобщением скалярного выражения ((29), (30) и др.). В ней полностью учтен векторный характер электромагнитного поля. Однако для расчета дифрагированных полей и здесь необходимо знать величины \vec{E} и \vec{B} на поверхности S' .

ГЛАВА 2. МЕТОД ЗОН ФРЕНЕЛЯ И МЕТОДИКА ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ДИФРАГИРОВАННОГО СВЕТА

В главе 1 подробно говорилось о том, что точное решение задачи о дифракции света даже в самых простых случаях будет сопряжено с большими трудностями, поэтому большое значение имеют приближенные методы расчета дифракционной картины. В данной главе подробно рассмотрим один из методов расчета дифракционной картины – метод зон Френеля, а также методику использования данного метода при решении задач.

Предположим, что между точечным источником P_0 монохроматического света с длиной волны λ и точечным приемником излучения P будет находиться непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса R , центр которого расположен на линии P_0P (Рис. 2.1).

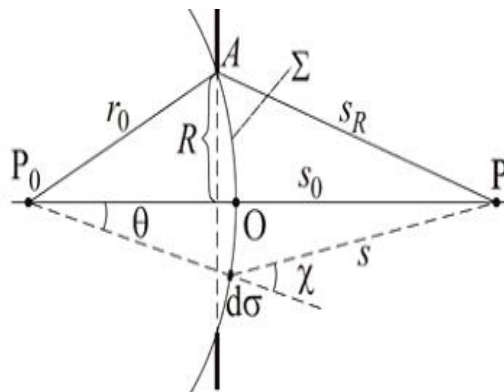


Рисунок 2.1. Распространение световой волны от точечного источника P_0 через отверстие в экране радиуса R

Если радиус сферической волновой поверхности Σ , которая касается границы круглого отверстия в экране, равен r_0 , то комплексная амплитуда U_Σ светового поля, возбуждаемого источником P_0 , в любой точке на поверхности Σ запишется в виде выражения $U_\Sigma = \frac{U_0 e^{ikr_0}}{r_0}$, где U_0 – величина, которая численно равна амплитуде волны на единичном расстоянии от источника; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число.

Вклад в амплитуду поля U в точке P от элемента площади $d\sigma$ на поверхности Σ равен

$$dU(P) = U_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} d\sigma K(\chi) \quad (1)$$

где s – расстояние от элемента $d\sigma$ до точки P , $K(\chi)$ – угловой коэффициент, учитывающий зависимость амплитуды вторичных волн от угла χ между нормалью к волновому фронту и направлением на точку P .

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля комплексная амплитуда поля в точке P запишется в виде следующего выражения

$$U(P) = \frac{U_0 e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) d\sigma \quad (2)$$

В сферических координатах

$$d\sigma = r_0^2 \sin\theta d\varphi d\theta \quad (3)$$

Используя теорему косинусов, запишем

$$s^2 = r_0^2 + (r_0 + s_0)^2 - 2r_0(r_0 + s_0)\cos\theta,$$

или

$$2s ds = -2r_0(r_0 + s_0) d(\cos\theta) = 2r_0(r_0 + s_0) \sin\theta d\theta \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получим:

$$U(P) = \frac{U_0 e^{ikr_0}}{r_0} \int_{\Sigma} \frac{e^{iks}}{s} K(\chi) \frac{r_0}{r_0 + s_0} s ds d\varphi = \frac{U_0 e^{ikr_0}}{r_0} \frac{r_0}{r_0 + s_0} 2\pi \int_{S_0}^{S_R} K(\chi) e^{iks} ds$$

Если для точки наблюдения P будут открыты несколько зон Френеля, то в первом приближении можно считать, что $K(\chi) = K_0 = const$, поэтому

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi K_0 \frac{1}{ik} e^{iks} \Big|_{S_0}^{S_R} = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0 + s_0} 2\pi K_0 \frac{1}{ik} e^{iks_0} \left(e^{ik(s_R - s_0)} - 1 \right)$$

Пусть $\Delta s = s_R - s_0$ – разность хода для крайнего и центрального лучей, приходящих в точку P соответственно из точек A и O , а $\psi = k\Delta s$ – соответствующая разность фаз. Тогда

$$U(P) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0+s_0} K_0 \frac{2\pi}{ik} e^{iks_0} (e^{i\psi} - 1) = U_0 \frac{e^{ik(r_0+s_0)}}{r_0+s_0} K_0 \lambda \left(\frac{e^{i\psi} - 1}{i} \right) = C\Gamma \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} C &= U_0 K_0 \lambda \frac{e^{ik(r_0+s_0)}}{r_0+s_0} \\ \Gamma &= \frac{e^{i\psi} - 1}{i} = i(1 - e^{i\psi}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

– фазовый множитель, который на комплексной плоскости представляется в виде сумм двух единичных векторов (рис. 2.2): вектора \vec{O}_1 и вектора с началом в точке $(0,1)$, направление которого задается углом ψ (от вертикальной оси в направлении против часовой стрелки).

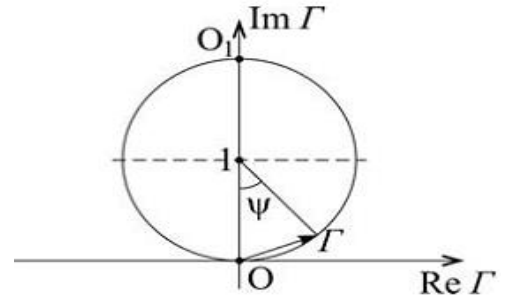


Рисунок 2.2. Представление множителя Γ на комплексной плоскости

Из рисунка 2.2 видно, если $\psi_{max} = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, \pi(2n+1)$ или $\Delta s_{max} = \frac{\psi_{max}}{k} = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots, \frac{\lambda}{2}(2n+1)$, то $|\Gamma| = 2$ (вектор OO_1), при этом комплексная амплитуда волны является максимальной и равна $U_{max} = 2C$.

Если $\psi_{min} = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots, 2\pi n$, или разность хода равна $\Delta s_{min} = \frac{\psi_{min}}{k} = \lambda n$, то амплитуда волны в точке P равна нулю. С учетом данных результатов можно выполнить следующее построение (см. рисунок 1.3. главы 1): построим концентрические сферы с центром в точке P и радиусами $s_0, s_0 + \frac{\lambda}{2}, s_0 + 2\left(\frac{\lambda}{2}\right), \dots, s_0 + n\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, которые сферическую поверхность Σ разобьют на кольцевые зоны (зоны Френеля), значения разности фаз ψ будут равны $\psi = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots, n\pi, \dots$. Если для точки P отверстие открывает нечётное число зон Френеля, то амплитуда волны в точке P будет максимальна, если четное – амплитуда волны равна нулю.

Найдём радиус R_n n -й зоны Френеля при заданных расстояниях a (от источника P_0 до экрана) и b (от экрана до приемника P) (Рис. 2.3).

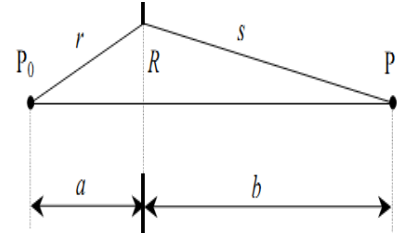


Рисунок 2.3. К выводу формулы для радиуса зон Френеля

Полагая, $R \ll a, b$, получим:

$$r = \sqrt{R^2 + a^2} = a\sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}} \approx a\left(1 + \frac{R^2}{2a^2}\right), s = \sqrt{R^2 + b^2} \approx b\left(1 + \frac{R^2}{2b^2}\right),$$

$$\Delta s_R = (r + s) - (a + b) = \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (7)$$

где r и s – соответственно расстояния от источника P_0 и от приёмника P до вторичного источника, расположенного в плоскости экрана на расстоянии R от оси P_0P ; Δs_R – разность хода до точки P для крайнего и центрального лучей.

Для луча, идущего от внешней границы n -й зоны Френеля, $\Delta s_R = n \frac{\lambda}{2}$, поэтому $R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$. Отсюда площадь n -й зоны Френеля

$$S_n = \pi R_n^2 - \pi R_{n-1}^2 = \pi \left(\frac{n\lambda}{1/a + 1/b} - \frac{(n-1)\lambda}{1/a + 1/b} \right) = \frac{\pi\lambda}{1/a + 1/b} = const$$

не зависит от номера зоны, значит, площади всех зон Френеля одинаковы. С учётом (6) можно записать:

$$\psi_R = k\Delta s_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (8)$$

т.е. разность фаз ψ_R для крайнего и центрального лучей пропорциональна квадрату радиуса отверстия. Формулу (8) можно преобразовать к виду

$$\psi_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1} \quad (9)$$

Разобьём первую зону Френеля на большое число m подзон (Рис. 2.4), чтобы разность фаз $d\psi_m$ для лучей, идущих от соседних межподзонных

границ, была равна $d\psi_m = \frac{\pi}{m}$. Так как в соответствии с (8) $d\psi \sim d(R^2) = R dR$, то при таком разбиении площади всех подзон будут одинаковы.

На векторной диаграмме (рис. 2.4) вкладам в амплитуду дифрагировавшей волны от 1-й, 2-й, ..., m -й подзон соответствуют векторы $OA_1, A_1A_2, \dots, A_{m-1}O_1$, имеющие одинаковую длину (вследствие равенства площадей подзон) и повернутые друг относительно друга на одинаковый угол $d\psi_m$ (из-за разбиения дуги OO_1 на m равных частей). При увеличении m ломаная $OA_1, A_1A_2, \dots, A_{m-1}O_1$ может быть заменена соответствующей полуокружностью.

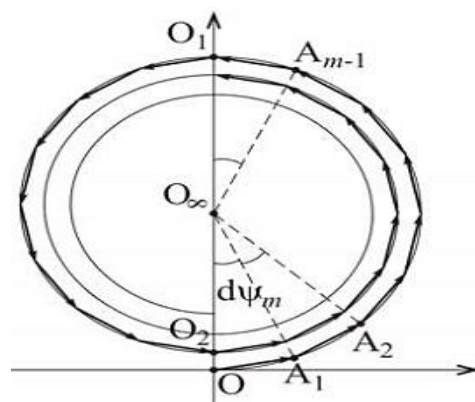


Рисунок 2.4. Построение векторной диаграммы для нахождения амплитуды светового поля в точке P

Разбивая аналогично вторую зону, получаем вторую ломаную, которая могла бы замкнуть первую, если бы длины составляющих ее элементарных векторов были равны. Но поскольку при увеличении χ коэффициент $K(\chi)$ будет монотонно уменьшаться, то также уменьшаться будет амплитуда вторичных волн. Поэтому конец ломаной для второй зоны (точка O_2) не совпадает с точкой O , а суммарный вклад от второй зоны представлен вектором O_1O_2 , длина которого чуть меньше длины вектора OA_1 . Так как направления векторов противоположны, суммарный вклад в $U(P)$ от первой и второй зон Френеля мал (длина вектора OO_2 много меньше, чем длины векторов OA_1 и O_1O_2). Учитывая вклады от всех зон, получим векторную диаграмму, имеющую вид скручивающейся спирали (спираль Френеля) $OO_1O_2O_3 \dots O_\infty$ с центром в точке O_∞ . Вектор OO_∞ характерен, когда для точки P открыты все зоны Френеля. Как видно из рисунка 2.4, длина вектора OO_∞ в два раза меньше длины вектора OA_1 .

Следовательно, если для точки P открыта только первая зона Френеля, то амплитуда электрического поля в точке P в два раза больше, чем в отсутствие препятствия, а интенсивность – в четыре, т.к. интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля.

Поскольку при $R \rightarrow \infty$ коэффициент $\Gamma \rightarrow i$, а в отсутствие препятствия амплитуда волны в точке P равна $U(P) = U_0 \frac{e^{ik(r_0+s_0)}}{r_0+s_0}$, из формулы (5) находим:

$$K_0 = \frac{1}{i\lambda} = -\frac{i}{\lambda} \quad (10)$$

Теперь ясна роль коэффициента C в (5): модуль $|C|$ равен амплитуде, а квадрат модуля $|C|^2$ пропорционален интенсивности I_0 поля в точке наблюдения P в отсутствие препятствия. Кроме того, длина вектора OO_∞ равна $|C|^1$. Если число открытых зон Френеля относительно небольшое ($n \sim 5 \div 10$), то можно считать, что радиус спирали приближенно равен $|C|$, и интенсивность в точке наблюдения P равна

$$I = I_0 |\Gamma|^2 \quad (11)$$

Для заданных a, b, R по формуле (8) находим ψ_R .

$$Re \Gamma = \sin \psi \quad (12)$$

$$Im \Gamma = 1 - \cos \psi \quad (13)$$

поэтому

$$|\Gamma|^2 = \sin^2 \psi + (1 - \cos \psi)^2 = 2(1 - \cos \psi) \quad (14)$$

следовательно,

$$I(\psi) = 2I_0(1 - \cos \psi) \quad (15)$$

С помощью спирали Френеля часто удается значительно упростить решение задач по дифракции света на круглых отверстиях и дисках.

