

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая инженерно-физическая школа

Работа допущена к защите

Директор ВИФШ

_____ В.В. Журихина

«__» _____ 20__ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

работа бакалавра

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ АМПЛИТУД ЯДЕРНОГО РАССЕЙЯНИЯ В ТЕОРИИ ГЛАУБЕРА

по направлению подготовки (специальности) – 03.03.02 «Физика»

Направленность (профиль) – 03.03.02_01 «Физика атомного ядра и элементарных частиц»

Выполнил

студент гр.3430302/70101

Халяпин А.В.

Руководители

профессор ВИФШ, д.ф. м.н.

Бердников Я.А.

с.н.с. ОТФ ПИЯФ, к.ф. м.н.

Шуваев А.Г.

Консультант

по нормоконтролю

И.Г. Голиков

Санкт-Петербург

2021

Аннотация

В настоящей работе рассматривается описание ядерных реакций в теории Глаубера, которая широко применяется для анализа взаимодействий при энергиях порядка нескольких сотен МэВ на нуклон. Она показала себя достаточно простой и эффективной при вычислениях сечений адрон-ядерного рассеяния, однако при рассеянии ядра на ядре теория Глаубера становится значительно сложной из-за резко увеличивающегося количества различных вкладов комбинаторного характера.

Данная работа посвящена новому подходу, основанному на использовании производящей функции для глауберовских амплитуд, который позволяет находить сечения рассеяния ядра на ядре, не прибегая к дополнительным приближениям. Будет показано, что с помощью вычисленной производящей функцией можно получить все вклады нуклон-нуклонного взаимодействия в амплитуду ядерного рассеяния, что дает более точный результат сечений рассеяния ядра на ядре. Работа является теоретической, ее выводы могут быть полезны для обработки большого количества экспериментальных данных. Также вычислено в качестве примера сечение реакции и полное сечение $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$.

Содержание

Введение	4
1 Теория Глаубера для упругого ядро- ядерного столкновения	7
1.1 Основные положения теории Глаубера	7
1.2 Амплитуда нуклон- ядерного рассеяния	8
1.3 Амплитуда ядро– ядерного рассеяния	10
2 Производящая функция для амплитуд ядерного рассеяния	13
2.1 Общий случай	13
2.2 Оптическое приближение	17
3 Расчет сечения реакции	22
3.1 Ядреная плотность	22
3.2 Расчет сечений	24
Заключение	26
Список используемых источников	27

Введение

Одной из задач ядерной физики является поиск параметров распределений нейтронов и протонов в стабильных и нестабильных изотопах. Практически вся информация содержится в данных по соударению частицы (электронов, мезонов, протонов или ионов) с ядром. Поэтому представляет интерес теоретическое описание процессов столкновения при высоких энергиях. Теоретическое рассмотрение ядерных столкновений не так сложно, как может представиться. При энергиях в сотни МэВ ядерная физика оказывается проще, чем при низких энергиях. Высокоэнергичная частица, проходящая через ядро, незначительно отклоняется и проходит мишень раньше, чем перестройка ядра. Энергия этой частицы намного выше, чем у внутриядерных нуклонов, и практически при ее столкновении с каким-либо нуклоном остальные являются неподвижными. В каждом акте рассеяния частица теряет малую долю своего импульса и энергии. Тут мы пренебрегаем статистически малой долей событий, при которой возможны существенные передачи импульса. В результате, большая часть происходящих событий может быть описана на языке, который используется для описания дифракционных явлений в оптике. Теория, которую мы будем здесь рассматривать является разновидностью теории оптической дифракции. В ядерной физике ей было дано много названий (эйкональное приближение, теория Глаубера и дифракционная теория). Дифракционное рассеяние в ядерной физике имеет большое сходство с дифракцией Фраунгофера, которая распространяется на многократное рассеяние [1].

В данной работе мы рассматриваем упругое столкновение, когда не происходит перестройки участников рассеяния и неупругое, когда ядро-мишень возбуждается или разваливается, но составляющие его нуклоны остаются неизменными [2]. Для стабильных ядер информация о параметрах распределения ядерной плотности исходит из данных об упругом рассеянии быстрых частиц на ядерных мишенях. Сравнение данных по упругому рассеянию электронов и протонов дает отдельную информацию о распределении протонов и нейтронов в ядре. Теория Глаубера [1,2] обычно используется для анализа экспериментов по взаимодействию с ядрами при энергиях выше нескольких сотен МэВ.

Отметим, что среднеквадратичный радиус ядра R_{rms} (найденный по экспериментально измеренному сечению) и распределение заряда могут дать информацию о потенциалах и ядерных волновых функциях. Среднеквадратичный радиус ядра в основном используется для сравнения ядер, которые описываются разными распределениями ядерной плотности.

Размер ядра описывается эффективным радиусом R_A . Для тяжелых стабильных ядер радиус зависит от массового числа A

$$R_A = 1.15A^{\frac{1}{3}}.$$

Грубая оценка полного неупругого рассеяния ядра A на ядре B задается формулой

$$\sigma_{AB}^{(r)} = \pi(R_A^{\frac{1}{3}} + R_B^{\frac{1}{3}}).$$

Это выражение было уточнено:

$$\sigma_{AB}^{(r)} = \pi R_0^2(A^{\frac{1}{3}} + B^{\frac{1}{3}} - c),$$

где $c = 1,32$ фм.

Такое приближение не годится для анализа ядер с гало. Поэтому используют, описанную выше, теорию Глаубера. Ввиду того, что рассеяние частицы происходит не на свободном нуклоне, а на связанных нуклонах, то вводят так называемый ядерный формфактор. Наличие формфактора приводит к тому, что угловое распределение интенсивности быстрых частиц сосредоточено в узком конусе. В этом случае можно пренебречь повторным рассеянием.

Поскольку исследование экспериментальных данных проводится в рамках модели Глаубера, то было бы интересно произвести точный расчет сечений. Однако аналитический расчета всех диаграмм для ядро-ядерного рассеяния сложен, поэтому используют приближенные методы, такие как оптическое приближение и приближение жесткой мишени.

