

Санкт-Петербургский государственный университет

ИЕВЛЕВ Евгений Альбертович

Выпускная квалификационная работа

***Эффективные теории на неабелевой струне
в суперсимметричных калибровочных теориях***

Уровень образования: *Аспирантура*

Направление *03.06.01 «Физика»*

Основная образовательная программа *МК.3008.2016 «Физика и астрономия»*

Научный руководитель:
зав. кафедрой Физики высоких энергий и элементарных частиц,
д.ф.-м.н., профессор
Иоффе Михаил Вульфович

Научный консультант:
ведущий научный сотрудник сектора ОТФ,
НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ, д.ф.-м.н.
Юнг Алексей Викторович

Рецензент:
зав. сектором ОТФ, НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ,
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник
Кудрявцев Вячеслав Александрович

Санкт-Петербург

2020

Содержание

Введение	3
1 CP($N - 1$) сигма модели: обзор	8
1.1 Несуперсимметричная модель	8
1.2 $\mathcal{N} = (2, 2)$ модель	11
1.3 μ -Деформированная CP($N - 1$) модель	13
2 Эффективный потенциал в однопетлевом приближении	18
2.1 Вывод эффективного потенциала	18
2.2 Вакуумные уравнения	21
3 Режим сильной связи	23
3.1 Малые деформации	23
3.1.1 Энергия вакуума	25
3.1.2 Поправки к вакуумным средним	26
3.2 Эффективное действие	28
3.2.1 Вывод эффективного действия	29
3.2.2 Кулоновский потенциал и энергия вакуума	31
3.3 Фазовый переход второго рода	33
3.4 Большие деформации	35
3.5 Случай ненулевых разностей масс	37
4 Хиггсовская фаза	39
4.1 Квазивакуумы	39
4.2 Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи	44
5 Фазовая диаграмма двумерной теории	49
Заключение	51
Список литературы	53

Введение

Одной из фундаментальных проблем современной теоретической физики высоких энергий является проблема описания конфайнмента. Это явление является характерным для сильновзаимодействующих частиц, и механизм, ответственный за возникновение конфайнмента (невыветания цвета), до сих пор не установлен.

Общепринятой теорией сильных взаимодействий является квантовая хромодинамика (КХД). Конфайнмент кварков проявляется на низких энергиях, когда теория находится в сильной связи, что приводит к серьёзным препятствиям к детальным теоретическим исследованиям этого явления внутри самой КХД. Одним из перспективных направлений, которые всё же могут помочь в понимании явления конфайнмента, является рассмотрение суперсимметричных аналогов КХД.

В основополагающих работах Зайберга и Виттена [1, 2] было показано, что в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных калибровочных теориях может происходить явление конденсации монополей. Это реализует т.н. дуальный эффект Мейснера, предложенный до этого 'т Хоофтом и Мандельштамом [3, 4]: при конденсации магнитных зарядов, электрическое поле между пробными электрическими зарядами сжимается в тонкую трубку, что приводит к линейному потенциалу между ними. Однако конфайнмент в данной модели является абелевым.

Неабелевы трубки потока (струны) были впервые обнаружены в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной квантовой хромодинамике (СКХД) с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f = N$ флейворами гипермультиплетов кварков [5, 6, 7, 8] (см. также обзоры [9, 10, 11, 12]). Когда данная теория находится в хиггсовской фазе по отношению к скалярным кваркам (т.е. в так называемом кварковом вакууме), происходит формирование неабелевых струн. Они приводят к конфайнменту монополей в слабой связи и к так называемой фазе «вместо конфайнмента» кварков в сильной связи, см. обзор [13]. Эта картина даёт неабелево обобщение механизма Зайберга-Виттена, который описывает возникновение абелева конфайнмента кварков в монопольном вакууме $\mathcal{N} = 2$ СКХД [1, 2].

Помимо трансляционных нулевых мод, свойственных для вихрей Абрикосова-Нильсена-Олесена (АНО) [14], неабелевы струны обладают также ориентацион-

ными нулевыми модами. Динамически они описываются двумерной $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной сигма моделью с $CP(N - 1)$ таргет-пространством. Координатным пространством этой модели является, конечно, мировая поверхность струны [5, 6, 7, 8].

Много работы было проделано для построения неабелевых струн в КХД-подобных теориях с меньшей суперсимметрией, в частности, в случае $\mathcal{N} = 1$ СКХД, см. например [15, 16, 17] и обзор [11]. К развитию этого направления приложил руку и автор представляемой выпускной квалификационной работы [18, 19, 20, 21]. Один из перспективных подходов заключается в деформировании $\mathcal{N} = 2$ СКХД массой μ присоединённой материи (так называемая μ -деформированная СКХД). После этого можно изучать, что происходит с неабелевыми струнами при такой деформации. При этом $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия нарушается, и в пределе $\mu \rightarrow \infty$ четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. В статье [18], написанной совместно с автором представляемой ВКР, была найдена теория на мировой поверхности неабелевой струны в μ -деформированной СКХД. В этой статье было показано, что в пределе больших μ данная двумерная теория переходит в несуперсимметричную $CP(N - 1)$ модель.

Так как скалярные кварки четырёхмерной СКХД развивают ненулевые вакуумные средние, монополи становятся невылетающими за счёт того, что они соединены неабелевыми струнами. Однако монополь не может просто находиться на конце струны. На самом деле, в теориях с калибровочной группой $U(N)$ невылетающие монополи соединяют две различные элементарные неабелевы струны. С точки зрения $CP(N - 1)$ модели на мировой поверхности струны, невылетающий монополь является кинком, интерполирующим между различными вакуумами $CP(N - 1)$ модели [7, 8, 22] (см. также обзор [11]).

Представляемая работа в большей части основана на статье [21]. В настоящей работе представлено решение теории на мировой поверхности неабелевой струны μ -деформированной СКХД в пределе большого числа цветов N . Приближение большого числа цветов было впервые использовано Виттеном для решения как несуперсимметричной, так и $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной $CP(N - 1)$ моделей [23]. В частности, решение Виттена при больших N показывает, что дополнительное $U(1)$ калибровочное поле A_μ , вводимое для формулировки $CP(N - 1)$ модели, становится физическим. В $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсиммет-

ричной $CP(N - 1)$ модели имеется N вырожденных вакуумов в соответствии с индексом Виттена. Параметр порядка, различающим эти вакуумы, является вакуумное среднее скалярного суперпартнёра σ калибровочного поля A_μ [23].

В несуперсимметричной $CP(N - 1)$ модели эти вакуумы расщеплены и становятся т.н. квазивакуумами. Разность энергий между двумя соседними вакуумами оказывается величиной порядка $1/N$. Истинное вакуумное состояние в такой теории единственно¹. Параметром порядка, различающим эти квазивакуумы, является величина постоянного электрического поля, соответствующего калибровочному полю A_μ , безмассовому в несуперсимметричном случае [23], см. также [24] и обзор [11].

В данной работе приближение большого числа цветов N используется для изучения фазовой диаграммы теории на мировой поверхности неабелевой струны в μ -деформированной СКХД. Фазовая диаграмма рассматривается на плоскости $(\mu, \Delta m)$, где Δm - параметр, характеризующий разности масс кварков. Он является основным масштабом масс в двумерной теории. Обнаружена богатая фазовая структура, включающая две различных фазы в сильной связи и две хиггсовских фазы.

Фазы сильной связи возникают при малых значениях масштаба масс Δm . Первая фаза сильной связи наблюдается при малых μ . Качественно она похожа на фазу $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной теории при $\mu = 0$. Хотя N вакуумов расщепляются и становятся квазивакуумами при нарушении суперсимметрии, параметром порядка всё ещё является вакуумное среднее поля σ . Во второй фазе сильной связи при больших μ квазивакуумы различаются по величине постоянного электрического поля. Эта фаза качественно похожа на фазу сильной связи в несуперсимметричной $CP(N - 1)$ модели.

При больших Δm были найдены две Хиггсовских фазы, находящихся в слабой связи. При малых значениях параметра деформации μ , N вакуумов, присутствовавших в $\mathcal{N} = (2, 2)$ случае, расщепляются и становятся квазивакуумами. Тем не менее, в теории всё ещё есть кинки, интерполирующие между ними. Однако, когда μ превышает некоторое критическое значение, эти квазивакуумы исчезают один за другим, и мы можем наблюдать каскад фазовых переходов. В конце концов, остаётся только один вакуум, и в модели больше нет кинков.

¹Предполагается, что θ -угол равен нулю.

С точки зрения четырёхмерной СКХД, данная картина интерпретируется следующим образом. При больших Δt и малых μ в теории имеются невылетающие монополи, соединённые неабелевыми струнами. Однако при увеличении параметра деформации μ монополи пропадают.

Основные результаты, достигнутые при выполнении данной работы, следующие:

1. Изучена эффективная теория на неабелевой струне в $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой хромодинамике. Она оказывается двумерной $CP(N - 1)$ моделью с $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией или чисто бозонной $CP(N - 1)$ теорией, соответственно.
2. Изучена эффективная двумерная $CP(N - 1)$ модель, описывающая динамику ориентационных нулевых мод неабелевой струны при деформации $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной квантовой хромодинамики с помощью массы присоединенного поля.
3. Изучены кинки двумерной теории. Найдена фазовая диаграмма этой теории.
4. Изучен вопрос о наличии кинков в пределе больших деформаций. Выяснено, что при больших значениях параметра деформации, кинки в слабой связи пропадают.
5. Изучен вопрос о наличии невылетающих монополей в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой хромодинамике. Основываясь на результатах, полученных при исследовании двумерной теории, сделан вывод о том, что при ненулевых разностях масс кварков и больших значениях параметра деформации монополи пропадают.

По теме выпускной квалификационной работы опубликована статья в журнале *Physical Review D*, входящем в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus:

A. Gorsky, E. Ievlev and A. Yung, *Dynamics of non-Abelian strings in the theory interpolating from $\mathcal{N} = 2$ to $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **101**, no.1, 014013 (2020) [arXiv:1911.08328 [hep-th]].

Данная работа состоит из нескольких глав. В Главе 1 приведён обзор несуперсимметричной и $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной версий $CP(N - 1)$ модели и их решений в приближении большого числа цветов N . В этой главе также сформулирована $CP(N - 1)$ модель на мировой поверхности неабелевой струны в μ -деформированной СКХД. В Главе 2 выведен эффективный потенциал этой теории в приближении больших N . Глава 3 посвящена обсуждению двух фаз сильной связи при малых Δm , в то время как в Главе 4 изучается хиггсовская фаза при больших Δm . В Главе 5 приводится итоговая фазовая диаграмма теории на мировой поверхности. В Заключение обсуждаются основные результаты, полученные в данном исследовании.

1 CP($N - 1$) сигма модели: обзор

В этой главе вводятся различные CP($N - 1$) модели, которые понадобятся в дальнейшем. Сперва рассматриваются несуперсимметричная и $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричная модели, которые уже изучались ранее, см. например [23, 25, 26, 27]. После этого будет введена основная модель, изучению которой посвящена данная работа, а именно μ -деформированная CP($N - 1$) модель, являющаяся низкоэнергетической теорией на мировом листе неабелевой струны в μ -деформированной СКХД [18, 21].