Задача 4.2.2. [6]

Плоская световая волна с длиной $\lambda = 0,48$ мкм и интенсивностью I_0 падает нормально на экран с круглым отверстием радиуса $R = 0,6$ мм. Найти интенсивность в центре дифракционной картины на расстоянии $b = 1,5$ м от экрана.

Решение

1-й способ.

Так как на экран падает плоская волна ($\frac{1}{a} = 0$), то формула $R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

принимает вид: $R_n^2 = n\lambda b$

$$\text{Откуда } n = \frac{R^2}{\lambda b} = \frac{(0,6 \cdot 10^{-3})^2}{0,48 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5} = 0,5$$

Т.к. $n \sim R^2$, то делаем вывод, что для точки Р открыта внутренняя половина (по площади) первой зоны Френеля. Этому случай изображается на векторной диаграмме (Рис. 2.5.)

вектором $OO_{0,5}$, длина которого в $\sqrt{2}$ раз

больше длины вектора OO_∞ . Таким образом, интенсивность в центре дифракционной картины в 2 раза больше, чем интенсивность I_0 падающей волны.

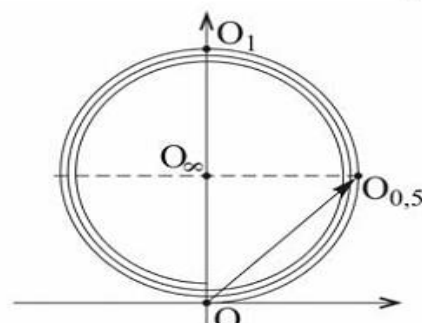


Рис. 2.5. Определение комплексной амплитуды светового поля первым способом

2-ой способ.

В соответствии с формулой $\psi_R = k \cdot \Delta_{S_R} = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$, разность фаз

$$\psi_R = \frac{\pi r^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{r^2}{\lambda b} = 0,5\pi ,$$

что соответствует точке $O_{0,5}$ на векторной диаграмме (Рис. 2.6).

Далее необходимо решать как 1 способом.

Ответ: $I = 2I_0$

Задача 4.2.3. [5]

Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на экран с отверстием, форма которого показана на рисунке 2.7.

Характерные радиусы отверстия равны соответственно $r_1 = R_1$, $r_2 = \sqrt{2}R_1$, $r_3 = \sqrt{3}R_2$, где R_1 и R_2 – радиусы первой и второй зон Френеля. Найти интенсивность I света в точке наблюдения.

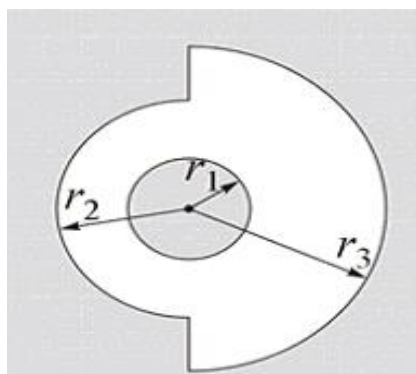


Рисунок 2.7. Форма отверстия в экране

Решение

Найдём на векторной диаграмме (Рис. 2.8.) положение точек A_1, A_2 и A_3 , соответствующих радиусам r_1, r_2 и r_3 . Точка A_1 соответствует границе первой зоны Френеля.

Ввиду того, что площадь отверстия радиуса r_2 равна $S(A_2) = \pi r_2^2 = 2\pi r_1^2 = 2S_1$, а согласно

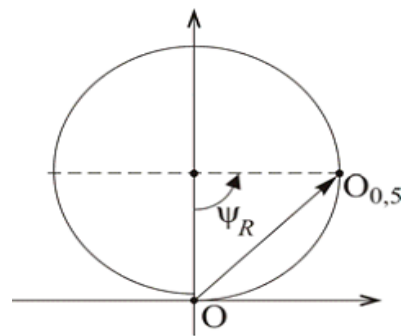


Рис. 2.6. Определение комплексной амплитуды светового поля вторым способом

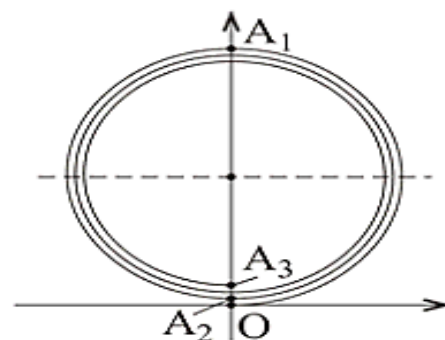


Рисунок 2.8. Фрагмент спирали Френеля и положение в ней точек A_1, A_2, A_3

$$\psi_R = \frac{kr^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{\pi R^2}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \pi \frac{R^2}{R_1^2} = \pi \frac{S}{S_1}$$

поэтому $\psi_2 = \pi \frac{S(A_2)}{S_1} = 2\pi$, точка A_2 соответствует границе второй зоны Френеля. Аналогичным образом, $S(A_3) = \pi r_3^2 = 3\pi R_2^2 = 3S_2 = 6S_1$, и точка A_3

соответствует границе шестой зоны Френеля.

Исходное отверстие можно рассматривать как совокупность кольца и полукольца (Рис. 2.9.). Изобразим с помощью спирали Френеля векторы, которые соответствуют вкладам от отдельных участков волнового фронта.

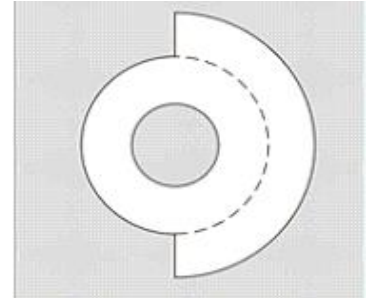


Рисунок 2.9. Разбиение отверстия в экране на простые объекты

Так как в центре экрана находится непрозрачный диск радиуса R_1 , то участок спирали OA_1 «не работает». Кольцо с радиусами r_1 и r_2 открыто полностью, что соответствует участку спирали от A_1 до A_2 (вектор A_1A_2). Область от r_2 до r_3 открыта на половину (по диаметру). В этом случае интегрирование по углу φ даёт множитель π , поэтому длина соответствующего вектора в два раза меньше, чем длина вектора A_2A_3 , таким образом, амплитуда $U(P)$ в точке наблюдения определяется суммой двух векторов $U(P) = A_1A_2 + \frac{1}{2}A_2A_3$.

Поскольку $|A_1A_2| = 2|OO_\infty|$ и $|A_2A_3| \sim 0$ (для нескольких первых зон Френеля радиус спирали считаем неизменным), интенсивность в точке наблюдения равна:

$$I(P) = 4I_0$$

Замечание

Разбиение на простые объекты можно выполнить другим образом (см. рисунок 2.10.).

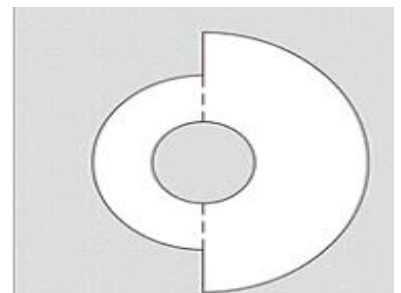


Рисунок 2.10. Разбиение отверстия в экране на простые объекты

Тогда $U(P) = \frac{1}{2} A_1 A_2 + \frac{1}{2} A_1 A_3$, что приводит к тому же результату, поскольку $A_1 A_2 \approx A_1 A_3$

Ответ: $I(P) = 4I_0$

Задача 4.2.5. [5]

Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса r_0 . Для точки наблюдения P , находящейся на расстоянии b от экрана, отверстие открывает три зоны Френеля. В отверстие вставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием f . Найти:

- 1) интенсивность света в точке P , если: а) $f = b$; б) $f = 2b$; в) $f = b/2$;
- 2) распределение интенсивности вдоль оси линзы, если $f = b$.

Решение

Для вторичного источника, находящегося в плоскости отверстия на расстоянии r от его центра, разность хода $\Delta s_0(r)$ в соответствии с

$$\Delta s_R = (r + s) - (a + b) = \frac{R^2}{2a} + \frac{R^2}{2b} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

равна
$$\Delta s_0(r) = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{r^2}{2b}$$

(для плоской волны $a = \infty$) Учитывая, что собирающая линза вносит дополнительную разность хода
$$\Delta s_L(r) = -\frac{r^2}{2f} < 0$$

(поскольку толщина собирающей линзы в центре больше, чем на периферии), для суммарной разности хода получаем:

$$\Delta s(r) = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{f} \right)$$

1а) Если $f = b$, то для всех вторичных источников разность хода $\Delta s_a(r) = 0$, т.е. участок спирали OO_3 «вытянут» в прямую линию OO_{3a} (Рис. 2.11).

Полагая, что радиус спирали R пропорционален $\sqrt{I_0}$ и длина участка спирали OO_3 (а не вектора OO_3) равна $3\pi R$, для интенсивности в точке P (в фокальной плоскости линзы) получаем:

$$I_a = (3\pi R)^2 = 9\pi^2 I_0 \approx 89 I_0$$

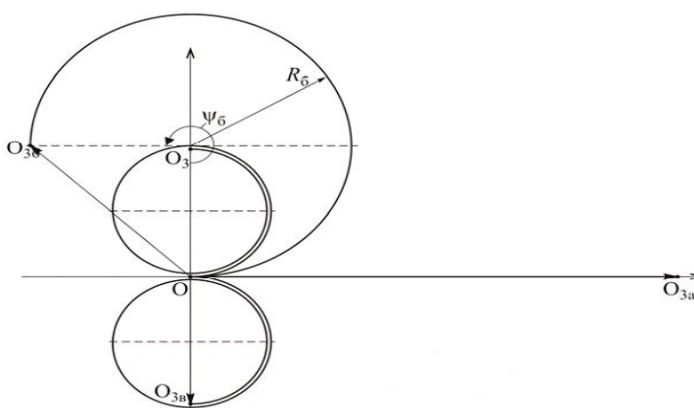


Рисунок 2.11. Определение интенсивности света в точке наблюдения P для различных значений фокусного расстояния линзы

1б) если $f = 2b$, то разность хода (при $r = r_0$):

$$\Delta s_{\delta}(r_0) = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2b} \right) = \frac{r_0^2}{4b} = \frac{\Delta s(r_0)}{2} = \frac{1}{2} \frac{3\lambda}{2}$$

Соответствующая разность фаз: $\psi_{\delta}(r_0) = k\Delta s_{\delta}(r_0) = \frac{k\Delta s(r_0)}{2} = \frac{3\pi}{2}$,

так как отверстие открывает три зоны Френеля.

Следовательно, участок спирали «раскрутится», но не полностью (Рис. 2.11), при этом длина дуги $OO_{3\delta}$ будет оставаться равной длине участка спирали OO_3 (число вторичных источников не изменилось). Чтобы найти амплитуду A_{δ} в точке P (она равна длине вектора $OO_{3\delta}$), необходимо найти радиус R_{δ} дуги соответствующей окружности: $3\pi R = \frac{3\pi}{2} R_{\delta}$, откуда $R_{\delta} = 2R$.

Для длины $|OO_{3\delta}|: |OO_{3\delta}| = 2R_{\delta} \sin\left(\frac{2\pi - \psi_{\delta}}{2}\right) = 4R \sin \frac{\pi}{4} = 4R \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}R$

поэтому при $f = 2b$ интенсивность в точке P равна $I_{\delta} = |OO_{3\delta}|^2 = 8I_0$

1в) если $f = b/2$, то $\Delta s_{\epsilon}(r_0) = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{b} - \frac{2}{b}\right) = -\frac{r_0^2}{2b} = -\Delta s_0(r_0)$

$$\psi_{\epsilon}(r_0) = -\psi_0(r_0) = -3\pi$$

Как видно из рисунка 2.11, в этом случае участок спирали OO_3 «перераскручивается», и спираль $OO_{3\epsilon}$ представляет симметричное отражение спирали OO_3 относительно горизонтальной оси. Следовательно, $R_{\epsilon} = 2R$; $I_{\epsilon} = 4I_0$, т.е. интенсивность будет такой же, как и в отсутствии линзы.