Глава 1 посвящена основам теории Глаубера, где укажем условия, из которых получим сначала амплитуду для упругого нуклон- нуклонного столкновения (п.1.2), а потом амплитуду ядро- ядерного рассеяния (п.1.3).

В главе 2 предлагается вывести для амплитуды упругого ядро- ядерного рассеяния производящую функцию, которая позволит обойти вышеуказанную проблему учета всех диаграмм.

В качестве примера в главе 3 продемонстрируем, как из производящей функции можно получить полное сечение и полное неупругое сечение (сечение реакции) для реакций $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$.

1. Теория Глаубера для упругого ядро- ядерного столкновения

В данном разделе обсуждаются основы теории Глаубера. Будет выведена формула для амплитуд упругого ядро- ядерного столкновения.

1.1. Основные положения теории Глаубера

Взаимодействие между частицами при достаточно высоких энергиях носит дифракционный характер [1,2]. Особенностью такого взаимодействия является то, что упругое рассеяние непосредственно связано с поглощением частиц. Дифракционные явления имеют место, если длина волны относительного движения сталкивающихся частиц мала по сравнению с характерными размерами области, в которой сказывается взаимодействие. Дифракционный характер взаимодействия проявляется при рассеянии нейтронов и протонов на средних и тяжелых ядрах, начиная с энергий порядка 1 МэВ. При таких энергиях длина свободного пробега нуклона в ядерном веществе мала по сравнению с размерами ядра, и ядро можно рассматривать как черное поглощающее тело. В этом случае дифракционные ядерные явления описываются в рамках эйконального приближения в квантовой механике [3].

С увеличением энергии рассеиваемых нуклонов длина свободного пробега в ядерном веществе возрастает и, если она становится сравнимой с размерами ядра, последнее необходимо рассматривать как оптически полупрозрачное тело. При достаточно высоких энергиях падающих адронов, когда длина свободного пробега в ядерном веществе становится значительно больше размеров ядра, модель черного или полупрозрачного ядра оказывается неприменимой. Так как в этом случае длина волны падающего нуклона значительно меньше радиуса ядерного взаимодействия, то рассеяние на ядре можно рассматривать как многократное дифракционное рассеяние на отдельных нуклонах.

Пусть быстрая частица (нуклон) массой m , импульсом k и кинетической энергией T рассеивается на ядре A , которое рассматривается как множество потенциальных ям глубиной V_0 и размера a . Если выполнены условия

$$ka \gg 1, T/V_0 \gg 1, \quad (1.1)$$

то угловое распределение при высоких энергиях сосредоточено в узком конусе с пиком рассеяния вперед.

Фазовый сдвиг (эйконал) $\chi_A(b)$ задается уравнением

$$\chi_A(b) = -\frac{m}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} dz V_A(b, z), \quad (1.2)$$

где b – прицельный параметр, являющийся двумерным вектором, который лежит в плоскости, ортогональной импульсу k , а V_A – потенциал ядра A [3]. Из условий (1.1) следует, что налетающая частица не взаимодействует с заданным нуклоном более одного раза, а нуклоны мишени не взаимодействуют друг с другом в процессе рассеяния и считаются "замороженными". Ядерный потенциал V_A , по предположению, формируется из пространственно разделенных нуклонных потенциалов V_0 . Отсюда, по аналогии с оптикой, следует, что при прохождении частицы через ядро фазы на отдельных нуклонах складываются:

$$\chi_A(b) = \sum_{j=1}^A \chi_{NN}(b_j), \quad (1.3)$$

где $\chi_{NN}(b_j)$ – фазовый сдвиг на j -ом нуклоне ядра, а b_j его поперечные координаты. При вычислении $\chi_A(b)$ пренебрегают отклонением частицы от прямолинейного движения.

Изложенная дифракционная теория многократных столкновений не учитывает все, что связано со спиновыми и изоспиновыми переменными нуклонов ядра.

1.2. Амплитуда нуклон- ядерного рассеяния

Рассмотрим взаимодействие нуклона- снаряда с нуклоном- мишенью. Амплитуда такого упругого рассеяния выражается через фазовый сдвиг $\chi_{NN}(b_j)$ такого взаимодействия

$$f_{NN}^{el}(q) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b \Gamma(b) e^{iqb}, \quad (1.4)$$

где $q = k - k'$ - переданный импульс, k' - импульс после рассеяния, $\Gamma(b) = 1 - e^{i\chi_{NN}(b)}$ - профильная функция нуклона. Интеграл (1.4) берется по множеству прямолинейных траекторий со всевозможными значениями прицельного параметра [2,4].

Из (1.4) видно, что $\Gamma(b)$ и f_{NN}^{el} связаны между собой преобразованием Фурье. Обратное к (1.4)

$$\Gamma_{NN}(b_j) = \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q f_{NN}^{el}(q) e^{-iqb_j} = 1 - e^{i\chi_{NN}(b_j)}.$$

Профильная функция ядра:

$$\Gamma_A(b; r_1, \dots, r_A) = 1 - e^{i \sum_{j=1}^A \chi_j(b-b_j)} = 1 - e^{\chi_A(b, b_1, \dots, b_A)}, \quad (1.5)$$

где r_1, \dots, r_A - положения нуклонов, b_i - их поперечные координаты. Отсюда получаем амплитуду рассеяния нуклон- ядро:

$$F_{hA}^{el}(q; b_1, \dots, b_A) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} \Gamma_A(b; b_1, \dots, b_A) = \quad (1.6)$$

$$\frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} \left\{ 1 - e^{i \sum_{j=1}^A \chi_j(b-b_j)} \right\},$$

которая является оператором в пространстве переменных b_1, \dots, b_A . Принимая это во внимание, получаем амплитуду, которая соответствует тому, что ядро при взаимодействии с нуклоном не меняет состояние $|A\rangle$ (поскольку при упругом столкновении перестройки не происходит) и вычисляется как матричный элемент оператора (1.2) в обкладках этих состояний [2,4,5]. Таким образом,

$$F_{hA}^{el}(q; b_1, \dots, b_A) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} \langle A | \Gamma_A(b; r_1, \dots, r_A) | A \rangle. \quad (1.7)$$

Тогда

$$F_{hA}^{el}(b; r_1, \dots, r_A) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} \int d^3r_1 \dots d^3r_A \rho(r_1, \dots, r_A) \times \quad (1.8)$$

$$\left\{ 1 - \prod_{i=1}^A \left[1 - \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q' e^{-iq'(b-b_i)} f_{NN}(q') \right] \right\},$$

где $\rho(r_1, \dots, r_2)$ - распределение плотности вероятности найти нуклон с координатами r_i , $i = 1, \dots, A$.