1.1 Несуперсимметричная модель

При рассмотрении CP($N - 1$) моделей оказывается полезным так называемая калибровочная формулировка [23]. В этом формализме CP($N - 1$) модель задаётся в терминах N комплексных скалярных полей n^i , $i = 1, \dots, N$, взаимодействующих с дополнительным U(1) калибровочным полем A_μ . Функция Лагранжа при этом даётся следующим выражением:

$$\mathcal{L} = |\nabla_\mu n^i|^2 + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta_0) + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2, \quad (1.1)$$

где $\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu$. У полей σ и D нет кинетического члена, так что они тоже являются дополнительными полями. Дополнительные поля могут быть исключены при помощи соответствующих уравнений движения. В частности, уравнение движения для поля D приводит к условию

$$\bar{n}_i n^i = 2\beta_0, \quad (1.2)$$

которое вместе с калибровочной инвариантностью уменьшает число степеней свободы полей n^i до $2(N - 1)$.

Данная несуперсимметричная CP($N - 1$) модель возникает как теория на мировом листе неабелевой струны в несуперсимметричной КХД-подобной теории, см. [24] и обзор [11]. Массы m_i есть просто кварковые массы четырёхмерной теории.

В данной работе будет рассмотрен случай, когда массы распределены рав-

номерно по кругу в комплексной плоскости,

$$m_k = m - \Delta m \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (1.3)$$

Здесь $m \in \mathbb{R}$ – среднее арифметическое масс, а параметр $\Delta m > 0$ оказывается истинным масштабом масс в данной модели. Можно заметить, что сдвигом σ всегда можно добавить одинаковую постоянную ко всем массам m_i . Это позволяет сократить среднюю массу m .

Затравочная константа связи β_0 становится в квантовой теории бегущей константой связи β . Данная теория обладает асимптотической свободой и масштабом Λ_{CP} , который определяется как

$$\Lambda_{CP}^2 = M_{uv}^2 \exp\left(-\frac{8\pi\beta_0}{N}\right), \quad (1.4)$$

где M_{uv} – масштаб ультрафиолетового обрезания.

Данная теория может находиться в различных фазах. Известно, что в безмассовом случае $\Delta m = 0$ эта несуперсимметричная $CP(N - 1)$ модель находится в режиме сильной связи, и вакуумное среднее полей n^i равно нулю: $\langle n^i \rangle = 0$. Эта теория может быть решена при помощи $1/N$ разложения [23]. Оказывается, что на квантовом уровне спонтанное нарушение глобальной $SU(N)$ (флейворной) симметрии, наблюдающееся на классическом уровне, пропадает. В физическом спектре нет безмассовых голдстоуновских бозонов. У полей n^i появляется масса порядка Λ_{CP} .

Более того, у составной степени свободы – исходно дополнительного фотонного поля A_μ – появляется кинетический член за счёт однопетлевых поправок, и это поле становится динамическим. Присутствие безмассового фотона приводит к дальнодействию в несуперсимметричной $CP(N - 1)$ модели. Кулоновский потенциал в двумерии является линейной функцией, а именно

$$V(r) \sim \frac{\Lambda_{CP}^2}{N} r, \quad (1.5)$$

где r – расстояние между электрическими зарядами. Это приводит к кулоновский фазе, или фазе конфайнмента [23]. Электрические заряды оказываются невылетающими. Легчайшие электрические заряды – кванты поля n^i , которые в сильной связи становятся кинками [23]. Конфайнмент кинков означает, что в

физическом спектре нет уединённых кинков. Они образуют связанные состояния – «мезоны», образованные парами кинк-антикинк.

Кинки имеют массы порядка Λ_{CP} , в то время как линейный потенциал между ними слабый и пропорционален $1/N$. Таким образом, кинк и антикинк в «мезоне» разнесены на довольно большое расстояние, вследствие чего внутри «мезона» формируется квазивакуум. Вследствие этого, помимо единственного основного состояния, в теории также имеется целое семейство квазивакуумов, расщепление между которыми ведёт себя как $\sim \Lambda_{CP}^2/N$. Параметром порядка, различающим между различными квазивакуумами, является величина постоянного электрического поля, или плотность топологического заряда

$$Q = \frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu = \frac{1}{8\pi\beta} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \bar{n}_i \partial^\nu n^i \quad (1.6)$$

Рис. 1 иллюстрирует конфайнмент n -полей.

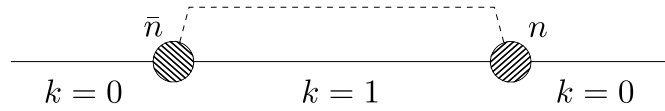


Рис. 1: Линейный конфайнмент n - \bar{n} пары. Сплошная линия представляет собой основное состояние (вакуум $k=0$). Прерывистая линия показывает плотность энергии в первом квазивакууме.

Кинки интерполируют между соседними квазивакуумами. Они интерпретируются как невылетающие монополи четырёхмерной теории. Так как натяжения возбуждённых струн больше натяжения легчайшей струны, эти монополи испытывают, помимо конфайнмента в четырёхмерии, также и конфайнмент в двумерии: монополь всегда соединён с антимонополем, образуют конфигурацию, похожую на мезон [24, 28].

С другой стороны, на больших масштабах масс $\Delta m \gg \Lambda_{CP}$ константа связи мала и «заморожена» на масштабе Δm , так что применимо квазиклассическое рассмотрение. Вакуумное среднее одного из полей n^i становится ненулевым, и больше нет безмассового фотона с дальнодействием. Поэтому данную фазу называют обычно «хиггсовской», противопоставляя её кулоновской фазе (фазе конфайнмента) в сильной связи. Точнее можно сказать, что в этой фазе $CP(N-1)$ модель описывает хиггсовскую фазу при энергиях ниже массы фотона. По существу, эта хиггсовская фаза в слабой связи похожа на «классическую фазу», описываемую классическим лагранжианом (1.1).

В литературе показано, что при промежуточных масштабах масс $\Delta m \sim \Lambda_{CP}$ происходит фазовый переход между хиггсовской и кулоновской фазами, см. [24, 26, 29, 30].

1.2 $\mathcal{N} = (2, 2)$ модель

Суперсимметричное обобщение только что рассмотренной модели [23, 25] характеризуется наличием добавочных фермионных полей ξ^i , $i = 1, \dots, N$, являющихся суперпартнёрами скалярных полей n_i . Полный лагранжиан $\mathcal{N} = (2, 2)$ теории (в евклидовой формулировке) даётся выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{e_0^2} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |\partial_\mu \sigma|^2 + \frac{1}{2} D^2 + \bar{\lambda} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda \right) + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta_0) \\ & + |\nabla_\mu n^i|^2 + \bar{\xi}_i i \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \xi^i + 2 \sum_i \left| \sigma - \frac{m_i}{\sqrt{2}} \right|^2 |n^i|^2 \\ & + i\sqrt{2} \sum_i \left(\sigma - \frac{m_i}{\sqrt{2}} \right) \bar{\xi}_{Ri} \xi_L^i - i\sqrt{2} \bar{n}_i (\lambda_R \xi_L^i - \lambda_L \xi_R^i) \\ & + i\sqrt{2} \sum_i \left(\bar{\sigma} - \frac{\bar{m}_i}{\sqrt{2}} \right) \bar{\xi}_{Li} \xi_R^i - i\sqrt{2} n^i (\bar{\lambda}_L \bar{\xi}_{Ri} - \bar{\lambda}_R \bar{\xi}_{Li}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где m_i – т.н. «твистованные массы» (черта над \bar{m}_i , $\bar{\sigma}$ обозначают комплексное сопряжение). При этом подразумевается предел $e_0^2 \rightarrow \infty$. Кроме того, $\bar{\sigma}^\mu = \{1, i\sigma_3\}$. Фермионы ξ_L, ξ_R есть, соответственно, левые и правые компоненты поля ξ . В данной модели снова есть возможность добавить одинаковую постоянную ко всем массам m_i , сдвинув поле σ .

Калибровочное поле A_μ , комплексный скаляр σ , вещественный скаляр D и двухкомпонентный комплексный фермион λ образуют нединамический векторный супермультиплет. В частности, исключая дополнительные поля D и λ , приходим к условиям

$$\bar{n}_i n^i = 2\beta_0, \quad (1.8)$$

$$\bar{n}_i \xi^i = 0, \quad \bar{\xi}_i n^i = 0 \quad (1.9)$$

в пределе $e_0 \rightarrow \infty$.

Эта модель была получена как теория на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 2$ СКХД. Поля n_i параметризуют ориентационные модули неабелевой струны [5, 6, 7, 8]. Параметры m_i оказываются просто массами кварков

четырёхмерной теории. Затравочная константа связи β_0 соотносится с калибровочной константой связи g^2 , взятой на масштабе массы калибровочного бозона $m_G \sim g\sqrt{\mu t}$ при помощи соотношения (см. например [11])

$$2\beta_0 = \frac{4\pi}{g^2(m_G)} = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{CP}}, \quad (1.10)$$

Для того, чтобы четырёхмерная теория находилась в слабой связи, предполагается, что $m_G \gg \Lambda_{CP}$.

Эта модель была решена Виттеном в приближении больших N в безмассовом случае [23]. Решение в пределе больших N и ненулевых массах показало, что данная модель может находиться в двух различных режимах в слабой и сильной связи [31]. При малых масштабах масс $\Delta m < \Lambda_{CP}$ теория находится в фазе сильной связи с нулевым вакуумным средним $\langle n^i \rangle = 0$ и динамическим фотонным полем (Виттеновская фаза). Однако теперь фотон обладает массой вследствие киральной аномалии. Дальнодействие отсутствует, равно как и отсутствует конфайнмент кинков.

Как в сильной, так и в слабой связи в теории есть N вырожденных вакуумных состояний, в соответствии с индексом Виттена. Они нумеруются вакуумным средним поля σ [31]. При $\Delta m < \Lambda_{CP}$ вакуумные средние даются формулой

$$\sqrt{2}\sigma = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \times \Lambda_{CP} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.11)$$

Этот результат можно понять следующим образом. Киральная аномалия нарушает $U(1)$ R -симметрию, которая была в теории при нулевых массах, до Z_{2N} , которая затем спонтанно нарушается до Z_2 вакуумным средним поля σ (R заряд которого равен двум). В частности, из решения при больших N следует вакуумное среднее $\sqrt{2}|\sigma| = \Lambda_{CP}$. Z_{2N} симметрия гарантирует наличие N вакуумов, как показано на Рис. (2).

В пределе больших масс, расположенных на окружности (см. (1.3)), Z_{2N} симметрия остаётся ненарушенной. Это приводит к похожей структуре вакуумных средних поля σ при $\Delta m > \Lambda_{CP}$, а именно

$$\sqrt{2}\sigma = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \times \Delta m, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.12)$$

Эти формулы демонстрируют фазовый переход при $\Delta m = \Lambda_{CP}$. Как следует из решения при больших N , выше этой точки модель находится в хиггсовской

фазе. При этом одна из компонент поля n , например, нулевая компонента, развивает вакуумное среднее $\langle n^0 \rangle \neq 0$. Конфайнмент отсутствует в обеих фазах, в отличие от несуперсимметричного случая.