2) Для исследования распределения интенсивности света вдоль оси линзы выберем в качестве начала отсчета на оси x (совпадает с осью линзы) положение точки P . В отсутствие линзы зависимость разности фаз $\psi(x)$ для крайнего и центрального лучей

$$\psi(R) = k\Delta s_R = \frac{kR^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

при $x > -b$ имеет вид: $\psi(x) = \frac{kr_0^2}{2} \frac{1}{(b+x)} = \psi(0) \frac{b}{b+x}$

где $\psi(0) = \frac{kr_0^2}{2b} = \frac{\pi r_0^2}{\lambda b}$ – разность фаз в точке P ($x=0$). На спирали Френеля (Рис. 2.А и Рис. 2.Б) этой разности фаз $\psi(x)$ соответствует точка O_x .

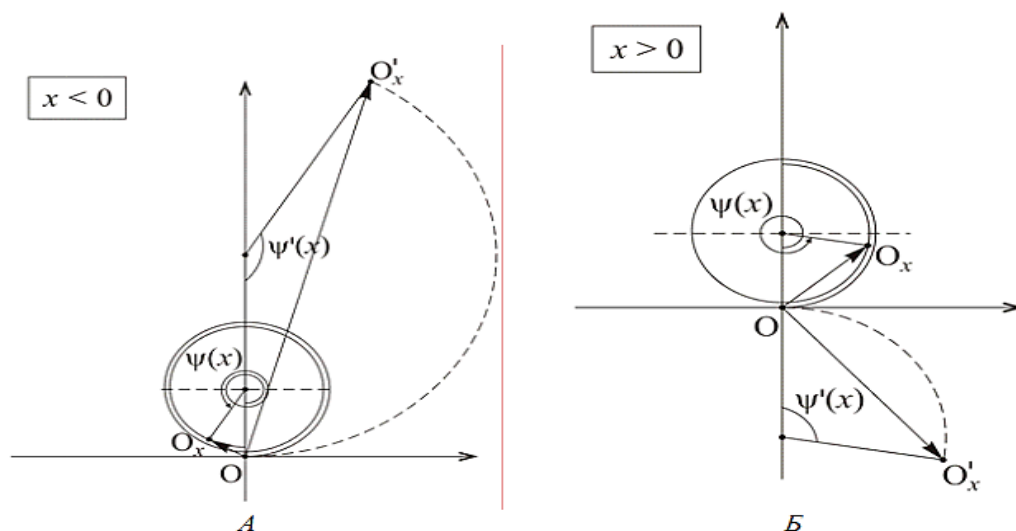


Рисунок 2.12. К вопросу о разности фаз для крайнего и центрального лучей с учётом действия линзы: $x < 0$ (А) и $x > 0$ (Б)

При установке линзы с фокусным расстоянием $f = b$ возникает дополнительная разность фаз $\psi_l = -\frac{kr_0^2}{2b} = -\psi(0) < 0$, поэтому суммарная разность фаз $\psi'(x)$ становится равной

$$\psi'(x) = \psi(x) + \psi_l = -\psi(0) \frac{x}{b+x}$$

при этом $\psi'(x) > 0$, если $-b < x < 0$, и $\psi'(x) < 0$, если $x > 0$.

Участок спирали OO_x «раскрутится» (Рис. 2.12) и превратится в дугу окружности OO_x' . Так как длины дуг OO_x и OO_x' одинаковы (число вторичных источников не изменилось), то для радиуса $R'(x)$ дуги OO_x'

получаем:
$$R'(x) = R \frac{|\psi(x)|}{|\psi'(x)|} = R \frac{b}{|x|}$$

Амплитуда $A'(x)$ равна длине вектора OO_x' , поэтому

$$A'(x) = 2R'(x) \sin \left| \frac{\psi'(x)}{2} \right| = 2R \frac{b}{|x|} \sin \left| \psi(0) \frac{x}{2(b+x)} \right| = R\psi(0) \frac{b}{b+x} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)}$$

где $\varphi(x) = \left| \psi(0) \frac{x}{2(b+x)} \right|$

Так как согласно условию задачи $\psi(0) = 3\pi$, то для интенсивности на оси

линзы получаем: $I = I_a \left(\frac{b}{b+x} \right)^2 \left(\frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^2$, где $I_a = 9\pi^2 I_0$

Обратим внимание, что похожая зависимость имеет место в случае дифракции Фраунгофера на щели. Примерный вид зависимости I_x показан на рисунке 2.13.a, для сравнения на рисунке 2.13.b приведена зависимость I_x в случае $\psi(0) = 15\pi$.

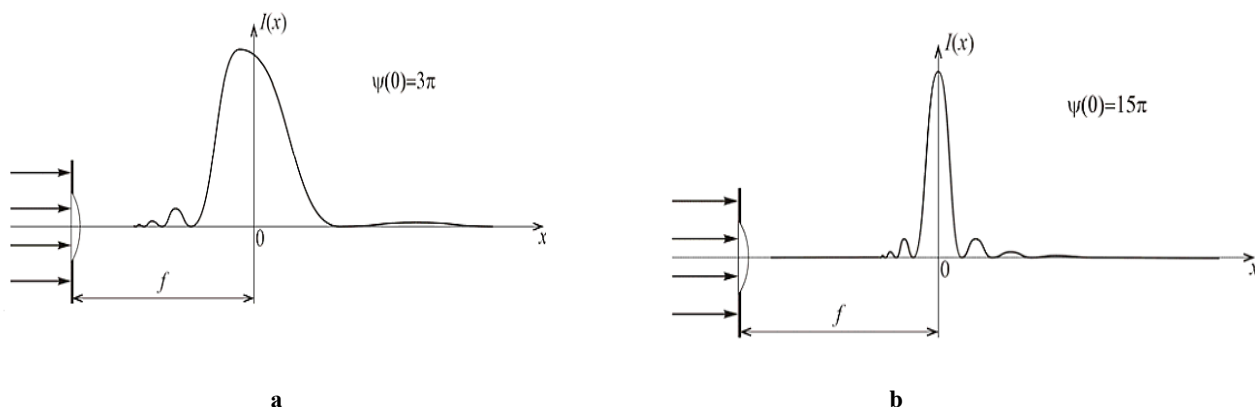


Рисунок 2.13. Распределение интенсивности I_x

Размер H (вдоль оси x) яркого дифракционного максимума в фокальной плоскости линзы ($x=0$) можно оценить, исходя из условия $\varphi(x_{1,2}) = \pm\pi$ ($x_{1,2}$ – координаты ближайших к максимуму минимумов):

$$x_1 = \frac{2b}{\frac{r_0^2}{\lambda b} - 2} > 0; \quad x_2 = \frac{-2b}{\frac{r_0^2}{\lambda b} + 2} < 0, \quad H = x_1 - x_2 = \frac{4b \frac{r_0^2}{\lambda b}}{\left(\frac{r_0^2}{\lambda b} \right)^2 - 4} = \frac{4bm}{m^2 - 4}$$

где $m = \psi(0) / \pi$. Если $m = 3$, то $H = 2,4b$; если $m = 15$, то $H = 0,27b$. С ростом m размер «пятна» стремится к нулю по закону: $H \approx 4b / m$.

Ответ:

1а) $I_a = 89I_0$,

1б) $I_0 \approx I_0$,

$$1\text{в)} I_{\epsilon} = 4I_0,$$

$$2) I = I_a \left(\frac{b}{b+x} \right)^2 \left(\frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} \right)^2$$

Задача 4.114. [7]

Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие:

- а) равно первой зоне Френеля; внутренней половине первой зоны;
 б) сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)?

Решение

Для решения этой задачи воспользуемся спиралью Френеля.

А) При рассмотрении случая, когда открыта одна зона Френеля, построение Френеля будет выглядеть, как показано на рисунке 2.14. Вектор E_1 по модулю в два раза больше, чем вектор E_0 , соответствующий электрическому полю падающей на отверстие волны.

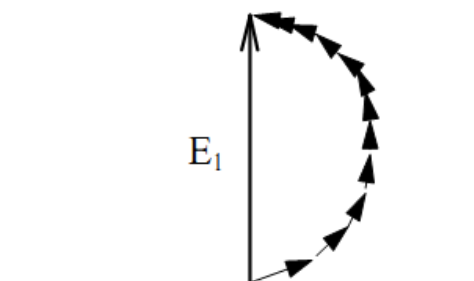


Рисунок 2.14. Открыта одна зона Френеля

Значит, $E_1 = 2E_0$ и $I_1 = 4I_0$, поскольку амплитуда напряженности электрического поля и интенсивность световой волны связаны $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2$.

Для случая, когда открыта внутренняя половина зоны Френеля, построение представлено на рисунке 2.15, и

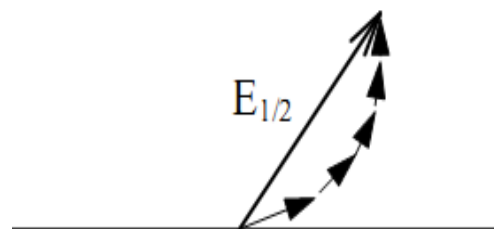


Рисунок 2.15. Открыта внутренняя половина зоны Френеля

$E_{1/2} = \sqrt{2}E_0$. Следовательно, интенсивность за экраном $I_{1/2} = 2I_0$.

Б) Рассмотрим случай, когда закрыта половина первой зоны Френеля по диаметру (например, левая). По принципу Гюйгенса-Френеля вектор электрического поля электромагнитной волны от части открытого волнового фронта прямо пропорционален площади открытой его части ($dE \sim dS$). Значит, можно считать, что если от целой зоны электрическое поле в точке наблюдения будет равно $E_1 = 2E_0$, то от половины по площади напряженности электрического поля будет в два раза меньше и равен

$$E_{1/2S} = \frac{1}{2}E_1 = E_0, \quad I_{1/2S} = I_0$$

Разработан также графический способ построения дифракционных картин, основанный на применении «спирали Корню».

Задача 4.116. [7]

Плоская монохроматическая световая волна интенсивности I_0 падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана длинная щель с полукруглым вырезом на одной из сторон.

Край выреза совпадает с границей первой зоны Френеля для точки наблюдения P .

Ширина щели составляет $0,90$ радиуса выреза. Найти с помощью рисунка 2.16

интенсивность в точке P .

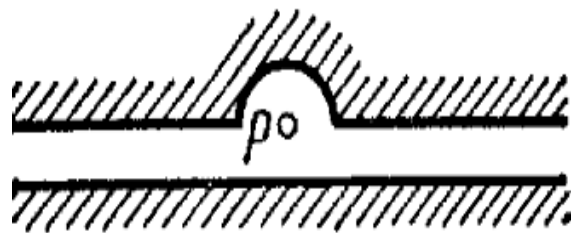


Рисунок 2.16. Первая зона Френеля для точки P

Решение

При решении этой задачи требуется совместное использование спирали Френеля для полукруглого отверстия и спирали Корню для прямоугольного выреза (Рис 2.17.).

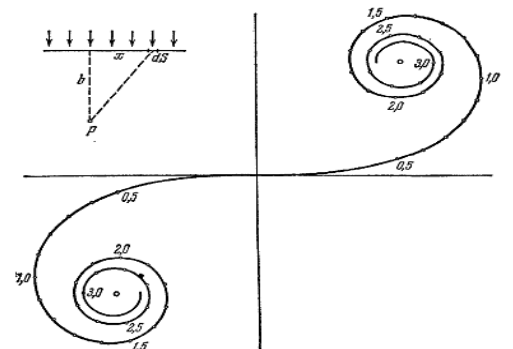


Рисунок 2.17. Изображение совместного использования спирали Френеля и спирали Корню

Необходимо сложить два вектора: $E_{1/2}$ – от половины первой зоны Френеля по площади и E_b – от выреза шириной $\Delta x = \eta r_1 = \eta \sqrt{b\lambda}$. Это по спирали Корню соответствует параметру $v_1 \Delta x \sqrt{\frac{2}{b\lambda}} = \sqrt{2}\eta = 1,3$.

Такому значению v_1 по спирали Корню соответствует вектор E_b , изображенный на рисунке 2.18.

Длина этого вектора определяется линейкой по спирали и равна $E_b = 0,67E_0$. Напомним, что вектору E_0 соответствует отрезок, соединяющий фокусы спирали Корню.