Вычисление амплитуды по формуле (1.8) представляется сложной задачей и оказывается практически решаемой только для легчайших ядер, например для водорода, гелия и лития. Задача упрощается, если использовать приближение факторизации плотности ядерной материи:

$$\rho(r_1, \dots, r_A) = \prod_{i=1}^A \rho(r_i), \quad (1.9)$$

где $\rho(r_i)$ – плотности распределения отдельных нуклонов ядра, нормированные на единицу.

Делая приближение факторизации, мы пренебрегаем динамическими корреляциями между нуклонами и корреляциями, обусловленными тождественностью нуклонов, т.е. нуклоны в ядре рассматриваются независимыми друг от друга [2, 4, 5].

Введем ядерный формфактор

$$S(q) = \int d^3r e^{-iqr} \rho(r),$$

тогда, интегрируя (1.8) по положению нуклонов, получим

$$F_{NA}^{el}(q) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q' e^{-iq'b} f_{NN}^{el}(q') S(q') \right)^A \right], \quad (1.10)$$

где $S(q')$ – формфактор, соответствующий одночастичной функции плотности.

Формула (1.10) интересна тем, что выражает амплитуду упругого столкновения на ядре через известные из эксперимента величины. Например, формфактор ядра и амплитуда рассеяния на нуклонах $f_{NN}^{el}(q')$.

1.3. Амплитуда ядро– ядерного рассеяния

Рассмотрим теперь упругое столкновение ядра A (в состоянии $|A\rangle$) с ядром B (в состоянии $|B\rangle$) в системе покоя последнего. Ядерные плотности обозначим как $\rho_A(b, r_1, \dots, r_A)$ и $\rho_B(b, r'_1, \dots, r'_B)$ для ядер A и B соответственно. Тогда исходя из (1.5) и (1.7) амплитуда упругого рассеяния ядра A на ядре B с переданным импульсом q запишется как

$$F_{NA}^{el}(q) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} \langle A, B | \Gamma_{AB}(b; r_1, \dots, r_A; r'_1, \dots, r'_B) | B, A \rangle.$$

Так же как (1.2) предположим, что фазовый сдвиг $\chi_{AB}(b)$ в ядро-ядерном столкновении равен сумме фазовых сдвигов для каждого нуклон-нуклонного рассеяния. Производя интегрирование по продольной координате z_i нуклонов, входящая как компонента радиус-вектора $r_i = (x_i, z_i)$, а x_i — поперечные координаты, получим

$$F_{AB}^{el}(q) = \frac{ik}{2\pi} \int d^2b e^{iqb} [1 - S_{AB}(b)], \quad (1.11)$$

где q — переданный импульс, k — импульс налетающего ядра, пересчитанный на нуклон. Интегрирование идет по прицельному параметру b , который лежит в поперечной плоскости к импульсу k . Функция $S_{AB}(b)$ задается выражением:

$$S_{AB}(b) = \langle A, B | \left\{ \prod_{i,j} [1 - \Gamma_{NN}[b + x_i - y_j]] \right\} | B, A \rangle, \quad (1.12)$$

в котором символ $\langle A, B | \dots | B, A \rangle$ означает усреднение по поперечным координатам нуклонов x_i и y_j в ядрах A и B . Каждая скобка в этом произведении соответствует паре нуклонов, один из которых относится к ядру A , а другой — к ядру B [6,7]. Единица отвечает отсутствию взаимодействия между ними, а $\Gamma_{NN}[b + x_i - y_j]$ соответствует их рассеянию. Поскольку в произведение входят пары (i,j) только один раз, то любой нуклон-снаряд рассеивается на любом нуклоне-мишени не более, чем однократно.

Используя поперечные плотности нуклонов

$$\rho(x_1, \dots, x_N) = \int \prod_{i=1}^N dz_i \rho(x_1, z_1, \dots, x_N, z_N),$$

выражение (1.12) перепишем как

$$S_{AB}(b) = \int \prod_{i=1}^A d^2x_i \int \prod_{j=1}^B d^2y_j \rho(x_1, \dots, x_A) \rho(y_1, \dots, y_B) \times \left\{ \prod_{i,j} [1 - \Gamma_{NN}(b + x_i - y_j)] \right\}, \quad (1.13)$$

где

$$\Gamma_{NN}(b) = 1 - e^{i\chi_{NN}(b)} = \frac{1}{2\pi ik} \int d^2q e^{-1qb} f_{NN}^{el},$$

а $f_{NN}^{el}(q)$ — как обычно, амплитуда нуклон-нуклонного рассеяния.

Полное сечение взаимодействия ядер A и B можно найти, если использовать оптическую теорему [5]

$$\sigma_{AB}^{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im} F_{AB}^{el}(0) = 2 \int d^2b [1 - S_{AB}(b)]$$

и интегральное сечение упругого рассеяния

$$\sigma_{AB}^{el} = \int d^2b [1 - S_{AB}(b)]^2,$$

а сечение реакции

$$\sigma_{AB}^{(r)} = \int d^2b [1 - S_{AB}^2(b)]. \quad (1.14)$$

2. Производящая функция для амплитуд ядерного рассеяния

Вычисление амплитуды рассеяния по формулам (1.11) и (1.12) представляет из себя сложную комбинаторную задачу, так как в них, по предположению, нужно учитывать, что заданный налетающий нуклон рассеивается не более одного раза на нуклоне ядра мишени. Для решения этой задачи, можно сохранить только часть всех вкладов в разложении произведения в уравнении (1.12), что соответствует так называемому оптическому приближению (п. 2.2), в котором суммируются вклады с не более чем одним рассеянием на каждый нуклон. Численные расчеты в [8] демонстрируют, что оптическое приближение недостаточно точное. Разница составляет 10–15% в σ_{AB}^{tot} . Чтобы обойти эту трудность, предлагается ввести производящую функцию, позволяющую учесть все парные комбинаторные вклады.