На самом деле, фазовый переход, обсуждавшийся выше, является следствием приближения больших N . При конечных N переход между двумя режимами теории гладкий. Это следует из точного суперпотенциала, который известен для $\mathcal{N} = (2, 2)$ $CP(N - 1)$ модели [25].

1.3 μ -Деформированная $CP(N - 1)$ модель

В этом разделе введена основная модель, рассматриваемая в данной работе – μ -деформированная $CP(N - 1)$ модель. Эта модель возникает как теория на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 2$ СКХД, деформированной массой μ присоединённого поля. Она была выведена в работе [18] в двух различных пределах – при малых и при больших значениях параметра деформации μ . Здесь и далее рассматривается случай, когда массы лежат на окружности (1.3), а параметр деформации принимает вещественные положительные значения, $\mu > 0$.

Первый эффект, описанный в [18], заключается в том, что поля n_i , входящие в $\mathcal{N} = (2, 2)$ $CP(N - 1)$ модель (1.7), после μ -деформации приобретают дополнительный потенциал, зависящий от разностей масс. Этот потенциал был найден в пределе малых μ в работе [32]. Вторым эффектом является то, что суперориентационные моды неабелевой струны приобретают массу. Другими словами, двумерные фермионы ξ^i (фермионные суперпартнёры полей n^i), безмассовые в суперсимметричной версии при $\mu = 0$, в случае малых μ приобретают массу $\lambda(\mu) \sim \mu$ [18]. При больших значениях параметра деформации они становятся тяжёлыми и отщепляются.

Можно составить лагранжиан деформированной $CP(N - 1)$ модели, который

бы описывал все эти эффекты:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \left| \nabla_\mu n^i \right|^2 + \bar{\xi}_i i \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \xi^i + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta) \\
& + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i0} |n^i|^2 \\
& + i \sum_i \left(\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu) \right) \bar{\xi}_{Ri} \xi_L^i - i\sqrt{2} \bar{n}_i (\lambda_R \xi_L^i - \lambda_L \xi_R^i) \\
& + i \sum_i \left(\sqrt{2}\bar{\sigma} - \bar{m}_i - \bar{\lambda}(\mu) \right) \bar{\xi}_{Li} \xi_R^i - i\sqrt{2} n^i (\bar{\lambda}_L \bar{\xi}_{Ri} - \bar{\lambda}_R \bar{\xi}_{Li}),
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\Delta m_{i0} = m_i - m_0$; $m_i, i = 0, \dots, N$ – массы, причём масса m_0 имеет наименьшую вещественную часть.

Коэффициентные функции $v(\mu)$ и $\lambda(\mu)$ были выведены в [18] на классическом уровне в пределах малых и больших значений μ :

$$v(\mu) = \begin{cases} \frac{4\pi\mu}{2\beta}, & \mu \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\beta} \frac{8\pi\mu}{\ln \frac{g^2\mu}{m}}, & \mu \rightarrow \infty \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\lambda(\mu) = \begin{cases} \lambda_0 \frac{\mu}{2\beta}, & \mu \rightarrow 0, \\ \text{const } g\sqrt{\mu m} \sim m_G, & \mu \rightarrow \infty \end{cases} \tag{1.15}$$

Здесь g^2 – константа связи четырёхмерной теории. Численное значение константы λ_0 есть $\lambda_0 \approx 3.7$ [18]. Можно заметить, что хотя и возможно избавиться от средней массы m в выражении (1.13), сделав соответствующий сдвиг поля σ , параметр m всё равно входит неявно через параметры μ -деформированной $SP(N-1)$ модели (1.13), которые выражаются в терминах параметров четырёхмерной СКХД.

Эта модель интерполирует между суперсимметричной и несуперсимметричной моделями, которые были кратко описаны выше. В пределе $\mu \rightarrow 0$ суперсимметрия восстанавливается до $\mathcal{N} = (2, 2)$, и модель переходит в (1.7). При больших значениях параметра деформации фермионы можно исключить из действия, и теория переходит в чисто бозонную модель (1.1).

Основным подходом, применяющимся в данной работе для изучения этой модели на квантовом уровне, является $1/N$ разложение. Для гладкого предела

больших N параметры модели должны варьироваться как

$$\begin{aligned} g^2 &\sim 1/N, & \beta &\sim N, & \mu &\sim N, \\ m &\sim 1, & v(\mu) &\sim 1, & \lambda(\mu) &\sim 1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Далее в данной работе для описания четырёхмерной теории будут использоваться три независимых физических параметра. Первым из них является масса калибровочного бозона в четырёхмерии,

$$m_G^2 = 2g^2 \mu t, \quad (1.17)$$

которая играет роль физического ультрафиолетового (УФ) масштаба обрезания $SP(N-1)$ модели на мировой поверхности неабелевой струны, см. [11]. Вторым параметром является вышеупомянутый масштаб разностей масс кварков $(m_i - m_j) \sim \Delta m$. Третий параметр характеризует степень нарушения суперсимметрии: это физическая масса присоединённой материи

$$m_{\text{adj}} = g^2 \mu = \frac{\mu}{\frac{N}{8\pi^2} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}}} \equiv \tilde{\mu}. \quad (1.18)$$

Этот параметр будет использоваться как настоящий (физический) параметр деформации. Все эти величины ведут себя в пределе больших N как N^0 . Здесь, Λ_{4d} есть масштаб четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД.

Из этого следует, что средняя масса t не является независимой величиной. Она может быть выражена через другие как

$$t = \frac{m_G^2}{2\tilde{\mu}}. \quad (1.19)$$

На масштабе массы калибровочного бозона (1.17) двумерная константа связи при малых μ даётся формулой ([6, 7], ср. (1.10))

$$2\beta = \frac{4\pi}{g^2} = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}}. \quad (1.20)$$

При больших μ константа связи на мировой поверхности, нормированная на масштабе m_G , становится [18]

$$2\beta = \text{const} \frac{\mu}{m} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2 \mu}{m}}. \quad (1.21)$$

Будучи выраженной в терминах инвариантных параметров, эта формула приобретает вид

$$2\beta = \text{const} \frac{N}{\pi} \frac{\tilde{\mu}^2}{m_G^2} \frac{\ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}^{\mathcal{N}=1}}}{\ln^2 \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}}, \quad (1.22)$$

где учтено, что при больших $\tilde{\mu}$ четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД со своим масштабom $(\Lambda_{4d}^{\mathcal{N}=1})^{2N} = \tilde{\mu}^N \Lambda_{4d}^N$.

В терминах независимых параметров, коэффициентные функции v и λ даются формулами

$$v(\tilde{\mu}) = \begin{cases} \tilde{\mu}, & \tilde{\mu} \rightarrow 0, \\ \frac{m_G^2}{\tilde{\mu}} \ln \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}, & \tilde{\mu} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\lambda(\tilde{\mu}) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_0 \tilde{\mu}, & \tilde{\mu} \rightarrow 0, \\ m_G, & \tilde{\mu} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.24)$$

где $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0/4\pi \approx 0.3$.

Как уже было отмечено ранее, масса калибровочного бозона в четырёхмерии m_G играет роль УФ обрезания для теории на мировой поверхности. На масштабах ниже m_G рассматриваемая двумерная модель асимптотически свободна (ср. (1.4)) с

$$2\beta(E) = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{E}{\Lambda_{2d}} \quad (1.25)$$

на масштабе E . Это соотношение фиксирует значение масштаба двумерной теории Λ_{2d} в терминах параметров четырёхмерной теории. При малых $\tilde{\mu}$,

$$\Lambda_{2d}(\tilde{\mu} \rightarrow 0) = \Lambda_{4d}, \quad (1.26)$$

в то время как при больших значениях $\tilde{\mu}$

$$\Lambda_{2d} = \Lambda_{4d}^{\mathcal{N}=1} \exp\left(-\text{const} \frac{\tilde{\mu}^2}{m_G^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}}\right) \quad (1.27)$$

Можно заметить, что в пределе $\tilde{\mu} \rightarrow \infty$ масштаб (1.27) становится экспоненциально мал, и двумерная теория может находиться в режиме сильной связи только на чрезвычайно маленьких масштабах энергий. Ниже будет показано, что фазовый переход по параметру $\tilde{\mu}$ происходит при маленьких значениях $\tilde{\mu}$, когда масштаб Λ_{2d} близок к суперсимметричному значению Λ_{4d} . Так как отщепление фермионов происходит при очень больших $\tilde{\mu} \gg m_G$, для изучения этого

фазового перехода можно пользоваться приближением малых $\tilde{\mu}$ в формулах (1.23) и (1.24).

В последующих главах будут исследованы различные фазы и структура вакуума теории на мировой поверхности. Есть два основных параметра, которые можно варьировать – параметр нарушения суперсимметрии $\tilde{\mu}$ и масштаб масс Δm . Как уже было отмечено выше, рассматриваемая модель (1.13) обладает богатой картиной фаз на плоскости $(\Delta m, \tilde{\mu})$.

2 Эффективный потенциал в однопетлевом приближении

В этой главе продолжено изучение модели (1.13). Строится решение в виде $1/N$ разложения [21]. Как уже было отмечено ранее, $\mathcal{N} = (2, 2)$ и несуперсимметричная $CP(N - 1)$ модели (в безмассовом случае) были решены Витте-ном в статье [23]. Этот метод был позднее обобщён на случай гетеротической $\mathcal{N} = (0, 2)$ модели [33], а также на случай ненулевых масс [26, 31]. Анализ, представленный в данной главе, по большей части повторяет и обобщает методы, использовавшиеся в перечисленных статьях.

2.1 Вывод эффективного потенциала

Начнём с вывода однопетлевого эффективного потенциала. Лагранжиан (1.13) хорошо подходит для этой цели, так как он квадратичен по динамическим полям n_i и ξ_i . Однако, не следует интегрировать по всем из них. Для этого имеются следующие причины.

Как было сказано в предыдущем разделе, модель (1.13) является, в определённом смысле, промежуточной между $\mathcal{N} = (2, 2)$ и несуперсимметричной $CP(N - 1)$ моделями, которые уже были изучены в литературе ранее. Поэтому можно использовать идеи и результаты, полученные при изучении этих моделей, для того чтобы лучше понять физику рассматриваемой здесь теории. Во-первых, можно ожидать, что эта теория может находиться по крайней мере в двух различных фазах – фазах сильной и слабой связи. Параметром порядка, различающим эти фазы, является вакуумное среднее полей n_i . В слабой связи (в т.н. хиггсовской фазе [26]) одно из полей n_i развивает ненулевое вакуумное среднее, $\langle n_{i_0} \rangle = 2\beta$. В режиме сильной связи (в т.н. кулоновской фазе) вакуумные средние полей n_i равны нулю.