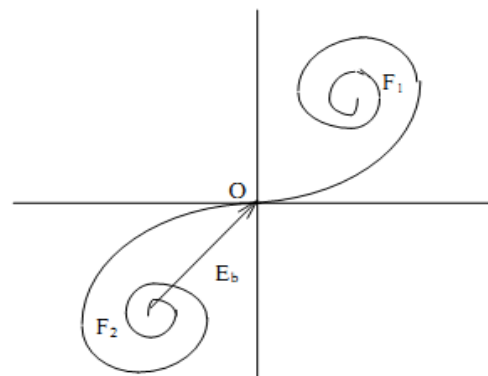


Рисунок 2.18. Спираль Корню

Модуль вектора $E_{1/2}$ равен половине вектора E_1 от всей первой зоны Френеля, а по фазе совпадает с ним (см. рисунок 2.19.). Это связано с тем, что электрическое поле от участка открытой волновой поверхности будет прямо пропорционально

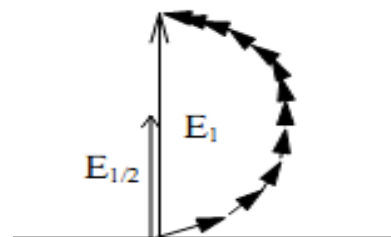


Рисунок 2.19. Спираль Френеля

площади участка. Этот вектор по фазе тоже совпадает с вектором. Поэтому можно считать, что вектора $E_{1/2}$ и E_b параллельны и их сумма будет равна $E_\Sigma = E_{1/2} + E_b = 1,67E_0$, интенсивность в точке P будет пропорциональна квадрату E_Σ и равна $I_p = 2,8I_0$.

Ответ: $I_p = 2,8I_0$

ГЛАВА 3. МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РАСЧЁТА ДИФРАГИРОВАННОГО ПОЛЯ

Задача 472. [2]

Точечный источник света расположен на оси, проходящей через центр круглого непрозрачного экрана радиуса a перпендикулярно его плоскости. Считая выполненным условие применимости геометрической оптики ($\lambda \ll a$), найти интенсивность света I в симметричной относительно экрана точке P .

Решение

Воспользуемся следующей формулой

$$U(P) = \frac{K}{2\pi i} \int \frac{U}{R} e^{ikR} dS_n, \quad (1)$$

определяющей амплитуду дифрагированной электромагнитной волны в приближении геометрической оптики. Здесь $U(P)$ – поле в точке P за экраном; U – поле на участке dS_n поверхности интегрирования, которой в нашем случае является плоскостью xoy за исключением экрана – диска радиуса a с центром в начале координат (dS_n – проекция элемента dS волнового фронта на направлении луча, пришедшего из точечного источника света P_0 в произвольную точку плоскости xoy вне экрана); R – расстояние от dS_n до точки P ; k – абсолютная величина волнового

вектора световой волны $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

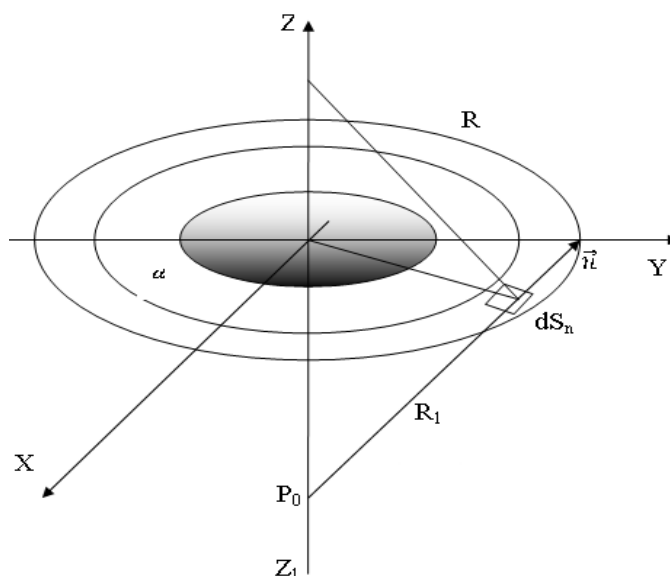


Рисунок 3.1. Точечный источник света на оси непрозрачного экрана радиуса a

(см. рисунок 3.1).

Вычисление интеграла (1) удобно провести в полярной системе координат. При этом в силу аксиальной симметрии задачи в качестве элемента поверхности интегрирования dS_n (после интегрирования по φ) можно взять бесконечно тонкое кольцо:

$$dS_n = 2\pi r dr \cos(\vec{n}, \vec{e}_z) = 2\pi r \frac{|z_1|}{R_1} dr, \quad (2)$$

где z_1 - координата точечного источника P_0 ; R_1 - расстояние от этого источника до произвольной точки элемента dS_n ; $R_1 = \sqrt{z_1^2 + r^2}$. (3)

Входящая в подынтегральное выражение в (1) амплитуда поля, порождаемой точечным источником, находящимся в точке P_0 , расходящейся сферической волны, определяется выражением: $U = A \frac{e^{ikR_1}}{R_1}$, (4)

где $A = const$. Входящее в (1) расстояние R задается формулой

$$R = \sqrt{z^2 + r^2} \quad (5)$$

подставляя (2) - (5) в (1), получим: $U(z) = -ik|z_1|A \int_a^\infty \frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1^2} r dr$ (6)

перейдём в (6) к новой переменной интегрирования

$$\rho = R + R_1 = \sqrt{z^2 + r^2} + \sqrt{z_1^2 + r^2}, \quad d\rho = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) r dr = \frac{\rho}{RR_1} r dr \rightarrow \frac{r dr}{R_1 R} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (7)$$

пределы интегрирования $\begin{cases} r = a \rightarrow \rho = \rho_0 \sqrt{z^2 + a^2} + \sqrt{z_1^2 + a^2} \\ r = \infty \rightarrow \rho = \infty \end{cases}$

С учётом (7) из (6) имеем: $U(z) = -ik|z_1|A \int_{\rho_0}^\infty \frac{e^{ik\rho}}{\rho R_1(\rho)} d\rho$ (8)

производя в (8) интегрирование по частям, это выражение можно представить в виде ряда по возрастающим отрицательным степеням $k\rho_1$. Для

проведения этой процедуры вычислим отдельно производные (с учётом (3) и

$$(7)): \quad \frac{d}{d\rho} R_1(\rho) = \frac{r}{R_1} \frac{dr}{d\rho} = \frac{r}{R_1} \frac{R_1 R}{r\rho} = \frac{R}{\rho}$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho R_1} = \frac{-\frac{d}{d\rho}(R_1\rho)}{\rho^2 R_1^2} = -\frac{R_1 + \rho \frac{dR_1}{d\rho}}{\rho^2 R_1^2} = -\frac{R_1 + R}{\rho^2 R_1^2} = -\frac{1}{\rho R_1^2} \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho R_1^2} = \frac{-\frac{d}{d\rho}(\rho R_1^2)}{\rho^2 R_1^4} = -\frac{R_1^2 + \rho \frac{dR_1^2}{d\rho}}{\rho^2 R_1^4} = -\frac{R_1^2 + 2R_1 R}{\rho^2 R_1^4} = -\frac{\rho + R}{\rho^2 R_1^3}$$

Используя (9), вычислим интеграл в (8). Дважды проинтегрируем по частям

$$\int_{\rho_0}^{\infty} \frac{e^{ik\rho}}{\rho R_1} d\rho = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{\rho R}; du = -\frac{R_1 R}{\rho^2 R_1^2} d\rho \\ dv = e^{ik\rho} dr, v = \frac{e^{ik\rho}}{ik} \end{array} \right\} = \frac{e^{ik\rho}}{ik \rho R_1} \Big|_{\rho_0}^{\infty} + \frac{1}{ik} \int_0^{\infty} \frac{(R_1 + R) e^{ik\rho} d\rho}{\rho^2 R_1^2} =$$

$$= i \frac{e^{ik\rho_0}}{k \rho_0 R_1(\rho_0)} + \frac{1}{ik} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{e^{ik\rho}}{\rho R_1^2} d\rho = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{\rho R_1^2}; dn = -\frac{R_1^2 + 2R_1 R}{\rho^2 R_1^4} d\rho \\ dv = e^{ik\rho}; v = \frac{e^{ik\rho}}{ik} \end{array} \right\} =$$

$$= i \frac{e^{ik\rho_0}}{k \rho_0 R_1(\rho_0)} - \frac{1}{(ik)^2} \frac{e^{ik\rho_0}}{\rho_0 R_1^2(\rho_0)} + \frac{1}{(ik)^2} \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{(\rho + R) e^{ik\rho}}{\rho^2 R_1^3} d\rho$$

подставим данное выражение в (8)

$$U(z) = \frac{e^{ik\rho_0} |z_1| A}{\rho_0 R_1(\rho_0)} + \frac{|z_1| A e^{vk\rho_0}}{ik \rho_0 R_1^2(\rho_0)} - \frac{1}{ik} \int_0^{\infty} \frac{(\rho + R) e^{vk\rho}}{\rho^2 R_1^3} d\rho \quad (10)$$

Второе слагаемое в (10) отличается от первого множителем

$$\frac{1}{ik R_1(\rho_0)} = \frac{1}{vk \sqrt{z_1^2 + a^2}} = \frac{\lambda}{2\pi v \sqrt{z_1^2 + a^2}} \ll 1, \quad (11)$$

поскольку $\lambda \ll a$ - в приближении геометрической оптики, и $a \ll |z_1|$; z - поскольку заметная интенсивность дифрагированной волны наблюдается лишь при малых углах дифракции. Следовательно, второе слагаемое в (10) можно отбросить в сравнении с первым. Продолжая в (10) процесс интегрирования по частотам, мы получим, что каждый последующий член будет так же в силу (11) меньше предыдущего. Поэтому, в используемом в

данной задаче приближении, в (10) можно отбросить все слагаемые за исключением первого. Учитывая, что $R_1(\rho_0) = \sqrt{z_1^2 + a^2}$, имеем

$$U(z) = \frac{A e^{ik\sqrt{z_1^2 + a^2}}}{\sqrt{z_1^2 + a^2}} \frac{|z_1| e^{ik\sqrt{z^2 + a^2}}}{\sqrt{z^2 + a^2} + \sqrt{z_1^2 + a^2}} \quad (12)$$

Заметим, что первый множитель в (12)

$$U_0 = A \frac{e^{ik\sqrt{z_1^2 + a^2}}}{\sqrt{z_1^2 + a^2}} \quad (13)$$

представляет собой амплитуду падающей волны на границе экрана ($r = a$).

Интенсивность света определяется квадратом амплитуды поля, т.е.

$I \sim |U(z)|^2 = U(z)U^*(z)$ подставляя сюда (12), получим:

$$I(z) = I_0 \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{z^2 + a^2} + \sqrt{z_1^2 + a^2}\right)^2}, \quad (14)$$

где $I_0 = \frac{|A|^2}{z_1^2 + a^2}$ - интенсивность первичной волны на краю экрана (15)

В точке симметричной относительно экрана (при $|z_1| = z$) из (14) имеем:

$$I(z) = \frac{I_0}{4} \frac{z^2}{z^2 + a^2} \quad (16)$$

Отсюда следует, что в симметричной точке за экраном, при условии, что она находится не слишком близко к нему (чтобы z не было $\ll 1$), будет наблюдаться светлое пятно.

Данный результат, который противоречит представлению о прямолинейности распространения света, был теоретически предсказан Пуассоном (1818 г.), представившим его в качестве возражения против теории дифракции Френеля и волновой теории света в целом. Но Араго и Френелем экспериментально подтвердили наличие пятна, появляющегося вследствие симметрии экрана. Волны, огибающие его края, проходят в

среднюю точку с равными фазами. Очевидно, такими свойствами обладают все точки, лежащие на средней линии. В этих точках интенсивность света будет существенно больше, чем в соседних, которые не лежат на оси z .

Задача 474. [2]

Параллельный пучок света падает на круглое отверстие в непрозрачном экране перпендикулярно его плоскости. Найти распределение интенсивности света I на средней линии за экраном.