2.1. Общий случай

Для вычисления производящей функции будем исходить из уравнения (1.13). Поскольку мы интересуемся только взаимодействием при котором любая заданная пара сталкивается не более одного раза, то удобно ввести так называемый майеровский пропагатор [5] $\Delta(x - y)$:

$$e^{\Delta(x-y)} - 1 = \Gamma_{NN}(x - y). \quad (2.1)$$

Следующим шагом будет представление выражения (1.13) через гауссов функциональный интеграл. С этой целью введем вспомогательные поля (комплексные функции) $\Phi(x)$ и $\Phi^*(x)$. Заметим, что (2.1) можно представить гауссовым интегралом [5,10,11]

$$\begin{aligned} N \int D\Phi D\Phi^* \exp \left\{ - \int d^2x d^2y \Phi(x) \Delta^{-1}(x - y) \Phi^*(y) + \sum_{i=1} \Phi(x_i) + \sum_{j=1} \Phi(y_j) \right\} \\ = \exp \left\{ \sum_{i,j} \Delta(x_i - y_j) \right\} = \prod_{i,j} e^{\Delta(x_i - y_j)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $N = \text{Det}(2\pi\Delta)$ – функциональный определитель [5], а Δ^{-1} – обратный оператор такой, что $\int dz\Delta^{-1}(x-z)\Delta(z-y) = \delta^{(2)}(x-y)$. Мера интегрирования

$$D\Phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \frac{d\Phi(x_i)}{2\pi}.$$

Делая замену $x+b \rightarrow x$ в (1.13) и подставляя туда (2.1) с учетом (2.2) получаем в виде функционального интеграла выражение

$$S_{AB}(b) = \int \prod_{i=1}^A d^2x_i \int \prod_{j=1}^B d^2y_j \rho(x_1-b, \dots, x_A-b) \rho(y_1, \dots, y_B) \times \quad (2.3)$$

$$N \int D\Phi D\Phi^* \exp \left\{ - \int d^2x d^2y \Phi(x) \Delta^{-1}(x-y) \Phi^*(y) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^A \Phi(x_i) + \sum_{j=1}^B \Phi(y_j) \right\}.$$

Будем считать, что плотности нуклонов в ядрах распадаются на произведение одночастичных плотностей (1.9). В этом случае уравнение (2.3) будет иметь вид:

$$S_{AB}(b) = N \int D\Phi D\Phi^* \exp \left\{ - \int d^2x d^2y \Phi(x) \Delta^{-1}(x-y) \Phi^*(y) \right\} \quad (2.4)$$

$$\times \left[\int d^2x \rho(x-b) e^{\Phi(x)} \right]^A \left[\int d^2y \rho(y) e^{\Phi^*(y)} \right]^B.$$

Вычисление амплитуды (1.11) с использованием этой формулы при заданных A , B и фиксированным прицельным параметром b оказывается тяжелой задачей, в этом случае удобно ввести производящую функцию $Z(u,v)$ частные производные от которой порождают функцию $S_{AB}(b)$

$$S_{AB}(b) = \frac{1}{Z(0,0)} \frac{\partial^A}{\partial u^A} \frac{\partial^B}{\partial v^B} Z(u,v) \Big|_{u=v=0}, \quad (2.5)$$

а

$$Z(u,v) = \int D\Phi D\Phi^* \exp \left\{ - \int d^2x d^2y \Phi(x) \Delta^{-1}(x-y) \Phi^*(y) \right. \quad (2.6)$$

$$\left. + u \int d^2x \rho(x-b) e^{\Phi(x)} + v \int d^2y \rho(y) e^{\Phi^*(y)} \right\},$$

где $Z(0,0) = (\text{Det}(2\pi\Delta))^{-1}$ - нормировочна константа, равная обратному определителю.

Общий вид введенного ранее майеровского пропагатора не предполагает короткодействия ядерных сил, поэтому это условие вводится отдельно. Для этого воспользуемся стандартной параметризацией амплитуды упругого нуклон- нуклонного рассеяния

$$f_{NN}^{el} = ik \frac{\sigma_{NN}^{tot}}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}\beta q^2},$$

где σ_{NN}^{tot} полное нуклон- нуклонное сечение, а β -параметр наклона дифференциального нуклон- нуклонного сечения в зависимости от q . В этой формуле была отброшена реальная часть f_{NN}^{el} , так как её вклад в сечение реакции мал. Тогда профильная функция

$$\Gamma_{NN} = \frac{\sigma_{NN}^{tot}}{4\pi\beta} e^{-\frac{1}{2\beta}x^2}.$$

Отсюда можно сказать, что если размер ядра R много больше радиуса взаимодействия $a = \sqrt{2\pi\beta}$, то можно считать, что

$$\Gamma_{NN} = \frac{\sigma_{NN}^{tot}}{2} \delta^{(2)}(x).$$

Майеровский пропагатор ищем в виде

$$\Delta(x) = ye^{-\frac{x^2}{2\beta}},$$

где y комплексное число. При $a/R \ll 1$ пропагатор сводится к выражению

$$\Delta(x) = 2\pi y \beta \delta^{(2)}(x), \quad (2.7)$$

и, соответственно,

$$\Delta^{-1}(x - z) = \frac{1}{2\pi y \beta} \delta^{(2)}(x - z).$$

Производящая функция (2.6) примет вид

$$Z(u,v) = \int D\Phi D\Phi^* \exp \int d^2x \left\{ -\Phi(x) \frac{1}{2\pi y \beta} \Phi^*(x) + u\rho(x-b)e^{\Phi(x)} + v\rho(x)e^{\Phi^*(x)} \right\}. \quad (2.8)$$