Таким образом, разумно поступить следующим образом. Следует проинтегрировать по $N - 1$ полям n^i с $i \neq 0$ (и по соответствующим фермионам ξ_i). В итоге получится эффективное действие, являющееся функционалом от $n^0 \equiv n$, D и σ . Для отыскания вакуумных конфигураций следует минимизировать эффективное действие по отношению к n , D и σ .

Следует заметить, что хотя получающийся функционал зависит также от A_μ и фермионов $\xi_{L,R}^0$, $\lambda_{L,R}$, лоренц-инвариантность подразумевает что вакуумные средние этих полей равны нулю. Также, среди n^i в качестве поля с возможно ненулевым вакуумным средним мы выбираем именно компоненту n^0 потому, что соответствующая масса m_0 имеет минимальную вещественную часть (см. (1.3)). Как будет установлено ниже, $\langle n^0 \rangle \neq 0$ соответствует истинному вакуумному состоянию в хиггсовской фазе.

При интегрировании по полям n^i и ξ^i получаются следующие определители:

$$\frac{\prod_{i=1}^{N-1} \det \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right)}{\prod_{i=1}^{N-1} \det \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right)}, \quad (2.1)$$

откуда следует эффективный потенциал

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следующий шаг – вычисление следов, входящих в эту формулу. При $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ суперсимметрия восстанавливается, и это выражение является хорошо определённым. Однако при ненулевых деформациях в нём появляются квадратичные расходимости, и требуется регуляризация. В данном случае удобнее всего воспользоваться регуляризацией Паули-Вилларса (схожая процедура была проведена в [34]). Для этого нужно ввести поля-регуляторы с массами b_a , f_a , $a = 1, 2$, тогда регуляризованный потенциал принимает вид

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) + \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} B_a \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + b_a^2 \right) \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right) - \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} F_a \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + f_a^2 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{a=0}^2 B_a = -1, \quad \sum_{a=0}^2 B_a b_a^2 = -m_{\text{bos}}^2 \quad (2.4)$$

Из этих уравнений следует, что

$$B_1 = \frac{b_2^2 - m_{\text{bos}}^2}{b_1^2 - b_2^2}, \quad B_2 = -\frac{b_1^2 - m_{\text{bos}}^2}{b_1^2 - b_2^2} \quad (2.5)$$

Массы полей-регуляторов играют роль УФ обрезания. Схожие соотношения можно записать и для коэффициентов фермионных регуляторов.

Кроме того, следует должным образом отнормировать следы, вычтя вклад от тривиального фона $\text{Tr} \ln(-\partial_k^2)$ из бозонных и фермионных следов. При этом мы приходим к

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2) |n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left[\left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \ln \left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \right. \\ & \left. - \left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \frac{b_1^2 \ln b_1^2 - b_2^2 \ln b_2^2}{b_1^2 - b_2^2} \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left[|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \ln |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right. \\ & \left. - |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \frac{f_1^2 \ln f_1^2 - f_2^2 \ln f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Полученная формула является несколько сложной для анализа. Чтобы её упростить, можно рассмотреть предел [34]

$$b_1^2 = xM_{\text{uv}}^2, \quad b_2^2 = M_{\text{uv}}^2, \quad f_1^2 = xM_{\text{uv}}^2, \quad f_2^2 = M_{\text{uv}}^2, \quad x \rightarrow 1, \quad (2.7)$$

где M_{uv} – УФ обрезание. Далее, в разделе 1.3 была написана формула для затравочной константы связи

$$2\beta(M_{\text{uv}}) = \frac{N}{4\pi} \ln \frac{M_{\text{uv}}^2}{\Lambda^2}, \quad (2.8)$$

Здесь, $\Lambda \equiv \Lambda_{2d}$ есть масштаб рассматриваемой двумерной модели. С учётом

этого соотношения получается итоговая формула для эффективного потенциала,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{eff}} = & (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} iD \left[1 - \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left(v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \left[1 - \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{M_{\text{uv}}^2} \right] \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \left[1 - \ln \frac{|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2}{M_{\text{uv}}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Можно заметить, что регуляризованный эффективный потенциал зависит от масштаба УФ обрезания M_{uv} . При этом нельзя произвести никакое вычитание, которое бы сократило эту зависимость. Для этого имеются свои причины. Во-первых, рассматриваемая $\tilde{\mu}$ -деформированная $\text{CP}(N-1)$ модель (1.13) является лишь низкоэнергетической теорией на мировой поверхности неабелевой струны, и УФ масштаб имеет чёткий физический смысл, а именно

$$M_{\text{uv}} = m_G, \quad (2.10)$$

где m_G – масса калибровочного бозона четырёхмерной теории. Кроме того, масса фермионов $\lambda(\mu)$ в (2.9) изменяется от нуля при $\tilde{\mu} = 0$ до $m_G = M_{\text{uv}}$ в пределе $\tilde{\mu} \rightarrow \infty$, см. (1.24). Поэтому M_{uv} на самом деле является физическим параметром данной модели, избавляться от которого вовсе не следует.

Ренормированная константа связи даётся формулой

$$2\beta_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \quad (2.11)$$

2.2 Вакуумные уравнения

Для того, чтобы найти вакуумные конфигурации, следует минимизировать эффективный потенциал (2.9). При варьировании по D получается уравнение

$$|n|^2 = 2\beta_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \quad (2.12)$$

Вариация по \bar{n} приводит к

$$(iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)n = 0 \quad (2.13)$$

Наконец, третье уравнение получается при минимизации по отношению к σ ,

$$\begin{aligned} -(\sqrt{2}\sigma - m_0)|n|^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} (\sqrt{2}\sigma - m_i) \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{m_G^2} \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} (\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)) \ln \frac{|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2}{m_G^2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

причём здесь и ниже УФ масштаб M_{uv} заменен на соответствующее физическое значение m_G .

Эти три уравнения составляют основной набор уравнений, которые предстоит исследовать. Кроме того, на вакуумных состояниях должно быть выполнено условие

$$\beta_{\text{ren}} \geq 0, \quad (2.15)$$

которое следует из очевидного соотношения $2\beta_{\text{ren}} = |n|^2 \geq 0$.

Из (2.12) и (2.13) непосредственно следует, обязательно выполнено одно из условий: или

$$n = \beta_{\text{ren}} = 0 \quad (2.16)$$

или же

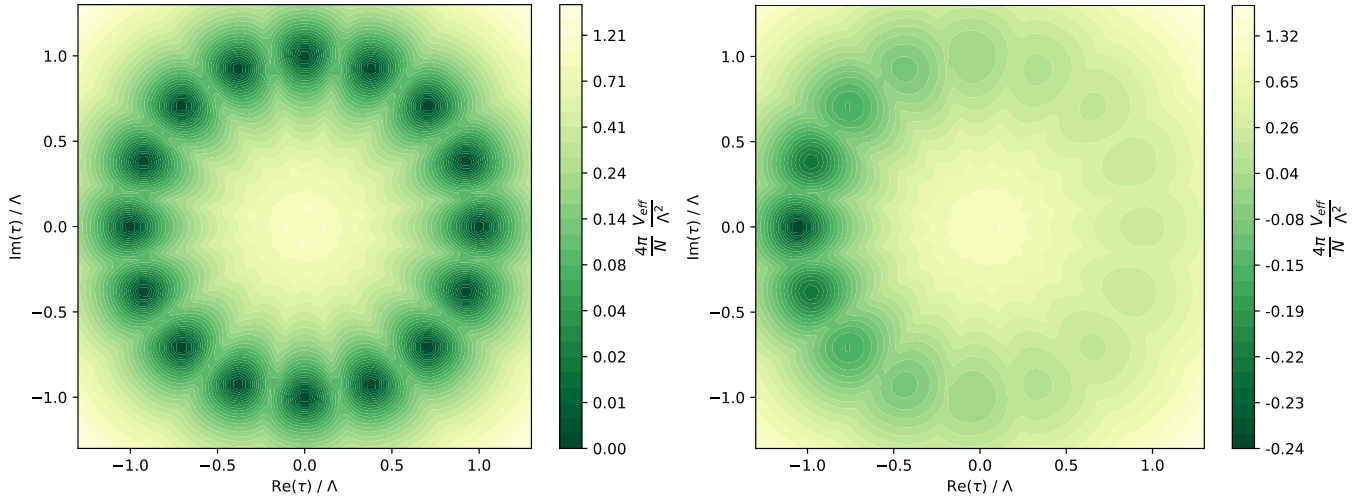
$$iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2 = 0. \quad (2.17)$$

Первый вариант соответствует режиму сильной связи, в котором вакуумное среднее поля n вместе с ренормированной константой связи равны нулю. Вторая возможность реализуется в хиггсовском режиме, в котором n поле развивает ненулевое вакуумное среднее. Каждый из этих режимов будет подробно исследован в последующих главах.

3 Режим сильной связи

В этой главе будет продолжено изучение рассматриваемой модели в режиме сильной связи, который определён условием (2.16). Эта фаза возникает при масштабах масс $\Delta m \lesssim \Lambda$, см. например [21, 26, 31].

Глава начинается с рассмотрения более простого случая $\Delta m = 0$. Поведение рассматриваемой модели различно при разных значениях параметра деформации: при промежуточных $\tilde{\mu}$ возникает фазовый переход, тогда как в пределе большой массы фермиона $\lambda \rightarrow m_G$ рассматриваемая теория (1.13) действительно переходит в несуперсимметричную $CP(N-1)$ модель (1.1), как и ожидалось априори. Эти результаты также будут обобщены на случай различных масс m_i , когда параметр Δm отличен от нуля.



(а) $\lambda = 0$, суперсимметричный случай, вырожденные вакуумы (б) $\lambda > 0$, нарушенная суперсимметрия, расщепление квазивакуумов

Рис. 2: Эффективный потенциал (3.3) на комплексной плоскости $\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0$. Поле D исключено при помощи вакуумных уравнений.

3.1 Малые деформации

Начнём с рассмотрения простейшего случая одинаковых масс,

$$m_0 = m_1 = \dots = m_{N-1} \equiv m \quad (3.1)$$

При таком выборе слагаемые в потенциале, пропорциональные $v(\mu)$, обращаются в нуль, и единственной деформацией действия остаётся дополнительная

масса фермиона λ . В этой главе мы не будем явно выписывать зависимость этого параметра от $\tilde{\mu}$.

Чтобы сделать дальнейшие формулы менее громоздкими, обозначим

$$\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0 \quad (3.2)$$

Тогда эффективный потенциал можно записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{eff}} = & \frac{N}{4\pi} iD \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{N}{4\pi} |\tau|^2 \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{m_G^2} \right] \\ & - \frac{N}{4\pi} |\tau - \lambda(\mu)|^2 \left[1 - \ln \frac{|\tau - \lambda(\mu)|^2}{m_G^2} \right] + \Delta V(\arg \tau), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\tau = |\tau| e^{i \arg \tau}$. В этом выражении было добавлено новое слагаемое $\Delta V(\arg \tau)$, отсутствовавшее в (2.9). Оно учитывает киральную аномалию, и возникает уже в $\mathcal{N} = (2, 2)$ CP($N - 1$) модели при $\tilde{\mu} = 0$. Как было показано Виттенем [23], из-за киральной аномалии фотон становится массивным, с массой равной 2Λ . Комплексный скаляр σ является суперпартнёром фотонного поля, и тоже приобретает массу 2Λ . В частности, фаза этого скаляра $\arg \tau$ становится массивной.