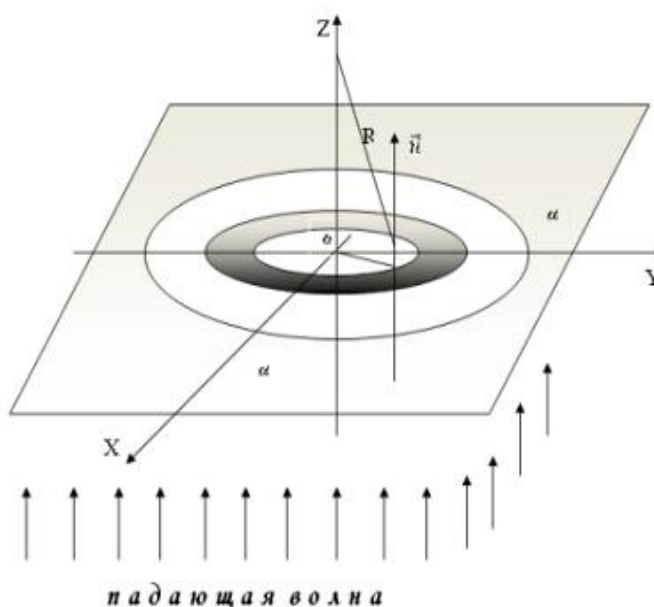


Рисунок 3.1. Падение пучка света на круглое отверстие

Решение

Для решения используем формулу

$$U(P) = \frac{k}{2\pi i} \int \frac{U_0}{R} e^{ikR} dS_n \quad (1)$$

где dS_n – амплитуда падающей волны в точках отверстия. Т.к. на экран с отверстием падает параллельный пучок света, можно считать, что падающая волна является плоской, и зависимость от координат определяется выражением:

$$U_0(z) = A e^{ikz} \quad (2)$$

где $A = const$. При этом интенсивность данной волны на краю отверстия

$$I_0 = |u_0(z)|^2 = |A|^2 \quad (3)$$

Считая, что выполнено условие $z \gg a$, разложим корень $R = \sqrt{z^2 + r^2} = z \left(1 + \frac{r^2}{2z^2}\right)$, подставляя данное выражение в показатель экспоненты, а $R = Z$ – в знаменатель, из (1) имеем:

$$U(z) = -iA \frac{e^{ikz}}{z} \int_0^a e^{i \frac{kr^2}{2z}} r dr = -iA e^{ikz} \left(e^{i \frac{ka^2}{2z}} - 1 \right) = 2A e^{ik \left(z + \frac{ka^2}{4z} \right)} \sin \frac{ka^2}{4z}$$

таким образом:

$$U(z) = 2A e^{ik \left(z + \frac{ka^2}{4z} \right)} \sin \frac{ka^2}{4z} \quad (4)$$

Вычисляем интенсивность в точках оси z (с учётом (3)):

$$I(z) = |U(z)|^2 = 4|A|^2 \sin^2 \frac{ka^2}{4z} = 4I_0 \sin^2 \frac{ka^2}{4z} \quad (5)$$

Видно, что интенсивность света на средней линии круглой диафрагмы осциллируется бесконечное число раз, уменьшаясь до нуля при $z \rightarrow \infty$. Такое убывание интенсивности по оси связано с тем, что параллельный пучок света становится из-за дифракции на отверстии расходящимся, и поток энергии через отверстие с увеличением z распределяется на всё большую площадь.

Задача 475. [2]

Найти угловое распределение интенсивности света dI при дифракции Фраунгофера на кольцевом отверстии (радиусы $a > b$) в бесконечном непроницаемом экране. Начальный пучок света падает нормально к плоскости отверстия. Рассмотреть частный случай дифракции на круглом отверстии.

Решение

Воспользуемся следующей формулой, описывающей дифракцию Фраунгофера:

$$U(P) = \frac{K_u U_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} dS_n \quad (1)$$

где \vec{k} и \vec{k}' – волновые векторы падающего и дифрагированного света; R_0 – расстояние от отверстия до точки наблюдения; U_0 – амплитуда поля на отверстии; K_u – продольная составляющая волнового вектора падающей волны (проекция \vec{k} на направление ортогональна плоскости, в которой находится отверстие, или $K_u = K \cos \alpha$, где α – угол падения первичной волны на отверстие).

Введем цилиндрическую систему координат $(r; \varphi; z)$ с осью z , проходящей через центр кольца, перпендикулярно к его плоскости. Тогда, обозначая через θ угол дифракции, имеем

$$\begin{aligned} \vec{k} &= k \vec{e}_z; \vec{k}' = k_z \vec{e}_z + k_r \vec{e}_r = K (\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_r) \approx K \vec{e}_z + K \theta \vec{e}_r \\ \vec{r} &= r \vec{e}_r; (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} = -K \theta r \cos \varphi; (\cos \varphi = \cos(\vec{e}_r, \vec{e}_{\vec{r}})) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь следует учесть малость угла дифракции ($|\theta| \ll 1$), а также предположим, что ось x направлена вдоль $K \theta \vec{e}_r$ и от этого вектора отсчитывается азимутальный угол φ , подставим (2) в (1), и, учитывая, что $dS_n = r d\varphi dr$, $k_n = k$, проведём интегрирование по всей площади кольца:

$$\begin{aligned} U(P) &= -i \frac{k U_0 e^{ikR_0}}{2\pi R_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta r \cos \varphi} r d\varphi dr = -i \frac{U_0 e^{ikR_0}}{R_0} \frac{r I_1(kr\theta)}{\theta} \Big|_a^b = \\ &= -i \frac{U_0 e^{ikR_0}}{R_0} \frac{b I_1(kb\theta) - a I_1(ka\theta)}{\theta} \end{aligned} \quad (3)$$

Интенсивность света, дифрагировавшего в элемент телесного угла $d\lambda$:

$$dI = |U(P)|^2 R_0^2 d\lambda = |U_0|^2 \frac{b I_1(K\theta b) - a I_1(K\theta a)}{\theta^2} d\lambda = I_0 \frac{b I_1(K\theta b) - a I_1(K\theta a)}{\theta^2} \quad (4)$$

где $I_0 = |U_0|^2$ – интенсивность падающего света. В случае круглого отверстия вместо (3) имеем:

$$U(P) = -i \frac{kU_0 e^{ikR_0}}{2\pi R_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ik\theta r \cos\varphi} r d\varphi dr = -i \frac{U_0 e^{ikR_0}}{R_0} \frac{r I_1(K\theta r)}{\theta} \Big|_0^a = -i \frac{U_0 e^{ikR_0}}{R_0} \frac{a I_1(K\theta a)}{\theta} \quad (5)$$

находим угловое распределение интенсивности дифрагированного на круглом отверстии света:

$$dI = |U(P)|^2 R_0^2 d\lambda = |U_0|^2 \frac{a^2 I_1^2(K\theta a)}{\theta^2} d\lambda = I_0 \frac{I_1^2(K\theta a)}{\pi\theta^2} \quad (6)$$

где
$$I_0 = |U_0|^2 \pi a^2 \quad (7)$$

– полная интенсивность падающего на отверстие света.

При получении выражений (3) и (5) были использованы следующие формулы из теории бесселевых функций:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos\varphi} d\varphi = I_0(x); \quad \int x I_0(x) dx = x I_1(x); \quad I_0(-x) = I_0(x) \quad (8)$$

Задача 476. [2]

Найти угловое распределение интенсивности света dI при наклонном падении параллельного пучка на круглое отверстие (дифракция Фраунгофера).

Решение

Как и в предыдущей задаче воспользуемся формулой

$$U(P) = \frac{K_u U_0 e^{ikR_0}}{2\pi\nu R_0} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} dS_n \quad (1)$$

Введём цилиндрическую систему координат $(r; \varphi; z)$ с осью z , проходящей через центр круглого отверстия, обозначим угол падения через θ (он может быть произвольным $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), а угол дифракции – через α .

Данный угол α между векторами $\vec{k} - \vec{k}'$, поскольку $k' = k$, определяется выражением

$$\begin{aligned} (\vec{k} - \vec{k}')^2 &= k^2 + k'^2 - 2(\vec{k}, \vec{k}') = k^2 + k^2 - 2k^2 \cos^2 \alpha = 2k^2(1 - \cos \alpha) \approx \\ &\approx 2k^2 \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right) = k^2 \alpha^2 \end{aligned}$$

обозначим данный вектор через \vec{q} , тогда: $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$; $q = k\alpha$ (2)

представим q в виде: $\vec{q} = \vec{q}_u + \vec{q}_1$ (3)

где \vec{q}_u и \vec{q}_1 – составляющие вектора \vec{q} в направлении, перпендикулярном экрану (\vec{q}_1) и в плоскости экрана (\vec{q}_u).

С учётом представления (3), показатель экспоненты (1) запишется в виде

$$(\vec{k} - \vec{k}') \vec{r} = \vec{q} \vec{r} = \vec{q}_u \vec{r} \quad (4)$$

Направив ось ox вдоль вектора \vec{q}_u , из (4) имеем:

$$(\vec{k} - \vec{k}') \vec{r} = q_u r \cos \varphi \quad (5)$$

подставляя в (1) выражение (5), а также $K'' = K \cos \theta$;

$dS_n = r d\varphi dr$, получим (используя формулу (8) из предыдущей задачи)

$$\begin{aligned} U(P) &= -i \frac{U_0 e^{ikR_0} K \cos \theta}{2\pi R_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{iq_u r \cos \varphi} r d\varphi dr = -i \frac{U_0 e^{iKR_0} K \cos \theta}{R_0} \int_0^a I_0(q_u r) r dr = \\ &= -i \frac{U_0 e^{ikR_0} K \cos \theta}{R_0} \frac{a I_1(q_u a)}{q_u} \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью (6) вычислим интенсивность света, дифрагировавшего в элемент телесного угла $d\lambda$:

$$dI = |U(P)|^2 R_0^2 dr = |U_0|^2 k^2 \cos^2 \theta \frac{a^2 I_1^2(q'' a)}{q''^2} d\lambda = I_0 \quad (7)$$

бесконечно тонком экране нормально к его плоскости. Определите поле излучения из отверстия и угловое распределение интенсивности излучения dI .

Решение

Воспользуемся формулой

$$\vec{E}(P) = -\frac{ik}{4\pi R} \int \left\{ \left[\vec{n}_0, \vec{H} \right] - \vec{n} \left(\vec{n}, \left[\vec{n}_0, \vec{H} \right] \right) + \vec{n} \left(\vec{n}, \left[\vec{n}_0, \vec{E} \right] \right) \right\} e^{i\vec{k}\vec{r}} dS \quad (1)$$

Направив оси x, y и z соответственно, вдоль электрического \vec{E}_0 ; магнитного \vec{H}_0 и волнового \vec{k} векторов падающей волны. Тогда комплексные амплитуды векторов электрического и магнитного поля этой волны будут иметь вид

$$\vec{E}_0 = E_0 e^{-i\omega t + \nu k z} \vec{e}_x; \quad \vec{H}_0 = E_0 e^{-i\omega t + \nu k z} \vec{e}_y \quad (2)$$

(Здесь учтено, что линейно поляризованная волна распространяется в вакууме вдоль оси z , и, поэтому в соответствии с уравнениями Максвелла $rot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$; $rot \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, при подстановке в них выражений $\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t + ik\vec{r}}$; $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t + \nu k\vec{r}}$ получим, что амплитуды электрического и магнитного векторов совпадают: $H_0 = E_0; a\omega = kc$)

Поскольку вдали (в волновой зоне) дифрагированная волна в точке P будет искать в сферической системе координат (r, θ, φ) .