Поскольку подынтегральная функция не содержит производных, то функциональный интеграл распадается на произведение обычных интегралов в каждой точке x . Зададим его в виде интеграла конечной кратности на квадратной пространственной решетке с вершинами а точках x_n и с шагом $a \rightarrow 0$, заменив интегралы в экспоненте на интегральные суммы $\sum_{x_n} f(x_n)a^2$. Гауссов интеграл (2.2) в дискретном виде задается тогда формулой

$$\begin{aligned} N \prod_{x_n} \int \frac{d\Phi(x_n)d\Phi^*(x_n)}{2\pi} \exp \left\{ - \sum_n \frac{1}{y} \Phi(x_n)\Phi^*(x_n) + \sum_{i=1} \Phi(x_i) + \sum_{j=1} \Phi(y_j) \right\} \\ = \exp \left\{ y \sum_{i,j} \delta_{x_i,y_j} \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где δ_{x_i,y_j} – символ Кронекера для дискретных координат нуклонов. Так как

$$e^{y\delta_{x_i,y_j}} = 1 + (e^y - 1)\delta_{x_i,y_j}$$

и $\delta_{x_i,y_j}/a^2 \rightarrow \delta^{(2)}(x_i - y_j)$ при $a \rightarrow 0$, то

$$\prod_{i,j} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma_{NN}^{tot}}{a^2} \delta_{x_i,y_j} \right] \rightarrow \prod_{i,j} \left[1 - \frac{1}{2} \sigma_{NN}^{tot} \delta(x_i - y_j) \right]$$

В этом случае уравнение для майеровского пропагатора (2.1) переходит в

$$e^y - 1 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{NN}^{tot}}{a^2}.$$

Производящая функция (2.6) в дискретной форме примет вид

$$\begin{aligned} Z(u,v) = \prod_{x_n} \int \frac{d\Phi(x_n)d\Phi^*(x_n)}{2\pi} \exp \left\{ - \frac{1}{y} \Phi(x_n)\Phi^*(x_n) \right. \\ \left. + ua^2 \rho(x-b)e^{\Phi(x_n)} + va^2 \rho(x)e^{\Phi^*(x_n)} \right\}, \end{aligned}$$

отсюда, взяв интеграл с учетом дискретного вида майеровского пропагатора (2.9), имеем

$$Z(u,v) = \prod_{x_n} \left\{ y \sum_{M,N} [a^2 u \rho(x_n - b)]^M [a^2 v \rho(x_n)]^N \right\},$$

а отсюда

$$Z(u,v) = C e^{W(u,v)}, \quad (2.10)$$

$$W(u,v) = \frac{1}{a^2} \int d^2x \ln \left(\sum_{M \leq A, N \leq B} \frac{e^{yM \cdot N}}{M!N!} [a^2 u \rho(x-b)]^M [a^2 v \rho(x)]^N \right),$$

где C – несущественная константа.

Формула (2.10) является основной для производящей функции, вычислив которую, мы сможем найти функцию $S_{AB}(b)$ по формуле (2.5), а значит и амплитуду (1.11) или сечение реакции (1.14).

Разложим $e^{yM \cdot N} = (1 - \frac{\sigma_{NN}^{tot}}{2a^2}) = (1 + h)$ в ряд по степеням h , тогда функция $W(u, v)$ можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} W(u, v) &= \frac{1}{a^2} \int d^2 \ln (\exp [a^2 u \rho_A(x - b) + a^2 v \rho_B(y)] F(u, v)) \\ F(u, v) &= \frac{1}{a^2} \int d^2 x \ln(1 + h[a^2 \rho_A(x - b) \cdot a^2 \rho_B(x)] uv) \\ &+ \frac{1}{2} h^2 [a^4 \rho_A^2(x - b) \cdot a^2 \rho_B(x) u^2 v + a^2 \rho_A(x - b) \cdot a^4 \rho_B^2(x) u v^2 \\ &+ a^4 \rho_A^2(x - b) \cdot a^4 \rho_B^2(x) u^2 v^2]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогда, из условия нормировки одночастичных плотностей, производящая функция примет вид

$$Z(u, v) = e^{u+v} e^{F(u, v)}.$$

При больших A и B из (2.5) имеем

$$S_{AB}(b) = e^{F(A, B)}. \quad (2.12)$$

2.2. Оптическое приближение

Рассмотрим теперь частный случай формулы (2.8), когда каждый отдельный нуклон взаимодействует не более одного раза, иначе говоря, в выражении (1.13) каждый индекс i, j учитывается только один раз.

Так же, как и раньше, перепишем функцию $S_{AB}(b)$ в оптическом приближении через функциональный интеграл. Для этого произведение из (1.12) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \prod_{i, j} [1 - \Gamma_{NN}(x_i - y_j)] &= \prod_{m, n} \left[1 - \int d^2 x d^2 y \frac{\delta}{\delta \Phi_m(x)} \Gamma(x - y) \frac{\delta}{\delta \Phi_n^*(y)} \right] \\ &\times \prod_i [1 + \Phi_i(x_i)] \prod_j [1 + \Phi_j^*(x_j)] \Bigg|_{\Phi_m(x) = \Phi_n^*(x) = 0}, \end{aligned}$$

с функциональными производными

$$\frac{\delta}{\delta \Phi_m(x)} \Phi_i(x_i) = \delta_{m, i} \delta(x - x_i).$$

Тогда, принимая во внимание (2.1), напомним правую часть этого равенства в виде

$$\prod_{i,j} [1 - \Gamma_{NN}(x_i - y_j)] = \exp \left\{ \int d^2x d^2y \frac{\delta}{\delta\Phi(x)} \Delta(x - y) \frac{\delta}{\delta\Phi^*(y)} \right\} \\ \times \prod_i [1 + \Phi_i(x_i)] \prod_j [1 + \Phi_j^*(x_j)],$$