Этот эффект может быть учтён введением в (3.3) дополнительного потенциального слагаемого $\Delta V(\arg \tau)$. Оно строится следующим образом. При малых $\tilde{\mu}$ возможные вакуумные средние поля τ приблизительно равны соответствующим суперсимметричным значениям,

$$\tau_k^{\text{SUSY}} = -\Lambda \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N - 1, \quad (3.4)$$

ср. (1.11). Следует разделить полный угол 2π на N одинаковых интервалов с центрами в вакуумных значениях, $\arg \tau_k^{\text{SUSY}} = 2\pi k/N + \pi$, $k = 0, \dots, (N - 1)$, и определить потенциал $\Delta V(\arg \tau)$ как квадратичную функцию на каждом интервале. А именно,

$$\Delta V(\arg \tau) = \frac{N}{4\pi} \frac{m_{\arg \tau}^2}{2} (\arg \tau - \arg \tau_k^{\text{SUSY}})^2, \quad \frac{2\pi(k - \frac{1}{2})}{N} < \arg \tau - \pi < \frac{2\pi(k + \frac{1}{2})}{N}, \quad (3.5)$$

где $m_{\arg \tau}$ – масса поля $\arg \tau$. Вычисление этой массы может быть найдено в работе [21]. При малых деформациях, она лишь немного отличается от Витте-новского результата [23]

$$m_{\arg \tau}^{\text{SUSY}} = 2\Lambda. \quad (3.6)$$

Без дополнительного слагаемого $\Delta V(\arg \tau)$ N дискретных вакуумов исчезают мгновенно с включением параметра $\tilde{\mu}$. Это происходит благодаря расщеплению квазивакуумов. Ниже будет показано, что с учётом $\Delta V(\arg \tau)$ квазивакуумы всё ещё остаются при малых $\tilde{\mu}$ и исчезают только при некотором конечном критическом значении параметра деформации $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$, которое может быть отождествлено с точкой фазового перехода. Возможные поправки высших степеней к квадратичному потенциалу (3.5) подавлены в пределе больших N , т.к. ширина каждого интервала является малой величиной, пропорциональной $1/N$.

3.1.1 Энергия вакуума

При включении параметра деформации $\tilde{\mu}$ масса фермиона ξ^i , равная $\lambda(\tilde{\mu})$, становится отличной от нуля. Тем самым, как киральная симметрия, так и двумерная суперсимметрия оказываются нарушенными явным образом. В результате Z_N симметрия также нарушается, и вакуумные средние полей σ больше не лежат на одной окружности. Более того, при $\tilde{\mu} = 0$ в нашей модели имеются N вырожденных вакуумов (3.4). Когда параметр $\tilde{\mu}$ становится ненулевым, энергии соответствующих вакуумов расщепляются, и все они (кроме одного при $k = 0$) превращаются в квазивакуумы. Единственное настоящее вакуумное состояние соответствует $k = 0$, см. Рис. 2. Как уже обсуждалось в разделе 1.1, это приводит к конфайнменту кинков.

Оказывается, что существует два механизма, ответственных за расщепление вакуумных энергий. Один из них происходит из эффективного потенциала (3.3) и доминирует при малых $\tilde{\mu}$. Другой характерен для несуперсимметричной $SP(N-1)$ модели, см. раздел 1.1. Он происходит за счёт постоянного электрического поля кинков, интерполирующих между соседними квазивакуумами, и доминирует при больших $\tilde{\mu}$. В данном разделе будет изучен первый механизм, тогда как второй будет рассмотрен ниже.

Расщепление энергий при малых $\tilde{\mu}$ может быть выведено из разложения эффективного потенциала (3.3) по малой величине $\lambda(\mu)$:

$$\mathcal{V}_{\text{eff}} = \mathcal{V}_{\text{SUSY}} + \delta\mathcal{V}, \quad (3.7)$$

где $\mathcal{V}_{\text{SUSY}}$ – суперсимметричный эффективный потенциал, соответствующий

$\lambda = 0$, тогда как

$$\delta\mathcal{V} \approx \frac{N}{4\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \tau \cdot \lambda \ln \frac{m_G^2}{|\tau|^2} \quad (3.8)$$

представляет собой $O(\lambda)$ деформацию. Подставляя невозмущённые вакуумные средние (3.4) в (3.8), можно получить энергии квазивакуумов. Как уже было отмечено ранее, основное состояние (истинный вакуум) располагается в точке

$$\tau_0 = -\Lambda = \Lambda e^{i\pi}, \quad (3.9)$$

в то время как положение первого квазивакуума даётся формулой

$$\tau_1 = -\Lambda \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \approx -\Lambda - \Lambda \frac{2\pi i}{N} + \Lambda \frac{2\pi^2}{N^2} \quad (3.10)$$

Подставляя эти выражения в (3.8), получим искомое расщепление²

$$E_1 - E_0 = \frac{2\pi}{N} \lambda \Lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda} \quad (3.11)$$

Эта формула показывает, что теперь кинки, интерполирующие между этими двумя вакуумами, испытывают конфайнмент, в отличие от суперсимметричного случая.

3.1.2 Поправки к вакуумным средним

Выведем поправки к невозмущённым вакуумным средним (3.4). Минимизируя потенциал (3.3), получим:

$$2\beta_{\text{ren}} = \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} = 0 \Rightarrow iD + |\tau|^2 = \Lambda^2 \quad (3.12)$$

$$|\tau| \ln \frac{|\tau - \lambda(\tilde{\mu})|^2}{\Lambda^2} + \cos(\arg \tau) \lambda(\tilde{\mu}) \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} = 0 \quad (3.13)$$

$$- \sin(\arg \tau) \lambda |\tau| \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} + \frac{m_{\text{arg } \tau}^2}{2} (\arg \tau - \arg \tau_k^{\text{SUSY}}) = 0 \quad (3.14)$$

В приближении малых $\tilde{\mu}$ легко найти приближённое решение:

$$|\tau| \approx \Lambda - \cos(\arg \tau_k^{\text{SUSY}}) \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (3.15)$$

²Формула (3.11) не учитывает поправки от аномалии следа тензора энергии-импульса, однако эта поправка является величиной следующего порядка малости по малому параметру $\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{M_{\text{UV}}}{\Lambda}$.

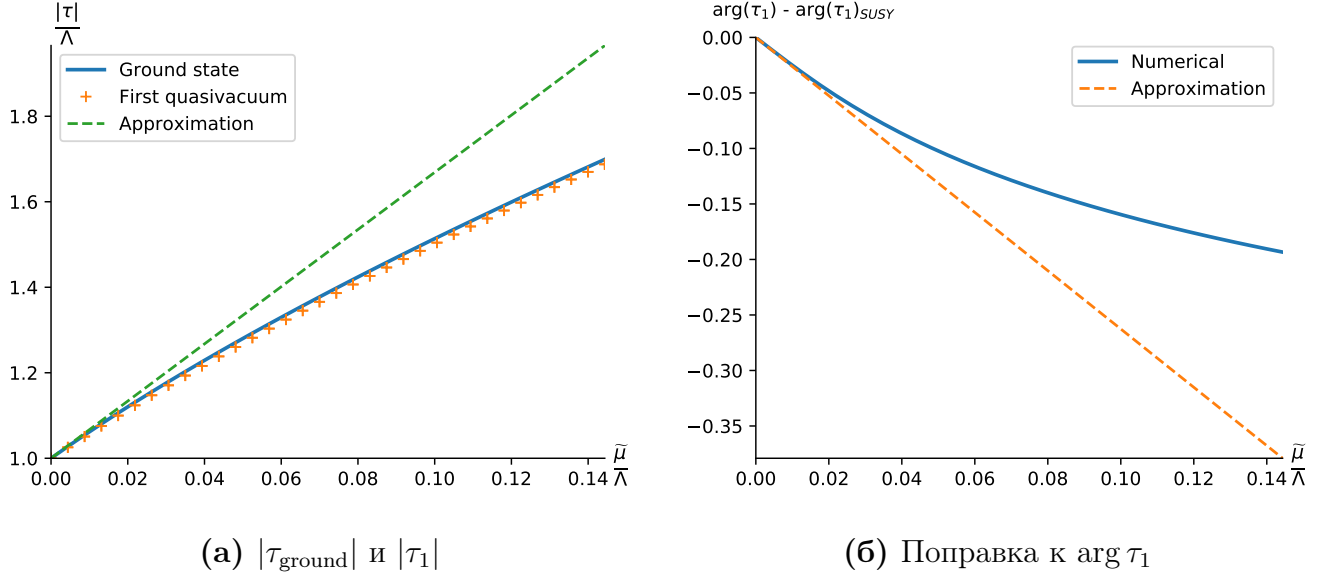


Рис. 3: Результаты численного расчёта минимумов τ_{ground} и τ_1 , полученных непосредственной минимизацией (3.3). На Рис. а, зелёной прерывистой линией показано приближённое значение (3.17), сплошной синей линией – численное значение $|\tau_{\text{ground}}|$, а $|\tau_1|$ показано красными знаками «+». На Рис. б изображен график приближённой формулы для поправки к $\arg \tau_1$ ((3.18), последнее слагаемое), а также численное значение этой величины.

$$\arg \tau \approx \arg \tau_k^{\text{SUSY}} + \sin(\arg \tau_k^{\text{SUSY}}) \frac{2\lambda\Lambda}{m_{\arg \tau}^2} \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (3.16)$$

В частности, вместо $\tau_0 = -\Lambda$ получим подправленное значение

$$\tau_{\text{ground}} \approx -\Lambda - \frac{1}{2}\lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (3.17)$$

тогда как для первого квазивакуума (3.10)

$$\begin{aligned} |\tau_1| &\approx |\tau_{\text{ground}}| \approx \Lambda + \frac{1}{2}\lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \\ \arg \tau_1 &\approx \underbrace{\left(\pi + \frac{2\pi}{N} \right)}_{\text{unperturbed}} - \frac{2\pi}{N} \frac{\lambda}{2\Lambda} \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

где была использована формула (3.6) для невозмущённой массы поля σ . Эти результаты согласуются с численным расчётом, см. Рис. 3.

Заметим, что при

$$\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} = 1 \quad (3.19)$$

из этих приближённых формул следует $\arg \tau_1 = \tau_{\text{ground}} = \pi$, и квазивакуум, соответствующий τ_1 , исчезает (сливается с основным состоянием). Это свидетельствует о том, что в окрестности точки (3.19) может произойти фазовый

переход. Впоследствии мы увидим, что это действительно так, см. Раздел 3.3 ниже.