Для этого положим $\vec{n} = \vec{e}_r; \vec{k}' = k\vec{e}_r; \vec{R} = R\vec{e}_r; \vec{k}'\vec{R} = kR$ (3)

Полагая $\vec{n}_0 = \vec{e}_z$ и учитывая формулы, связывающие орты декартовой (поскольку первичная волна плоская – обладает декартовой симметрией) и сферической (т.к. вторичная волна в волновой зоне обладает сферической симметрией) систем координат, распишем выражение, которое находится в фигурных скобках в правой части (1), подставляем (2) при $z = 0$.

$$[\vec{n}_0, \vec{H}] = E_0 [\vec{e}_z, \vec{e}_y] = -E_0 \vec{e}_x = -E_0 (\sin\theta \cos\varphi \vec{e}_r + \cos\theta \cos\varphi \vec{e}_\theta - \sin\varphi \vec{e}_\varphi) \quad (4)$$

(здесь и далее временной множитель $e^{-i\omega t}$ для краткой записи будем опускать (считаем, что входит в E_0)).

$$(\vec{n}, [\vec{n}_0, \vec{H}]) = -E_0 (\vec{e}_r, \vec{e}_x) = -E_0 \sin\theta \cos\varphi$$

$$\vec{n}(\vec{n}, [\vec{n}_0, \vec{H}]) = -E_0 \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_r \quad (5)$$

$$[\vec{n}_0, \vec{E}] = E_0 [\vec{e}_z, \vec{e}_x] = E_0 \vec{e}_y = E_0 (\sin\theta \sin\varphi \vec{e}_r + \cos\theta \sin\varphi \vec{e}_\theta + \cos\varphi \vec{e}_\varphi) \quad (6)$$

$$[\vec{n}, [\vec{n}_0, \vec{E}]] = E_0 (\cos\theta \sin\varphi \vec{e}_\varphi - \cos\varphi \vec{e}_\theta) \quad (7)$$

используя (5)-(7), имеем:

$$[\vec{n}_0, \vec{H}] - \vec{n}(\vec{n}, [\vec{n}_0, \vec{H}]) + [\vec{n}, [\vec{n}_0, \vec{E}]] = -E_0 (\sin\theta \cos\varphi \vec{e}_r + \cos\theta \cos\varphi \vec{e}_\theta - \sin\varphi \vec{e}_\varphi) + E_0 \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_r + E_0 (\cos\theta \sin\varphi \vec{e}_\varphi - \cos\varphi \vec{e}_\theta) = -E_0 \{ (1 + \cos\theta) \cos\varphi \vec{e}_\theta - (1 + \cos\theta) \sin\varphi \vec{e}_\varphi \}$$
 отсюда получаем.

$$[\vec{n}_0, \vec{H}] - (\vec{n}, [\vec{n}_0, \vec{H}]) + [\vec{n}, [\vec{n}_0, \vec{E}]] = -E_0 (1 + \cos\theta) (\cos\varphi \vec{e}_\theta - \sin\varphi \vec{e}_\varphi) \quad (8)$$

Поскольку отверстие аксиально симметрично, вычисление интеграла в (1) удобно провести в полярной системе координат $(r; \varphi)$. Если радиус-вектор произвольного элемента отверстия $dS = r' d\varphi' dr'$, $\vec{r}' = r' \vec{e}_{r'}$; то входящий в (1) радиус-вектор, идущий от этого элемента к точке наблюдения можно представить в виде

$$\vec{r} = \vec{R} - \vec{r}' = R \vec{e}_r - r' \vec{e}_{r'} \quad (9)$$

(Заметим, что здесь \vec{e}_r и $\vec{e}_{r'}$ – орты двух разных систем координат сферической и цилиндрической соответственно). Тогда показатель в экспоненте, учитывая (3) и выражение для волнового вектора дифрагированной волны в цилиндрической системе координат

$$\vec{k}' = k \sin \theta \vec{e}_r + k \cos \theta \vec{e}_z \quad (10)$$

$$\text{запишется в виде: } \vec{k}' \vec{r} = \vec{k}' \vec{R} - \vec{k}' r' \vec{e}_{r'}, = kR - kr' \sin \theta \cos \alpha, \quad (11)$$

где $\cos \alpha = \cos(\vec{e}_r, \vec{e}_{r'})$; α – угол между вертикальными плоскостями, определяемыми векторами \vec{K}' и \vec{r}' соответственно.

Подставляя (8) и (11) в (1) и учитывая, что направления векторов \vec{n} и \vec{R} , а, следовательно, и углы θ и φ являются заданными, и от переменных интегрирования не зависят, получим:

$$\vec{E}(P) = \frac{ik(1 + \cos \theta (\cos \varphi \vec{e}_\theta - \sin \varphi \vec{e}_\varphi)) E_0}{4\pi R} e^{ikR} \int_0^{a/2} \int_0^{2\pi} e^{-ikr' \sin \theta \cos \alpha} r' d\varphi' dr' \quad (12)$$

В показателе экспоненты в (12) от переменных интегрирования зависят r' и α – угол между заданным вектором \vec{e}_r и вектором $\vec{e}_{r'}$, который при интегрировании по φ' поворачивается относительно \vec{e}_r , делая полный оборот вокруг начала координат на угол 2π . Поэтому проведем в (12) заменим интегрирование по φ' интегрированием по α и рассмотрим отдельно интегралы, входящие в (12)

$$\int_0^{2\pi} e^{-ikr' \sin \theta \cos \alpha} d\alpha = 2\pi I_0(kr' \sin \theta) \quad (13)$$

Здесь использовали известные формулы из теории бесселевых функций: их интегральные представления

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi \quad (x = -kr' \sin \theta) \quad (14)$$

а также четность функции $I_0(-x) = I_0(x)$, последующее интегрирование по r' , выражение (13) даёт

$$2\pi \int_0^a I_0(kr' \sin\theta) r' dr' = \frac{r' I_1(k \sin\theta r')}{k \sin\theta} \Big|_0^a 2\pi = \frac{2\pi a I_1(k \sin\theta a)}{k \sin\theta} \quad (15)$$

Здесь использовали формулу

$$\int x I_0(x) dx = x I_1(x) \rightarrow \int x I_0(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha^2} \int (\alpha x) I_0(\alpha x) d(\alpha x) = \frac{x I_1(\alpha x)}{\alpha} \quad (16)$$

где $\alpha = k \sin\theta$. Подставляем (15) в (12)

$$\vec{E}(P) = \frac{i k a E_0}{2} \frac{e^{i k R}}{R} \frac{I_1(k \sin\theta)}{k \sin\theta} (\cos\varphi \vec{e}_\theta - \sin\varphi \vec{e}_\varphi) (1 + \cos\theta) \quad (17)$$

Вычисляем магнитное поле (учитывая, что $\vec{n} = \vec{e}_r$):

$$\vec{H}(P) = [\vec{n}, \vec{E}(P)] = \frac{i k a E_0}{2} \frac{e^{i k R}}{R} \frac{I_1(k \sin\theta)}{k \sin\theta} (\cos\varphi \vec{e}_\varphi + \sin\varphi \vec{e}_\theta) (1 + \cos\theta) \quad (18)$$

Сравнивая (17) и (18) получаем следующее выражение для компонент поля

$$\begin{aligned} E_\theta = H_\varphi &= \frac{i k a^2 E_0}{2} \frac{e^{i k R}}{R} \left(\frac{I_1(k \sin\theta)}{k \sin\theta} \right) (1 + \cos\theta) \cos\varphi \\ E_\varphi = -H_\theta &= -\frac{i k a^2 E_0}{2} \frac{e^{i k R}}{R} \left(\frac{I_1(k \sin\theta)}{k \sin\theta} \right) (1 + \cos\theta) \sin\varphi \end{aligned} \quad (19)$$

Вычислим среднюю плотность потока энергии рассеянной волны

$$\bar{\gamma} = \frac{c}{8\pi} (E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^*) = \frac{c}{8\pi} \frac{a^2 E_0^2}{4R^2} \left(\frac{I_1(k \sin\theta)}{\sin\theta} \right)^2 (1 + \cos\theta)^2 \quad (20)$$

тогда угловое распределение интенсивности излучения

$$dI = \bar{\gamma} R^2 d\lambda = \frac{1}{4} I_0 \left(\frac{I_1(k \sin\theta)}{\sin\theta} \right)^2 (1 + \cos\theta)^2 d\lambda, \quad (21)$$

где

$$I_0 = \bar{\gamma}_0 S = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \pi a^2 = \frac{c a^2}{8} E_0^2 \quad (22)$$

– полная интенсивность волны, падающей на отверстие.

ГЛАВА 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЗОН ФРЕНЕЛЯ И СПИРАЛИ ФРЕНЕЛЯ В ЗАДАЧАХ ШКОЛЬНОГО КУРСА ФИЗИКИ

В школьном курсе физики теория дифракции достаточно подробно рассматривается в 11 классе с углубленным изучением физики [8]. При её изучении в школьном курсе физики более подробно можно остановиться на зонах Френеля и построении векторной диаграммы (спирали Френеля), а также их использовании при решении задач.

Исследование дифракции получило дальнейшее развитие в работе французского ученого Огюста Жана Френеля. Он рассмотрел на опыте различные случаи дифракции, а также смог построить количественную теорию дифракции. С помощью данной теории становится возможным произвести расчет дифракционной картины, которая возникает в результате огибания светом разнообразных препятствий. В основу теории Френель положил принцип Гюйгенса, объединив его с идеей об интерференции вторичных волн. Гипотеза Гюйгенса об огибающей вторичных волн была заменена Френелем физически ясным положением, согласно которому вторичные волны, приходя в точку наблюдения, будут интерферировать друг с другом.

Чтобы объяснить различные особенности дифракционных картин на простых объектах Френель рассмотрел простой и наглядный метод группировки вторичных источников – метод построения зон Френеля. Этот метод позволяет приближенным способом рассчитывать дифракционные картины.

Рассмотрим попадание света, испускаемого точечным источником A , в произвольную точку пространства B (Рис. 4.1).

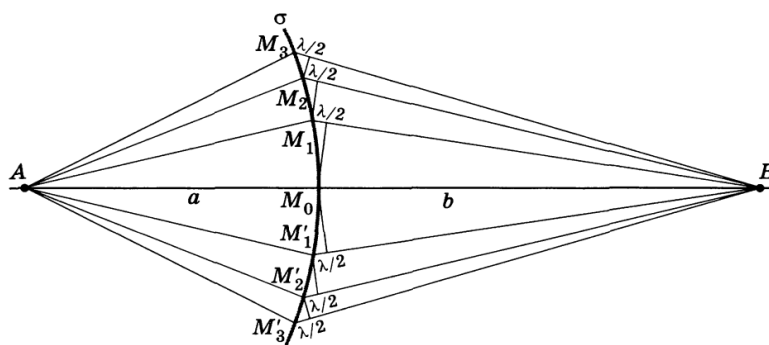


Рисунок 4.1. Распространение световой волны от точечного источника A

Построим вокруг источника A сферическую поверхность σ радиусом a ($a \gg \lambda$). Расстояние от точки B до ближайшей точки M_0 на поверхности σ выразим через b ($b \gg \lambda$). Амплитуды и фазы колебаний от всех вторичных источников на поверхности сферы будут одинаковыми.

Волновую поверхность σ необходимо разбить на m кольцевых зон таким образом, чтобы расстояния от краев соседних зон до точки B отличались на $\frac{\lambda}{2}$ (Рис. 4.2). Данное разбиение зон имеет преимущество в том, что для соответствующих точек соседних зон разность хода будет равна $\frac{\lambda}{2}$ и вторичные волны от них, которые встречаются в точке B, ослабляют друг друга.

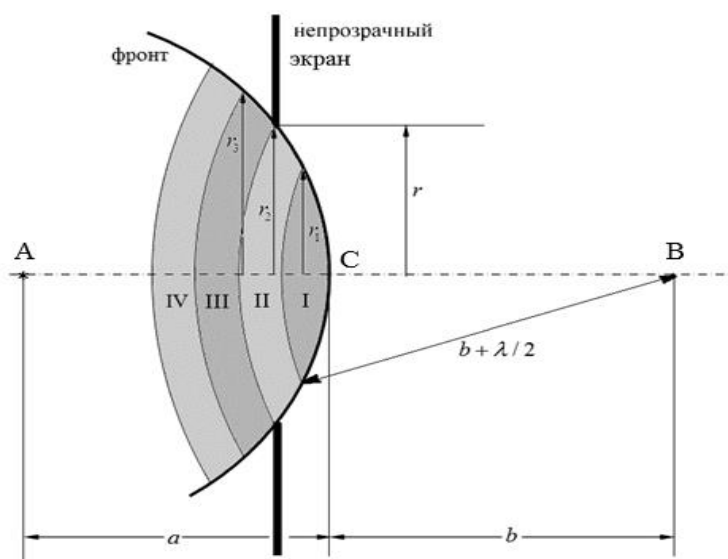


Рисунок 4.2. Разбиение волновой поверхности на кольцевые зоны

Вычислим радиусы зон Френеля при заданных расстояниях (от источника A до экрана) и b (от экрана до приемника B) опустим перпендикуляр M_1C на прямую AB (Рис. 4.3). Обозначим через x_1 расстояние CM_0 . Радиус первой зоны Френеля $CM_1 = r_1$. Применяя теорему Пифагора, получаем:

$$r_1^2 = a^2 - (a - x_1)^2 = (b + \frac{\lambda}{2})^2 - (b + x_1)^2 \quad (1)$$

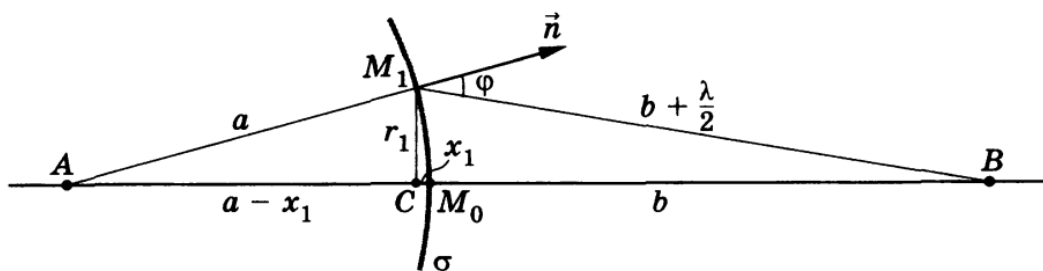


Рисунок 4.3. К выводу формулы для радиуса зон Френеля

Поскольку $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$, то x_1 приближенно равно

$$x_1 = \frac{b\lambda}{2(a+b)} \quad (2)$$

Радиус первой зоны Френеля

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}} \quad (3)$$

Таким же образом можно выполнить вычисление расстояния x_m для произвольной m -ой зоны Френеля и радиуса произвольной зоны r_m

$$x_m = \frac{b\lambda m}{2(a+b)}, \quad r_m = \sqrt{\frac{ab\lambda m}{a+b}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Площадь первой зоны Френеля – это площадь сферического сегмента

$$\sigma_1 = 2\pi a x_1 = \frac{\pi a b \lambda}{a+b} \quad (5)$$

Площадь второй зоны выражается через разность площадей

$$\sigma_2 = 2\pi a x_2 - \sigma_1 = \frac{\pi a b \lambda}{a+b} = \sigma_1 \quad (6)$$

Продолжая далее, получаем, что площадь m -ой зоны Френеля не зависит от номера зоны, значит, площади всех зон Френеля одинаковы.