отсюда функция (1.13) в виде функционального интеграла в оптическом приближении:

$$S_{AB}^{(\text{opt})} = \int \prod_{i=1}^A d^2x_i \int \prod_{j=1}^B d^2y_j \rho_A(x_1 - b, \dots, x_i - b) \rho_B(y_1, \dots, y_j) \\ \times N \int D\Phi D\Phi^* \exp \left\{ - \int d^2x d^2y \Phi(x) \Delta^{-1}(x - y) \Phi^*(y) \right\} \\ \times \prod_i [1 + \Phi_i(x_i)] \prod_j [1 + \Phi_j^*(x_j)].$$

Используем приближение факторизации ядерной плотности (1.9), тогда

$$S_{AB}^{(\text{opt})} = N \int D\Phi D\Phi^* \exp \left\{ - \int d^2x d^2y \Phi(x) \Delta^{-1}(x - y) \Phi^*(y) \right\} \\ \times \left[\int d^2x \rho_A(x - b) (1 + \Phi_i(x)) \right]^A \left[\int d^2y \rho_B(y) (1 + \Phi_j(y)) \right]^B.$$

Эту функцию можно получить дифференцированием функции

$$Z^{(\text{opt})}(u, v) = e^{u+v} \int D\Phi D\Phi^* \exp \left\{ - \int d^2x d^2y \Phi(x) \Delta^{-1}(x - y) \Phi^*(y) \right. \\ \left. + u \int d^2x \rho_A(x - b) \Phi_i(x) + v \int d^2y \rho_B(y) \Phi_j(y) \right\}. \quad (2.13)$$

по u и v соответственно A и B раз используя формулу (2.5).

Производящая функция оптического приближения (2.13) может быть вычислена явно:

$$Z(u, v) = e^{u+v} e^{u \cdot v D_{AB}}, \quad D_{AB} = - \int d^2x d^2y \rho_A(x - b) \Delta(x - y) \rho_B(y),$$

что дает

$$S_{AB}^{(\text{opt})}(b) = \sum_{k,j \leq A,B} \frac{A!B!}{(A-k)!(B-j)!} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial u^k} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial v^j} e^{u \cdot v D_{AB}} \Bigg|_{u=v=0}.$$

При массовых числах $A, B \gg 1$, когда ядра не слишком легкие функцию $S_{AB}^{(opt)}$ приближенно можно написать следующим образом

$$S_{AB}^{(opt)} = e^{-T_{AB}(b)}, \quad (2.14)$$

где введена функция перекрытия оптического приближения

$$T_{AB}(b) = AB \int d^2x d^2y \rho_A(x-b) \Delta(x-y) \rho_B(y).$$

Поскольку формула (2.13) выводилась из общих соображений, то функция перекрытия выражается через произвольный пропагатор $\Delta(x-y)$, введенный в пункте 2.1. Однако для наших целей необходимо задаться пропагатором в рамках рассматриваемой теории. Так как величина, на которую изменяется ядро-ядерная профильная функция, как правило, меньше, чем величина изменения ядерной плотности, можно утверждать, что пропагатор имеет вид

$$\Delta(x-y) = \frac{\sigma_{NN}^{tot}}{2} \delta^{(2)}(x-y).$$

Данный пропагатор аналогичен (2.7) и включает в себя короткодействие ядерных сил.

Разложим экспоненту (2.14) в ряд по степеням функции перекрытия T_{AB} :

$$S_{AB}^{(opt)} = 1 - T_{AB} + \frac{1}{2!} T_{AB}^2 - \frac{1}{3!} T_{AB}^3 + \dots \quad (2.15)$$

Сопоставим аналитическому выражению для T_{AB} графический элемент: $T_{AB} = \bullet \text{---} \bullet$ в котором \bullet - вершины, которые соответствуют одночастичным плотностям ρ_A и ρ_B или нуклонам-участникам ядер A и B , а линия- их взаимодействию [5]. Тогда

$$S_{AB}^{(opt)} = 1 + \bullet \text{---} \bullet + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} + \dots$$

коэффициенты перед диаграммами не наносились. Видно, что суммируются вклады с не более чем одним рассеянием на каждый нуклон, что соответствует оптическому приближению, где единица отвечает за отсутствие

взаимодействия. Такое приближение недостаточно точное для интегрального сечения, разница с экспериментальными данными составляет 10 – 15%. Это расхождение можно объяснить тем фактом, что ряды в уравнении (1.12) дают значительные поправки к результатам оптического приближения. Учесть все вклады к ведущему поведению позволяет, введенная в пункте 2.1, производящая функция (2.10). Фактически, члены ряда меняются по знаку, поэтому из-за сокращения членов с противоположными знаками конечные суммы этих рядов могут иметь очень разные значения. Таким образом, некоторые классы диаграмм с малым комбинаторным фактором вносят существенный вклад в итоговое значение [5, 8]. Чтобы продемонстрировать, какие нуклон- нуклонные процессы участвуют, по аналогии с (2.15), разложим (2.12) и получим:

$$\begin{aligned}
 S_{AB} = & 1 + \text{---} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \\
 & + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \\
 & + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \dots
 \end{aligned}$$

Видно, что первая строка этого выражения соответствует оптическому приближению (ведущие графики), вторая строка- поправки к первой и представляют случай, когда каждый нуклон из ядра A (правые вершины) может взаимодействовать несколько раз, но все взаимодействующие нуклоны из B (левые вершины) по-прежнему различны. Оптическое приближение совместно с этими поправками называется приближением жесткой мишени. Отметим еще раз, что в описанной в первой главе теории Глаубера дальнейшее вычисление диаграмм (3 строчка) несколько сложно для практического применения.

В настоящем пункте зависимость $S_{AB}^{(\text{opt})}$ была выведена из общих соображений, однако можно обойтись более простой выкладкой, если учесть только линейное слагаемое по h в $F(u, v)$, которая дается выражением (2.12).