Квазивакуум с наибольшей энергией расположен в точке

$$\tau_{\text{high}} \approx \Lambda - \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (3.20)$$

Дальнейший анализ уравнения (3.13) показывает, что это решение пропадает при

$$\lambda = \frac{2\Lambda}{e \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}} \quad (3.21)$$

что согласуется с (3.22). Это свидетельствует о том, что в окрестности критического значения

$$\lambda_{\text{crit}} \sim \frac{\Lambda}{\ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}} \quad (3.22)$$

распадаются все квазивакуумы (ср. (3.19)).

3.2 Эффективное действие

Как уже было упомянуто, существует два механизма расщепления энергий квазивакуумов при ненулевых $\tilde{\mu}$, причём оба ведут к конфайнменту кинков. Один из них – появление поправок по $\tilde{\mu}$ в эффективном потенциале (3.3). За счёт этих поправок расщепляются значения эффективного потенциала в точках минимумов, что описывается формулой (3.11). Во втором механизме участвует постоянное электрическое поле кинков, интерполирующих между квазивакуумами. Фотон A_μ становится динамическим на квантовом уровне [23]. Ниже мы увидим, что при ненулевых значениях параметра деформации $\tilde{\mu}$ у фотона появляется безмассовая компонента. Вследствие этого возникает линейный кулоновский потенциал, хотя вклад электрического поля в энергию вакуума гораздо меньше чем (3.11). Однако при достаточно больших $\tilde{\mu}$ все $N - 1$ σ -квазивакуумы распадаются, и расщепление обуславливается исключительно электрическим полем. Это изменение характера расщепления идентифицируется здесь как фазовый переход. В соответствующей точке производная от $(E_1 - E_0)$ терпит разрыв.

3.2.1 Вывод эффективного действия

Рассмотрим эффективное действие для $\tilde{\mu}$ -деформированной $CP(N-1)$ модели (1.13), которое может быть получено функциональным интегрированием по полям n^i и ξ^i в приближении больших N . Ослабляя условие того, что σ и D являются постоянными полями (это условие было использовано в Разделе 2), рассмотрим однопетлевое эффективное действие как функционал, зависящий от полей векторного супермультиплетта.

Рассмотрим окрестность истинного вакуума, для которой $\text{Im}\langle\sigma\rangle = 0$. Бозонная часть действия может быть записана в виде (в пространстве Минковского³)

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Im}\sigma|^2 + \frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Re}\sigma|^2 - V(\sigma) - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \text{Im}\sigma F^* \right. \quad (3.23)$$

где F^* – дуальный тензор (скаляр) напряжённости электрического поля,

$$F^* = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.24)$$

Такое эффективное действие впервые было представлено для $\mathcal{N} = (2, 2)$ и $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперсимметричных $CP(N-1)$ моделей в [33]. В представленной здесь работе это действие обобщено на $\tilde{\mu}$ -деформированную $CP(N-1)$ модель (1.13). Потенциал $V(\sigma)$ может быть получен из (2.9) исключением поля D через соответствующие вакуумные уравнения.

Коэффициенты перед кинчленами для полей A_μ и σ конечны после учёта петлевых поправок, что отражает наблюдение Виттена о том, что эти поля становятся физическими [23]. Последнее слагаемое в (3.23) отвечает за $A_\mu - \sigma$ смешивание и является следствием киральной аномалии. Из-за этого смешивания, казалось бы безмассовые фотон и фаза поля σ приобретают массу (3.6) уже в невозмущённой теории при $\tilde{\mu} = 0$. Это слагаемое есть в действие также и после введения деформации.

Коэффициенты этого эффективного действия происходят из петлевых поправок. Рассмотрим низкие энергии, когда внешние импульсы малы. Всего имеем несколько вкладов. Перенормировка фотонной волновой функции происходит из диаграммы на Рис. 4а, а также из такой же диаграммы с бозонной петлёй.

³В данном разделе теория рассматривается в пространстве-времени Минковского с метрикой $g^{\mu\nu} = \text{diag}\{+, -\}$ и тензором Леви-Чивиты с $\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{01} = +1$.

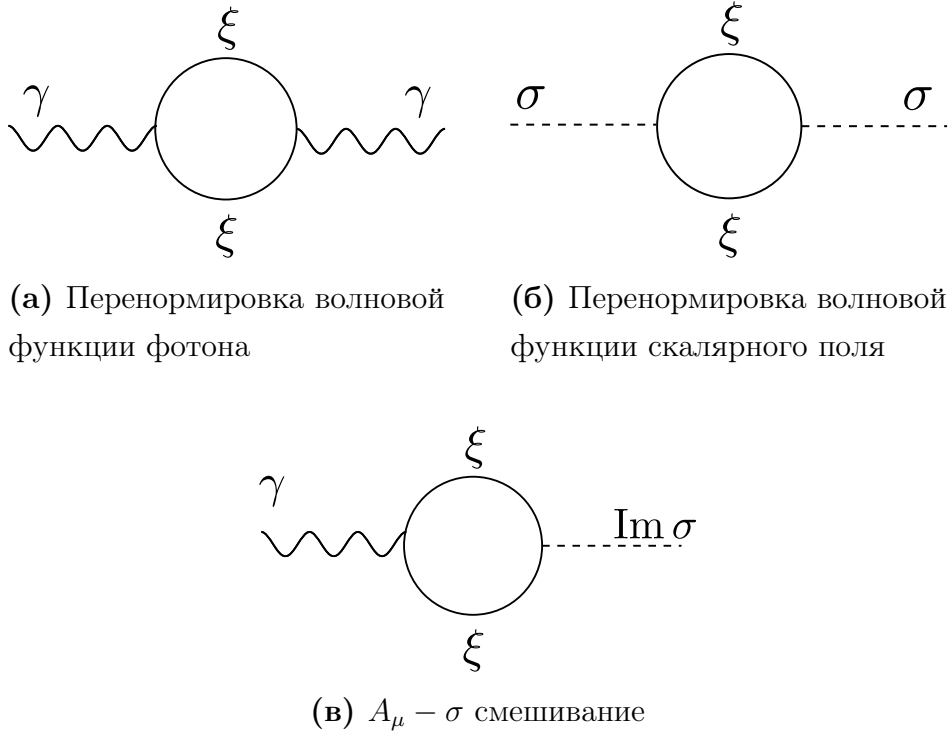


Рис. 4: Вклады в эффективное действие

Перенормировки волновых функций $\text{Re } \sigma$ и $\text{Im } \sigma$ даются диаграммами на Рис. 4б и соответствующей бозонной диаграммой. Наконец, смешивающее слагаемое происходит из диаграммы на Рис. 4в. Для масс (1.3) и вакуума с $\text{Im}\langle\sigma\rangle = 0$ нормировочные множители даются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{M_{\xi_k}^2 + 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} + \frac{2(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_k)^2}{3 m_{n_k}^4} \right] \\
\frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3M_{\xi_k}^2 - 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} + \frac{2(\text{Im } m_k)^2}{3 m_{n_k}^4} \right] \\
\frac{1}{e_\gamma^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{m_{n_k}^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{M_{\xi_k}^2} \right] \\
b_{\gamma, \text{Im } \sigma} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\tilde{\mu})}{M_{\xi_k}^2}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Здесь, $M_{\xi_k}^2$ и $m_{n_k}^2$ – массы полей ξ_k и n_k соответственно:

$$\begin{aligned}
M_{\xi_k}^2 &= |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\tilde{\mu})|^2 \\
m_{n_k}^2 &= i\langle D \rangle + v(\tilde{\mu})\Delta m_k + |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k|^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Детали этого расчёта могут быть найдены в статье [21].

Следующий шаг – диагонализация массовой матрицы фотона и σ -поля в действии (3.23), см. [21]. Как уже было упомянуто, из такой диагонализации следует, что при введении деформации фотон приобретает безмассовую компоненту. Эта компонента ответственна за постоянное электрическое поле в квази-вакуумах. Данное электрическое поле приводит ко второму механизму расщепления квазивакуумов; соответствующий вклад даётся формулой [21]

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2e_\gamma^2} F_{01}^2 = \frac{2\pi}{N} \left(\lambda \ln \frac{M}{\Lambda} \right)^2. \quad (3.27)$$

Этот эффект мал при небольших $\tilde{\mu}$ и становится доминирующим, когда $\tilde{\mu}$ выше точки фазового перехода. В следующем разделе этот результат также будет получен из других соображений.

3.2.2 Кулоновский потенциал и энергия вакуума

В этом разделе рассматривается формирование постоянного электрического поля в квазивакуумах. Это рассмотрение обобщает метод, разработанный Виттенем в [23] для $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной $CP(N-1)$ модели.

Рассмотрим эффективное действие (3.23) с учётом пробных материальных зарядов,

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \text{Im}\sigma F^* + j_\mu A^\mu \right\}, \quad (3.28)$$

Пусть ток материи представлен кинком, локализованным около точки $x = x_0$ с электрическим зарядом $+1$, тогда $j_\mu = (\delta(x - x_0), 0)$. Кроме того, $F^* = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа для фотонного поля может быть записано как

$$-\frac{1}{e_\gamma^2} \partial_x \mathcal{E} - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \partial_x \text{Im}\sigma = -j_0, \quad (3.29)$$

где

$$\mathcal{E} = F_{01} \quad (3.30)$$

есть напряжённость электрического поля. Производя интегрирование по пространственной координате, получим

$$\frac{1}{e_\gamma^2} (\mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(-\infty)) + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} (\text{Im}\sigma(\infty) - \text{Im}\sigma(-\infty)) = 1 \quad (3.31)$$

В суперсимметричном случае $\tilde{\mu} = 0$ фотон имеет массу, так что постоянное электрическое поле отсутствует: $\mathcal{E}(\infty) = \mathcal{E}(-\infty) = 0$. Поэтому

$$\sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im} \sigma} (\text{Im} \sigma(\infty) - \text{Im} \sigma(-\infty)) = 1 \quad (3.32)$$

Так как

$$b_{\gamma, \text{Im} \sigma} = \frac{1}{2\pi} \frac{N}{\Lambda}, \quad (3.33)$$

(см. (3.25) для $\tilde{\mu} = 0$), имеем

$$\sqrt{2} (\text{Im} \sigma(\infty) - \text{Im} \sigma(-\infty)) = 2\pi \frac{\Lambda}{N}. \quad (3.34)$$

Если подставить сюда положение истинного вакуума $\tau(-\infty) = -\Lambda$, становится очевидно, что эта формула – лишь приближение для

$$\tau(\infty) = -\Lambda e^{\frac{2\pi i}{N}}, \quad (3.35)$$

т.е. для вакуумного среднего σ в первом квазивакууме, см. (3.10). Этот результат для случая $\mathcal{N} = (2, 2)$, давно полученный Виттенем [23], показывает наличие N вакуумов, а также кинков, интерполирующих между ними.