Предположим, что первая зона Френеля в точке B создает колебания с амплитудой s_1 , вторая – с амплитудой s_2 и т.д. Необходимо принять еще одно допущение, заключающееся в том, что амплитуда колебаний в точке B монотонно убывает по мере увеличения угла φ между нормалью \vec{n} к поверхности σ и направлением в точку B (Рис. 4.3). Таки образом,

$$s_1 > s_2 > s_3 \dots \quad (7)$$

Для больших номеров зон m амплитуда колебаний от вторичных источников в точке B будет пренебрежимо мала.

Разность хода волн от соседних зон равна $\frac{\lambda}{2}$, что идет в соответствие с разностью фаз колебаний π . Результирующая амплитуда колебаний запишется следующим образом

$$s = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots \quad (8)$$

При разделении амплитуды от нечетных зон на равные части данное выражение будет записано в виде

$$s = \frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{s_3}{2} \right) + \left(\frac{s_3}{2} - s_4 + \frac{s_5}{2} \right) + \dots \quad (9)$$

Будем считать, что в связи с монотонностью убывания амплитуды выполняется следующее равенство:

$$s_m = \frac{s_{m-1} + s_{m+1}}{2} \quad (10)$$

Тогда выражения, находящиеся в скобках в (9), равны нулю. Таким образом, результирующая амплитуда будет равна

$$s = \frac{s_1}{2} \pm \frac{s_m}{2} \quad (11)$$

Дифракционная картина имеет вид чередующихся темных и светлых колец с центром в точке B . Если число зон m – нечетное, то центральное кольцо будет светлым (Рис. 4.4.а), если четное – темным (Рис. 4.4.б).

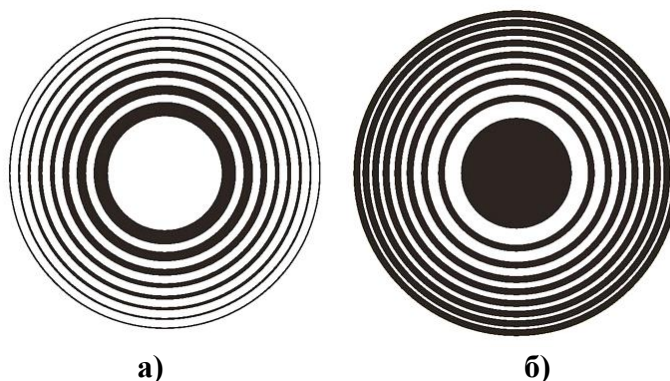


Рисунок 4.4. Дифракционная картина

Светлое пятно в центре экрана будет наблюдаться в случае, когда между точечным источником света и точкой наблюдения находится круглый непрозрачный диск (данное явление будет обосновано позднее) (Рис. 4.5). Это пятно называется пятном Пуассона.

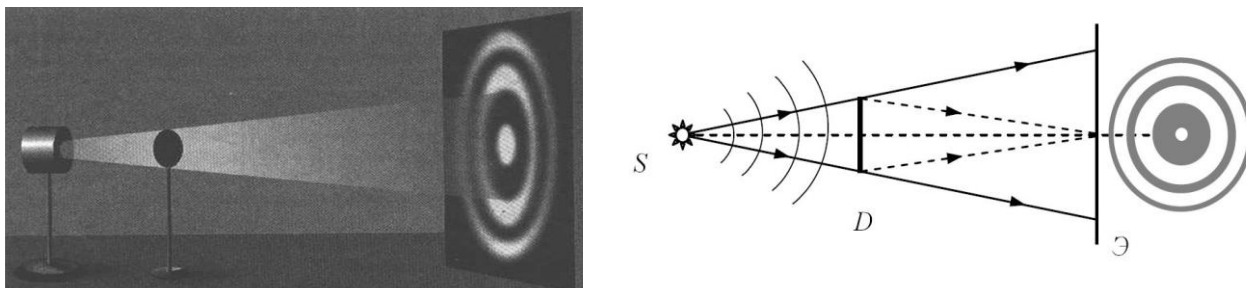


Рисунок 4.5. Пятно Пуассона

Часто вместо круглого диска в опытах используют маленький шарик (Рис. 4.6).

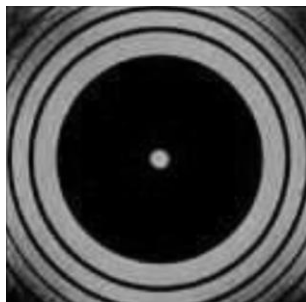


Рисунок 4.6. Дифракционная картина от небольшого шарика

Если пренебречь действием далекой нечетной зоны в (11), выражение для результирующей амплитуды будет иметь вид

$$s = \frac{s_1}{2} \quad (12)$$

Таким образом, результирующая амплитуда колебаний в точке B примерно равна половине амплитуды колебаний, создаваемой центральной зоной Френеля (но не равна амплитуде колебаний от половины зоны). (Данный результат несколько иначе будет обоснован позднее)

Хорошим доказательством соответствия рассуждений Френеля реальным процессам являются опыты с зонной пластинкой.

Под зонной пластинкой понимается прозрачный экран с чередующимися светлыми и темными кольцами (Рис. 4.7.а). Радиусы колец выбираются таким образом, чтобы при данных λ , a и b кольца закрывали все четные (или нечетные) зоны, оставляя открытыми нечетные (или четные) (Рис. 4.7.б). На рисунке 4.7.а, например, показана зонная пластинка, закрывающая нечетные зоны.

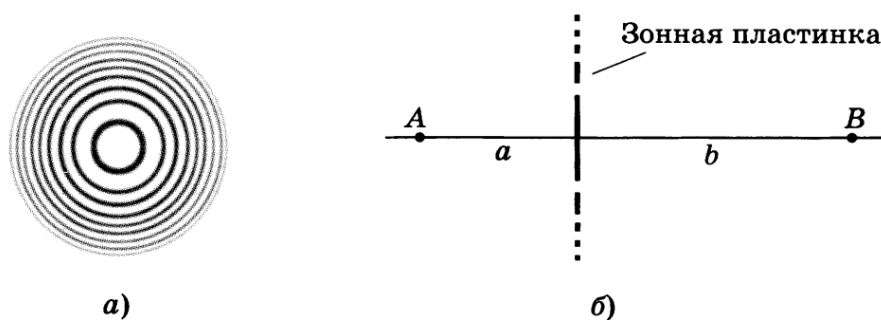


Рисунок 4.7. Зонная пластинка Френеля

Результирующая амплитуда колебаний в точке B будет равна

$$s = s_1 + s_3 + s_5 + \dots \quad (13)$$

Таким образом, при использовании зонной пластинки в точке наблюдения происходит резкое увеличение интенсивности света.

Пластинка фокусирует световые лучи словно линза. Зонную пластинку можно использовать для фокусировки рентгеновских лучей, которые практически не преломляются веществом. С помощью таких пластинок разработаны рентгеновские микроскопы, которые намного превышают по разрешающей способности обычные оптические.

Опыт с зонной пластинкой можно продемонстрировать учащимся. Изготовить ее несложно: необходимо нарисовать в крупном масштабе на листе ватмана ряд концентрических окружностей (не менее тридцати) с радиусами, которые задаются формулой

$$r_m = \sqrt{\frac{ab\lambda m}{a+b}} \quad (14)$$

Далее нужно закрасить зоны через одну (для рис. 4.7.а – нечетные для изготовления негатива) и сфотографировать их с помощью фотоаппарата с разных расстояний. Полученные негативы будут являться зонными пластинками. (Для опытов понадобятся пластинки с внешним диаметром 2-7 мм) [9]

Для более наглядной оценки результатов интерференции волн от зон Френеля можно воспользоваться методом построения векторной диаграммы (спирали Френеля). Она является удобной для использования при сложении колебаний с одинаковыми частотами, различающихся по амплитуде и фазе. Следует помнить, что при построении векторной диаграммы амплитуда результирующего колебания равна векторной сумме амплитуд складываемых колебаний, а углы между векторами будут равны разности фаз колебаний.

При сложении когерентных световых колебаний необходимо каждую зону Френеля разбить на кольцевые участки, аналогичные зонам Френеля, но гораздо меньшей ширины (при этом фазы колебаний вторичных источников одного участка можно считать постоянными). Тогда действие каждого участка можно изобразить вектором, длина которого дает суммарную

амплитуду, а направление определяет фазу колебания, обусловленного данным участком. Амплитуды колебаний от одного участка будут выражаться малым вектором $\overrightarrow{\Delta s_i}$. Необходимо учитывать, что амплитуды колебаний в точке B (Рис. 4.1) от отдельных участков зоны будут немного различаться ввиду малого различия в углах наклона участков по отношению к направлению на точку B .

Фазы колебаний постепенно изменяются от участка к участку, колебания от крайних участков зоны будут различаться по фазе на π , поскольку разность хода от этих участков равна $\frac{\lambda}{2}$.

На рисунке 4.8.а изображена векторная диаграмма колебаний в точке B от центральной зоны Френеля. Вектор $\overrightarrow{OM_1}$ ($|\overrightarrow{OM_1}| = s_1$) представляет амплитуду результирующих колебаний. Спираль Френеля является близкой к полуокружности. Если бы амплитуды колебаний от всех участков зоны в точке B были одинаковы, то векторная диаграмма представляла бы половину окружности, а амплитуда результирующих колебаний была бы равна диаметру данной окружности.

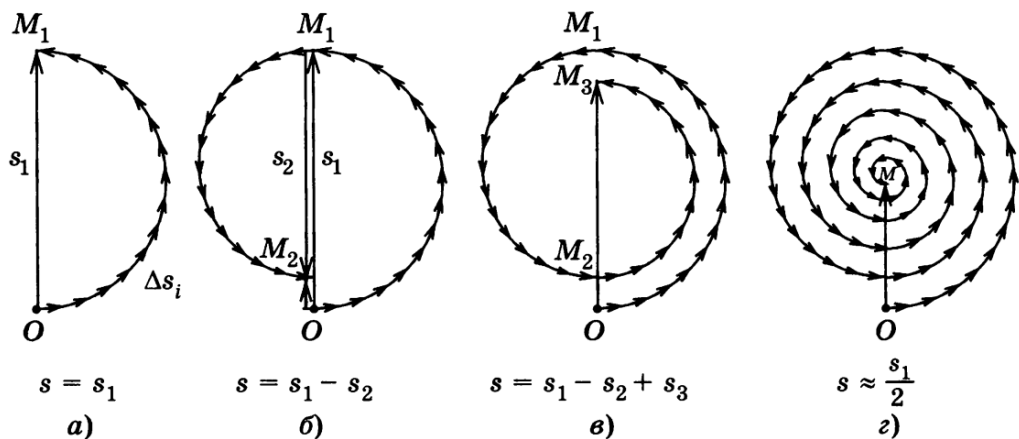


Рисунок 4.8. Спираль Френеля

Для того чтобы учесть действие второй зоны Френеля, необходимо продолжить построение векторной диаграммы (Рис. 4.8.б). В данном случае

амплитуда результирующих колебаний представлена вектором \overline{OM}_2 . На рисунке 4.8.в изображено действие трех зон Френеля. Продолжая построение, будем иметь векторную диаграмму действий всей волны в виде спирали, закручивающейся к точке M (Рис. 4.8.г). Результирующая амплитуда колебаний при сложении колебаний от всех зон Френеля изобразится вектором \overline{OM} , модуль которого равен $\frac{s_1}{2}$.