3. Расчет сечения реакции

Значительный объем информации о радиусах ядер и других параметрах распределения может быть получен из экспериментов по соударениям ядер с промежуточными энергиями. Анализ этих экспериментов обычно выполняется с помощью теории Глаубера. Экспериментально полученное сечение реакции при сопоставлении с теоретическими расчетами позволяет определить радиус ядра, участвующие в рассматриваемом процессе. Поэтому точный расчет сечений является главной задачей. Мы рассчитаем сечение реакции в оптическом приближении и с использованием производящей функции.

В данной работе мы рассматривали $^{12}\text{C}-^{12}\text{C}$ столкновение при энергии (в системе центра инерции) на нуклон равной 800 МэВ.

3.1. Ядреная плотность

При высоких энергиях (800 МэВ на нуклон) экспериментально найдены полное нуклон- нуклонное сечение составляет $\sigma_{NN}^{tot} = 47$ мбарн и параметр $\beta = 0.2$ фм².

Результаты расчета ядерных сечений зависят от формы распределений ядерных плотностей, см. [9]. Все расчеты, представленные ниже, проводились с использованием распределений Вудса- Саксона и гармонического осциллятора для ядер как пучка, так и мишени.

Трехмерное распределение гармонического осциллятора (НО) имеет вид

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{A/2 - 2}{3} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^2 \right) e^{-\frac{r^2}{\lambda^2}}, \quad (3.1)$$

где ρ_0 – нормировочная постоянная, λ – параметр размера ядра. Это распределение хорошо подходит для легких ядер, когда массовое число не больше 20 [10, 11].

Определим среднеквадратичный радиус ядра как

$$R_{rms} = \sqrt{r_A^2}, \quad (3.2)$$

где

$$r_A^2 = \int r^2 \rho(r) d^3r.$$

Параметр λ определяется по заданному среднеквадратичному радиусу ядра R_{rms} из уравнения (3.2). Изменяя R_{rms} мы подбираем параметры распределения (3.2) так, чтобы вычисленное сечение, куда входит это распределение, было приближенно к экспериментально найденному сечению.

Чтобы продемонстрировать, как с помощью производящей функции $Z(u,v)$ находится сечение реакции зададим конкретный среднеквадратичный радиус $R_{rms} = 2.49$ фм, тогда $\lambda^2 = 2.86$ фм².

Сечение плоскостью, которой принадлежит ось z , проинтегрированной плотности (3.1) по одной координате z изображена на (Рис. 3.1).

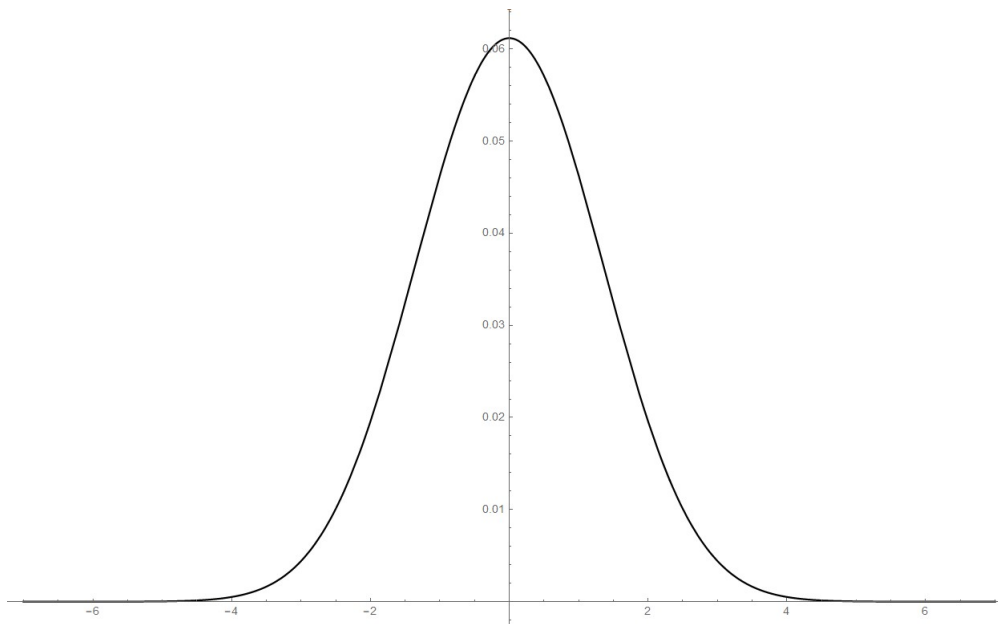


Рисунок 3.1 — Распределение НО

Рассмотрим теперь трехмерное распределение Вудса- Саксона (WS), которое задается выражением

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-c_1}{c_2}\right)}, \quad (3.3)$$

где $c_1 = 1.15A^{1/3}$ для больших A , но она может быть неверна при небольших A , а подбирать по среднеквадратичному радиусу $R_{rms} = 2.49$ фм, как мы делали в осцилляторной параметризации, а $c_2 = 0.54$ фм- характерная толщина границы ядра. Параметр c_1 в распределении Вудса-Саксона выбирается согласно расчетным значениям сечений, которые соответствуют экспериментальным сечениям. Одномерное проинтегрированное распределение WS изображено на (Рис.3.2).