Обобщим этот результат на случай небольших деформаций. Рассмотрим уравнение (3.31) для кинка, интерполирующего между основным состоянием (3.17) на $x = -\infty$ и первым квазивакуумом (3.18) при $x = +\infty$. Полагая $\mathcal{E}(-\infty) = 0$, из (3.31) получим

$$\frac{1}{e_\gamma^2} \mathcal{E}(\infty) + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im} \sigma} (\text{Im} \sigma(\infty) - \pi) = 1 \quad (3.36)$$

Используя (3.18) и (3.33) получим для напряжённости электрического поля

$$\mathcal{E}(\infty) = e_\gamma^2 \frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda}. \quad (3.37)$$

Отсюда видно, что теперь кинк всё-таки является источником постоянного электрического поля. Из этого получается вклад в расщепление между первым квазивакуумом и истинным вакуумом,

$$(E_1 - E_0)|_\varepsilon = \frac{1}{2e_\gamma^2} \mathcal{E}^2 = \frac{2\pi}{N} \left(\lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right)^2 \quad (3.38)$$

Этот результат совпадает с (3.27), полученным из диагонализации члена фотон- σ . При малых $\tilde{\mu}$, соответствующий вклад мал по сравнению с σ -расщеплением из (3.11).

3.3 Фазовый переход второго рода

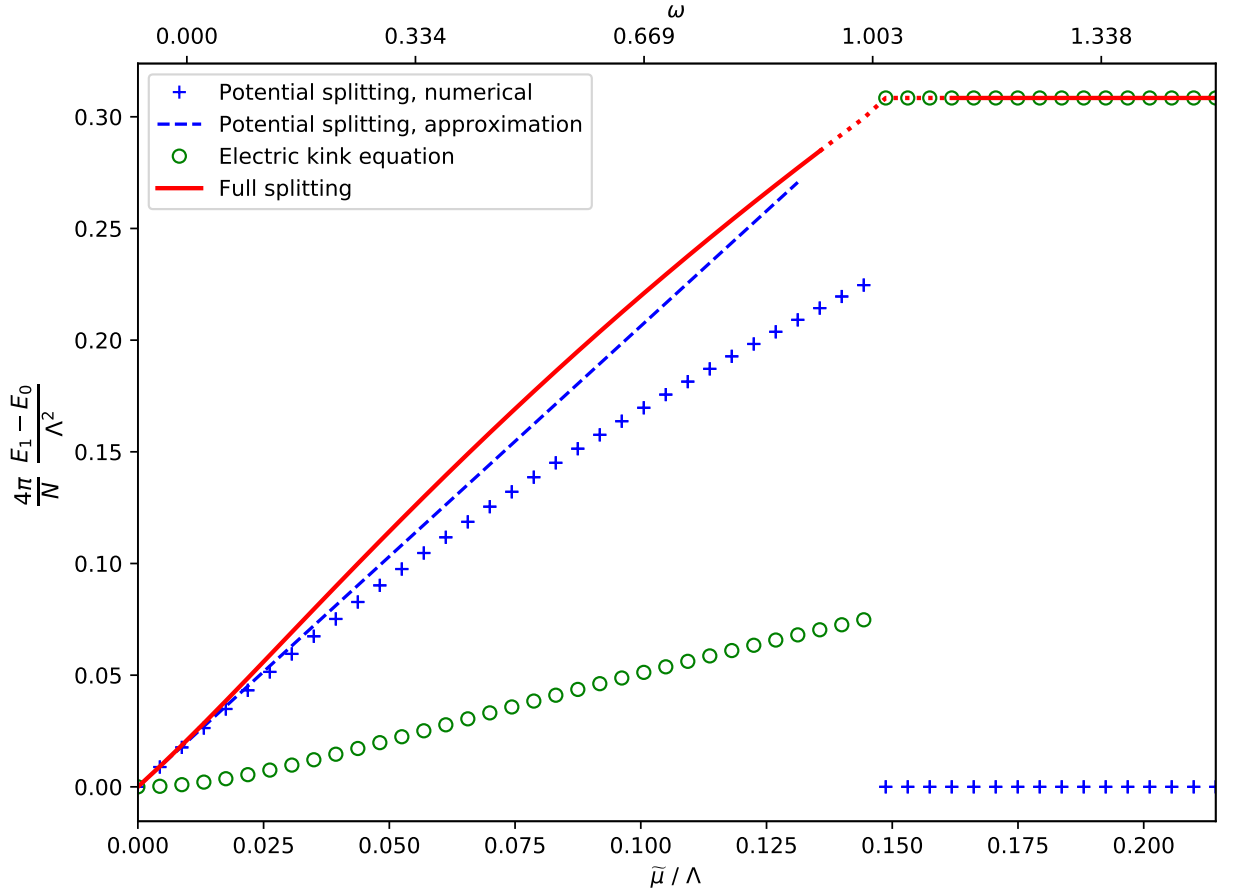


Рис. 5: Различные вклады в энергию вакуума. По вертикальной оси отложена величина расщепления $E_1 - E_0$. Значения параметра деформации $\tilde{\mu}$ отложены на нижней горизонтальной оси (в единицах Λ), а на верхней – параметр ω (3.39). Зелёными кружочками показан вклад от электрического поля (решение уравнения (3.31), которое ниже точки фазового перехода даётся формулой (3.38)), значками «+» показано расщепление от потенциала (3.3) (прерывистой синей линией показано приближение (3.11)). Сплошная красная линия обозначает сумму этих двух вкладов. Фазовый переход возникает при $\omega \approx 1$, где график полной энергии терпит излом. Данная модель не даёт точных результатов в окрестности точки фазового перехода, поэтому к этой приходится экстраполировать с двух сторон (красная прерывистая линия).

Из всего вышесказанного следует, что вакуумная энергия (а точнее, расщепление между основным состоянием и первым квазивакуумом) происходит от двух вкладов, зависящих от параметра

$$\omega = \frac{\lambda(\tilde{\mu})}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \quad (3.39)$$

Первый вклад происходит от разницы значений эффективного потенциала

между разными точками минимумов σ_i , см. (3.11). При включении параметра ω (т.е. для ненулевых значений параметра деформации $\tilde{\mu}$), этот вклад растёт сперва линейно по ω , а затем обрывается до нуля, когда соседний локальный минимум по σ пропадает.

Второй вклад обусловлен электрическим полем заряженных кинков, интерполирующих между квазивакуумами, см. (3.27) и (3.38). Этот вклад вначале растёт как ω^2 , а в точке, где ближайший квазимиимум по σ исчезает, электрическое поле «подпрыгивает»⁴ до значения, насыщающего (3.31).

Эти два вклада терпят разрыв при одном и том же значении параметра деформации, и это критическое значение и есть точка фазового перехода. Оно соответствует $\omega_c \sim 1$, т.е. (см. (3.22) и (3.19))

$$\lambda_{\text{crit}} = \lambda(\tilde{\mu}_{\text{crit}}) \sim \frac{\Lambda}{\ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}}. \quad (3.40)$$

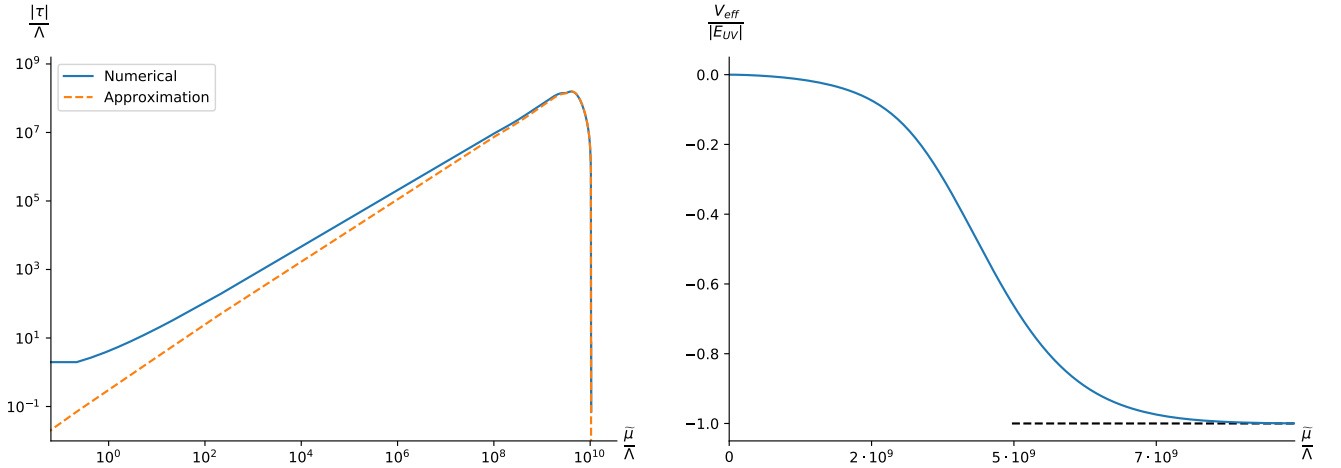
Полная энергия вакуума даётся суммой этих двух вкладов, и из общих соображений можно ожидать, что она меняется непрерывно. Скорее, разрывной является её первая производная, и фазовый переход – второго рода. Численный расчёт это подтверждает, см. Рис. 5. В точке, где квазивакуум пропадает, эти два вклада терпят разрывы, величины которых в точности компенсируют друг друга, так что полная энергия остаётся непрерывной. Однако, следует отметить, что точность используемого здесь метода недостаточна для изучения близкой окрестности фазового перехода. Дело в том, что формула для потенциала на $\arg \tau$ (3.5) справедлива только в окрестностях минимумов (3.4), и точная форма этого потенциала между двумя соседними минимумами неизвестна.

При малых деформациях, главным вкладом в энергию вакуума является расщепление по σ (3.11). После фазового перехода вакуумная энергия определяется исключительно электрическим полем кинка. Как обсуждалось в Разделе 1.1, именно электрическое поле ответственно за расщепление уровней энергий квазивакуумов в несуперсимметричной $CP(N-1)$ модели. Это согласуется с предыдущими результатами, т.к. при больших $\tilde{\mu}$ выше точки фазового перехода рассматриваемая теория становится несуперсимметричной $CP(N-1)$ моделью.

⁴Это «подпрыгивание» не видно из рассмотрения пропагатора (3.27), т.к. это рассмотрение справедливо только пертурбативно вблизи истинного вакуума, и не учитывает наличие других квазивакуумов по σ .

В заключение отметим, что параметр ω , имеющий значение для расщепления квазивакуумов, усилен большим логарифмом $\ln m_G/\Lambda \gg 1$. Поэтому фазовый переход происходит при $\tilde{\mu}_c \sim \lambda_c$ в соответствии с (3.40), что намного меньше $\tilde{\mu} \sim \Lambda$. Это – очень маленькие величины в сравнении с m_G , т.к. мы предполагаем, что $m_G \gg \Lambda$ для того, чтобы четырёхмерная теория находилась в режиме слабой связи. При таких значениях параметра деформации $\tilde{\mu}$ теория находится гораздо ниже масштаба, на котором отщепляются поля присоединённого представления в четырёхмерной теории, а именно $\tilde{\mu} \gg m_G$. В частности, масштаб Λ теории на мировой поверхности ближе к Λ_{4d} , а не к асимптотическому значению (1.27) для больших $\tilde{\mu}$.