Из рисунка (Рис 4.8.г) можно увидеть, что вектор \overline{OM} равен примерно половине длины вектора \overline{OM}_1 , представляющего действие первой зоны Френеля, а также совпадает с ним по направлению. Таким образом, колебание в точке B , обусловленное действием всего волнового фронта, совпадает по фазе с колебанием, которое создает центральная зона, а его результирующая амплитуда составляет примерно половину амплитуды этого колебания.

С помощью спирали Френеля можно оценить результат дифракции на круглом отверстии или круглом экране в центре дифракционной картины и в других случаях. Спираль Френеля часто помогает существенно упростить решение задач по дифракции света на круглых отверстиях и дисках.

Задача 824. [3]

Вычислить радиусы зон Френеля сферической волны для точки B , отстоящей от фронта волны на расстояние $b \gg \lambda$, где λ – длина волны источника.

Решение

В случае если источник света бесконечно удален от точки наблюдения B ($a \rightarrow \infty$), то волновой фронт можно представить в виде плоскости, перпендикулярной прямой от источника света до точки наблюдения B (Рис. 4.9).

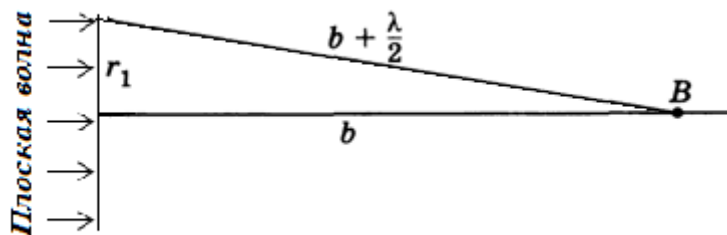


Рисунок 4.9. Распространение света для плоской волны

Выразим радиус первой зоны Френеля r_1 . Применяя теорему Пифагора, запишем

$$r_1^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2 \quad (1)$$

По условию задачи $b \gg \lambda$, поэтому выражение для радиуса первой зоны Френеля r_1 запишется следующим образом

$$r_1 = \sqrt{b\lambda} \quad (2)$$

Искомые радиусы зон Френеля будут иметь вид

$$r_m = \sqrt{bm\lambda}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Задача 825. [3]

Точечный источник монохроматического света длины волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ находится на расстоянии $a = 6,75 \text{ м}$ от ширмы с отверстием диаметра $D = 4,5 \text{ мм}$. На расстоянии $b = a$ от ширмы расположен экран (Рис. 4.10). Как измениться освещенность в точке B экрана, лежащей на оси пучка, если диаметр отверстия увеличить до $D_1 = 5,2 \text{ мм}$?

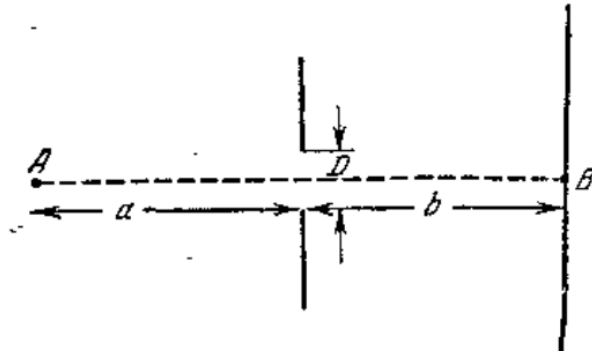


Рисунок 4.10. Схема расположения источника, ширмы и экрана

Решение

Чтобы решить данную задачу, необходимо подсчитать число m зон Френеля, которые укладываются в отверстия ширмы диаметров D и D_1 .

Воспользуемся формулой радиуса r_m произвольной m -ой зоны Френеля

$$r_m = \sqrt{\frac{ab\lambda m}{a+b}} \quad (1)$$

Согласно условию задачи $r_m = \frac{D}{2}$. Выразим из (1) число зон m , которые укладываются в отверстие диаметром D

$$m = \frac{D^2(a+b)}{4ab\lambda} \quad (2)$$

Аналогично найдем выражение для числа зон Френеля m_1 , укладываемых в отверстие диаметром D_1

$$m_1 = \frac{D_1^2(a+b)}{4ab\lambda} \quad (3)$$

Производя вычисления, получаем

$$m = \frac{(4,5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (6,75 + 6,75)}{4 \cdot 6,75 \cdot 6,75 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 3$$

$$m_1 = \frac{(5,2 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (6,75 + 6,75)}{4 \cdot 6,75 \cdot 6,75 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 4 \quad (4)$$

Нечетному числу зон соответствует максимум освещенности, так как в данном случае колебания от третьей и второй зон Френеля, которые идут в

противофазе, ослабят друг друга, а свет от первой зоны будет проходить полностью, таким образом, в точке B получим максимум освещенности.

Если увеличить диаметр отверстия, то в точку B придут волны от четырех зон Френеля. Они попарно ослабят друг друга, и в точке B будет наблюдаться минимум освещенности.

Таким образом, увеличение диаметра отверстия приведет к уменьшению освещенности в точке B .

Задача 829. [3]

Показать, что за круглым экраном C в точке B (Рис. 4.11) будет наблюдаться светлое пятно, если размеры экрана достаточно малы.

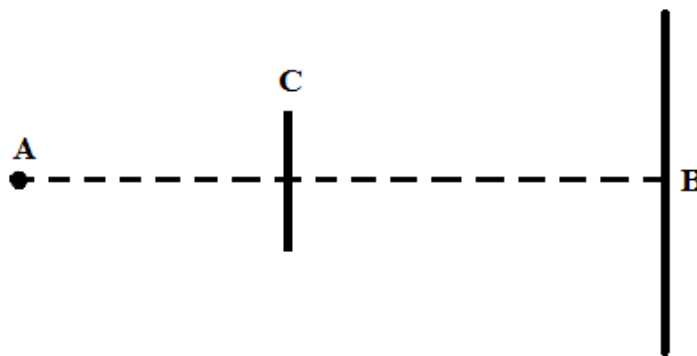


Рисунок 4.11. Препятствие в виде круглого экрана

Решение

Чтобы рассчитать интенсивность света в точке наблюдения B необходимо использовать метод зон Френеля. Колебания от крайних участков зоны будут различаться по фазе на π , так как разность хода от этих участков равна $\frac{\lambda}{2}$.

При разбиении зоны на равные по площади кольцевые подзоны действие каждой подзоны можно представить в виде вектора амплитуды \vec{s}_i , то сумма векторов \vec{s}_i всех подзон будет выражать результирующий вектор

амплитуды зоны Френеля. Если число кольцевых зон будет неограниченно возрастать векторная диаграмма примет вид спирали (Рис 4.12.г).

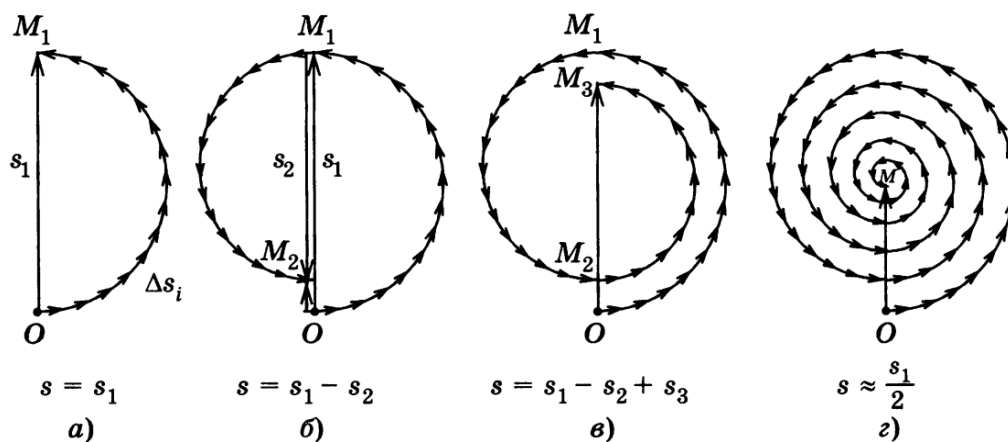


Рисунок 4.12. Спираль Френеля

Запишем выражение для результирующей амплитуды колебаний

$$s = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \dots \quad (1)$$

При разделении амплитуды от нечетных зон на равные части получим

$$s = \frac{s_1}{2} + \left(\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{s_3}{2} \right) + \left(\frac{s_3}{2} - s_4 + \frac{s_5}{2} \right) + \dots \quad (2)$$

Учитывая монотонность убывания амплитуды, запишем

$$s_m = \frac{s_{m-1} + s_{m+1}}{2} \quad (3)$$

Выражения, которые находятся в скобках в (2), равны нулю.

Если размеры экрана C достаточно малы, то результирующая амплитуда выразится следующим образом

$$s = \frac{s_1}{2} \quad (4)$$

Дифракционная картина представляет вид чередующихся темных и светлых колец с центром в точке B (если число зон m – четное, то центральное кольцо будет темным, если нечетное – светлым). В данном случае в центре дифракционной картины будет находиться светлое пятно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Строгое решение задач дифракции с чисто математической точки зрения является очень сложной задачей. Несмотря на то, что начиная еще с 18 века, много известных учёных направляли свои усилия на изучение этого явления, было найдено точное решение только нескольких дифракционных задач, относящихся главным образом к двумерным структурам.

Невозможность получения точного аналитического решения во многих задачах дифракции привело ученых к необходимости разработки так называемых «эвристических методов» решения данных задач, общие теоретические положения и методику использования которых мы и рассматривали в настоящей дипломной работе. При этом, вначале был сделан краткий обзор эвристических методов теории дифракции; далее рассмотрен метод зон Френеля и методика его использования для вычисления интенсивности дифрагированного света; в конце на примере решения ряда задач было рассмотрено применение интегральных дифракционных формул (метод интеграла Кирхгофа) для расчета дифрагированного поля.

Представленный в работе материал может быть использован как при изучении отдельных тем общего курса физики «Оптика», так и при чтении соответствующего спецкурса по электродинамике (электромагнитные колебания и волны) при проведении аудиторных занятий, а также для организации самостоятельной работы со студентами факультета МФиИ ТГПУ им. Л.Н. Толстого. В школьном курсе физики материал дипломной работы, указанный в 4 главе, может быть использован в 11 классе с углубленным изучением физики в качестве дополнительного материала, а также в работе факультативных занятий по физике и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С. А. Физическая оптика: учебное пособие. – М.: МГУ Наука, 2004. – 654 с.
2. Батыгин В. В. Сборник задач по электродинамике. – М.: «РХД», 2002. – 631 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ, 1973. – 720 с. URL: <http://lib.mexmat.ru/books/103645> (дата обращения: 14.02.2020)
4. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
5. Быков А. В. Оптика. Методика решения задач. – М.: Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010. – 591с.
6. Васильев А. Э. Физика. Оптика. – СПбГТУ, 1999. – 763с.
7. Иродов И. Е. Задачи по общей физике. Учеб. пособие для вузов. – 4-е изд. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 432 с.
8. Мякишев Г. Я. Синяков А. З. Физика: Оптика. Квантовая физика. 11 кл.: Учеб. для углубленного изучения физики. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 2002. – 464 с.
9. Насретдинов А. Опыты с пластинкой Френеля // Квант. — 1992. — № 4. — С. 47 – 49. URL: http://kvant.mccme.ru/1992/04/opyty_s_plastinkoj_frenelya.htm (дата обращения: 08.05.2020)
10. Панин В.А., Бобылев Ю.В., Паршкова Т.Г. Об изучении дифракции электромагнитных волн в курсах общей и теоретической физики в педагогическом вузе. Новации и традиции в преподавании физики: от школы до вуза: Материалы VI Междунар. науч.-практ. конф. – 2020. – в печати
11. Потехин А. И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. – М.: Электронная библиотека механико-математического факультета

МГУ, 1948. – 134 с. URL: <http://lib.mexmat.ru/books/42774> (дата обращения: 06.02.2020)

12. Хёнл Х. М. Теория дифракции. – М.: Электронная библиотека механико-математического факультета МГУ, 1964. – 428 с. URL: <http://lib.mexmat.ru/books/6145> (дата обращения: 14.02.2020)