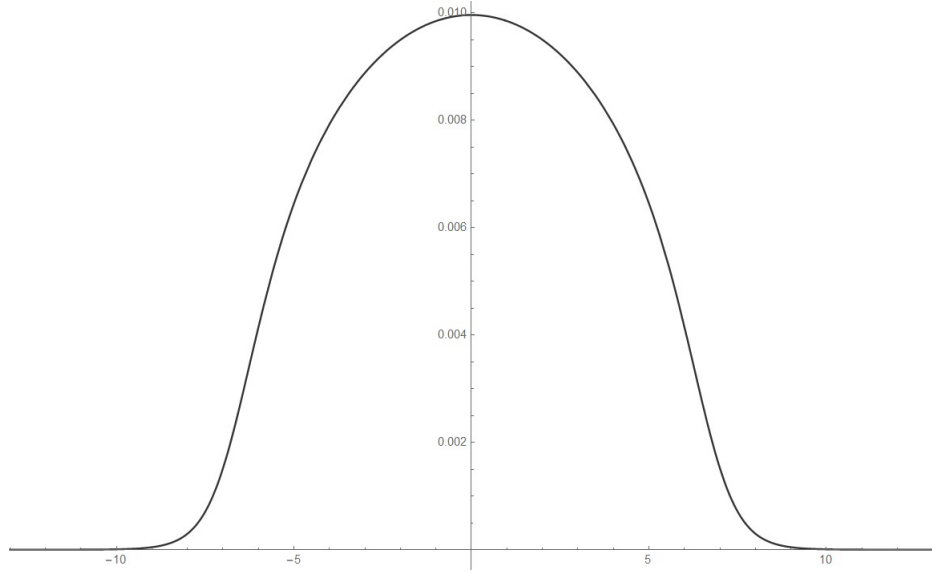


Рисунок 3.2 — Распределение WS

3.2. Расчет сечений

Рассчитаем полное сечение и сечение реакции (полное неупругое). Полное сечение восстанавливается по оптической теореме через амплитуду упругого рассеяния: $\frac{4\pi}{k} \text{Im} F_{AB}^{\text{el}}(0) = \sigma_{AB}^{\text{tot}}$. Используя формулу (1.11) найдем сечение функцию $S_{AB}(b)$, которая находится по (2.5) или (2.12):

$$\sigma_{AB}^{\text{tot}} = 2 \int d^2b [1 - S_{AB}(b)]. \quad (3.4)$$

Полное сечение включает в себя упругие и неупругие процессы, следовательно из амплитуды упругого рассеяния можно выделить неупругую часть σ_{AB}^{r} :

$$\sigma_{AB}^{\text{r}} = \int d^2b [1 - |S_{AB}(b)|^2]. \quad (3.5)$$

Тогда сечение упругого процесса:

$$\sigma_{AB}^{\text{el}} = \sigma_{AB}^{\text{tot}} - \sigma_{AB}^{\text{r}}.$$

Напомним, что случай при $S_{AB}(b) = 1$ соответствует полному отсутствию взаимодействия, а $S_{AB}(b) = 0$ отвечает полному поглощению частицы. Отметим также, что упругое рассеяние может иметь место и без неупругого (это возможно, если $|S_{AB}(b)| = 1$), однако обратное невозможно: наличие неупругого рассеяния приводит к наличию упругого.

Рассмотрим рассеяние $^{12}\text{C} - ^{12}\text{C}$ в системе центра инерции при энергии 800 МэВ на нуклон. Найдем сначала σ_{AB}^{tot} и σ_{AB}^{r} в оптическом приближении

(2.14) для НО распределения. Тогда получаем по формуле (3.4) $\sigma_{AB}^{\text{tot}} = 1571$ и по формуле (3.5) $\sigma_{AB}^r = 957$ мбарн. Аналогично для WS распределения: $\sigma_{AB}^{\text{tot}} = 1574$ и $\sigma_{AB}^r = 957$ мбарн.

Ясно, что учет всех диаграмм даст отличную от оптического приближения амплитуду, но поскольку ряды (1.12) представляются знакопеременными, то указать заранее разницу нельзя. Для учета всех поправок к ведущему поведению воспользуемся формулами (2.5), (2.10). В нашем процессе $A = B = 12$, поэтому в формуле (2.10) функцию $W(u,v)$ раскладываем в ряд с сохранением таких степеней u,v , которые не больше 12. Тогда полное сечение $\sigma_{AB}^{\text{tot}} = 1360$ мбарн, а сечение реакции $\sigma_{AB}^r = 865$ мбарн. Видно, что оптическое приближение дает завышенную оценку сечений.

Найденные величины хорошо согласуются с расчетами по методу Монте-Карло [5].

Заключение

В настоящей работе была изложена теория Глаубера с указанием ее трудностей. Эта теория основана на дифракционной картине явления рассеяния, которая применяется для анализа ядерных столкновений. Однако точный расчет всех диаграмм в "классической" формулировке, данной в первой главе, практически невозможен. Для этого была получена во второй главе производящая функция $Z(u, v)$, которая порождает функцию S_{AB} , в которой учтены все вклады. Таким образом, по формул (3.4) и (3.5) можно рассчитать более точно сечения ядерных столкновений.

Изложенная теория не учитывает: оболочечную модель ядра (эксперименты по упругому рассеянию протона на дейтроне показали, что в теоретических расчетах необходимо учитывать d - состояние волновой функции дейтрона), включающую принцип Паули, корреляции, связанные с положением внутриядерных нуклонов, изоспиновые переменные и динамические эффекты ядерных сил.

Список используемых источников

- [1] G.D. Alkhazov, S.L. Belostotsky, and A.A. Vorobyov, Phys. Rep. 42, 89 (1978).
- [2] R.J. Glauber, Phys. Rev. 100, 242 (1955).
- [3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Quantum Mechanics (Non-relativistic theory). Pergamon Press (1965).
- [4] Балашов В.В. Квантовая теория столкновений. – М.: 2012. – 289 с.
- [5] G. D. Alkhazov, I. S. Novikov, Yu. Shabelski Int.J.Mod.Phys.E, Vol. 20, 3(2011), 583-627
- [6] Барашенков В. С., Тонеев В. Д. "Упругое рассеяние высокоэнергетических частиц на ядрах"УФН 100 425–448 (1970)
- [7] Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1976г. 295 с.
- [8] V. Franco and G.K. Varma, Phys. Rev. C18, 349 (1978).
- [9] C.Merino,I.S.Novikov,andYu.M.Shabelski,Phys. Rev. C 80, 064616 (2009); arXiv: 0907.1697 [nucl- th].
- [10] Г. В. Ефимов, Упругое рассеяние и функциональный интеграл, ТМФ, 2014, том 179, номер 3, 367–386
- [11] Г. В. Ефимов, Стационарное уравнение Шредингера нерелятивистской квантовой механики и функциональный интеграл, ТМФ, 2012, том 171, номер 3, 452–474