3.4 Большие деформации



(а) Вакуумное среднее поля τ как функция параметра $\tilde{\mu}$, двойной логарифмический масштаб
(б) Энергия вакуума как функция параметра $\tilde{\mu}$, логарифмический масштаб

Рис. 6: Результаты численного расчёта вакуумного среднего поля τ и энергии вакуума при больших деформациях $\lambda \gg \Lambda_{2d}$. На Рис. а изображено вакуумное среднее τ . Прерывистой линией показано приближённое значение (3.42), сплошной – точное значение. Из графика видно, что значение τ действительно равно нулю при $\lambda(\tilde{\mu}) = m_G$. На Рис. б изображена E_{vac} . Прерывистой линией показано асимптотическое значение E_{UV} (3.43). При расчёте было принято, что $m_G/\Lambda = 10^{10}$

При увеличении параметра деформации $\tilde{\mu}$, масса фермиона λ приближается к УФ масштабу обрезания m_G , и можно ожидать, что фермионы становятся очень тяжёлыми и отщепляются, тем самым выходя из динамики. Та-

ким образом, рассматриваемая теория должна перейти в несуперсимметричную $CP(N-1)$ модель (1.1). Вакуумное среднее поля τ должно стать равным нулю.

Это может быть проверено явно при помощи эффективного потенциала (3.3). Действительно, предположим, что $\tau \ll \lambda \sim m_G$. Раскладывая (3.3), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{eff}} = & \frac{N}{4\pi} iD \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{N}{4\pi} |\tau|^2 \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{m_G^2} \right] \\ & - \frac{N}{4\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \tau \cdot \lambda \ln \frac{\lambda^2}{m_G^2} - \frac{N}{4\pi} \lambda^2 \left(1 - \ln \frac{\lambda^2}{m_G^2} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Минимизируя этот потенциал, получим

$$\tau \approx -\lambda \frac{\ln(m_G/\lambda)}{\ln(m_G/\Lambda)}. \quad (3.42)$$

Это приближение оказывается довольно точным, см. Рис. 6а. Когда λ приближается к масштабу УФ обрезания m_G , вакуумное среднее τ стремится к нулю. Первое слагаемое в (3.41) превращается в эффективный потенциал несуперсимметричной $CP(N-1)$ модели, в то время как последнее слагаемое приводит к сдвигу вакуумной энергии. При $\lambda = m_G$, энергия вакуума становится равной

$$E_{\text{vac, UV}} = \frac{N}{4\pi} (\Lambda^2 - m_G^2). \quad (3.43)$$

Эти результаты находятся в согласии с теоремой Аппельквиста-Караццоне [35], согласно которой эффекты тяжёлых полей ограничиваются некоторой перенормировкой физических величин. Заметим, что т.к. суперсимметрия на мировой поверхности явно нарушена массой фермионов, значение вакуумной энергии не обязано быть неотрицательным.

Значение энергии вакуума, приведённое выше, является квантовой поправкой к классической формуле для натяжения неабелевой струны. Последнее было выведено в [18], и с учётом (3.43) натяжение может быть записано как

$$T = \frac{2\pi}{\ln \frac{m_G^2}{m^2}} \frac{m_G^2}{g^2} + \frac{N}{4\pi} (\Lambda^2 - m_G^2), \quad (3.44)$$

Видно, что второе слагаемое здесь – лишь $O(g^2)$ поправка к классической формуле.

При промежуточных значениях массы λ данную модель удалось исследовать лишь численно. Результаты представлены на Рис. (6), где показана зависимость $\langle\sigma\rangle$ и E_{vac} от массы тяжёлых фермионов λ . Из них видно, что действительно, вакуумное среднее поля τ равно нулю при очень больших λ . Заметим также, что $\langle iD \rangle < 0$ в большом интервале значений λ , но это не ведёт к неустойчивостям, т.к. в соответствии с (3.12), масса поля n всегда положительна.

3.5 Случай ненулевых разностей масс

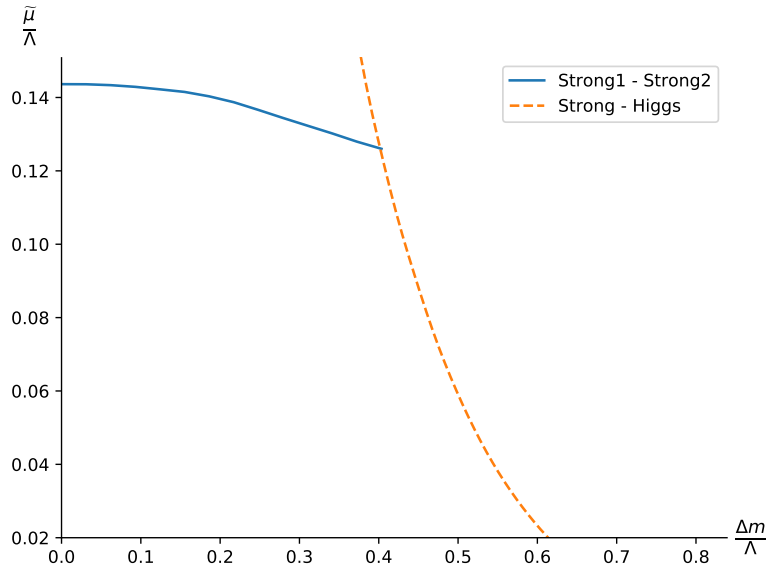


Рис. 7: Линия фазового перехода между двумя режимами сильной связи (сплошная синяя). Прерывистая линия соответствует фазовому переходу между режимом сильной связи и хиггсовской фазой, см. Раздел 4.2. Результат численного расчёта при $N = 16$.

Результаты, полученные в предыдущих разделах, обобщаются на случай $\Delta m_{i0} \neq 0$. Рассмотрим массы на окружности (1.3), тогда радиус Δm будет играть роль масштаба масс рассматриваемой модели.

Если зафиксировать некоторое значение Δm и начать увеличивать $\tilde{\mu}$ (и, тем самым, $\lambda(\tilde{\mu})$), в рассматриваемой модели наблюдается схожее со случаем $\Delta m = 0$ поведение. При $\tilde{\mu} = 0$ суперсимметрия не нарушена, и имеются N вырожденных вакуумов. При ненулевых деформациях вырождение снимается, и в конечном итоге все квазивакуумы распадаются, что говорит о фазовом переходе. Набор точек фазового перехода представляет собой кривую на плоскости $(\mu, \Delta m)$, см. Рис. 7.

Качественно, ничего нового мы здесь не видим. Однако, если масштаб масс Δm достаточно велик, происходит фазовый переход из сильной связи в слабую – т.н. «хиггсовскую» фазу. Это послужит предметом исследования следующего раздела.

4 Хиггсовская фаза

Когда масштаб масс Δm превышает некоторое критическое значение, рассматриваемая в данной работе теория находится в Хиггсовской фазе [21]. Эта фаза характеризуется ненулевым вакуумным средним поля n . В режиме очень слабой связи для нахождения вакуумных конфигураций можно использовать классический лагранжиан (1.13),

$$n_0^2 = 2\beta, \quad \sqrt{2}\sigma = m_0, \quad iD = 0. \quad (4.1)$$

Классическая энергия вакуума равна нулю.

В суперсимметричном случае $\tilde{\mu} = 0$ эта формула для σ является точной (в пределе больших N). Более того, при очень больших Δm константа связи $1/\beta$ мала (заморожена на масштабе Δm), и квантовые поправки к классическому решению (4.1) малы.

Однако, при ненулевых $\tilde{\mu}$ и для $\Delta m \gtrsim \Lambda$, ситуация становится несколько более сложной, так как классическое приближение уже не является надёжным. Вообще говоря, у решения (4.1) есть поправки порядка $\Lambda/\Delta m$ и $\tilde{\mu}/\Lambda$. Для исследования модели следует работать с квантовыми уравнениями (2.12) - (2.14), и большинство результатов, представленных в данном разделе, были получены из численного расчёта

Во-первых, следует проверить, что однопетлевой потенциал (2.9) согласуется с классическим пределом. Рассмотрим предел больших $\Delta m \gg \Lambda$ при некотором фиксированном значении $\tilde{\mu}$. Раскладывая вакуумные уравнения (2.12) - (2.14) по степеням $\Lambda/\Delta m$, получим приближённое значение вакуумного среднего

$$\sqrt{2}\sigma - m_0 \approx -\lambda(\tilde{\mu}) \frac{\ln \frac{m_G}{\Delta m}}{\ln \frac{\Delta m}{\Lambda}}. \quad (4.2)$$

На Рис. 8 представлены результаты расчёта вакуумного среднего поля σ . Видно, что формула (4.2) является хорошим приближением (см. также Рис. 10а). При больших Δm действительно $\sqrt{2}\sigma \approx m_0$.

4.1 Квазивакуумы

Решение (4.1) описывает лишь одно из возможных вакуумных состояний хиггсовской фазы. В суперсимметричном случае $\tilde{\mu} = 0$ есть N вырожденных

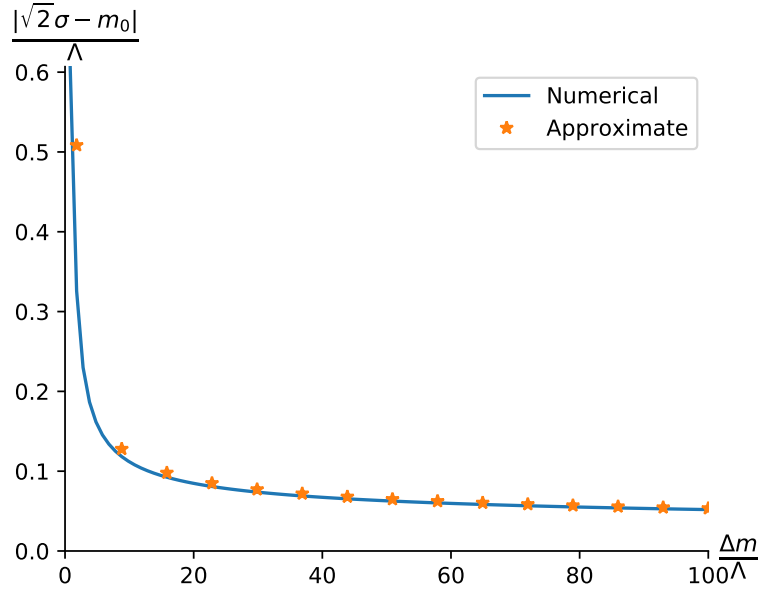


Рис. 8: Вакуумное среднее поля $\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0$ как функция масштаба масс Δm . Сплошной линией показано точное значение, звездочками – приближённое (4.2). Здесь, $\tilde{\mu} = \Lambda$, $N = 16$. Можно видеть, что при увеличении Δm вакуумное среднее поля $\sqrt{2}\sigma$ приближается к классическому значению m_0 .

вакуумов, как диктуется индексом Виттена. В [31] было показано, что при больших Δm теория находится в хиггсовской фазе, и вакуумное среднее одной из компонент N -плета n_i отлично от нуля. Соответствующие вакуумные средние равны

$$\langle \sqrt{2}\sigma \rangle = m_{i_0}, \quad \langle |n_{i_0}|^2 \rangle = 2\beta, \quad i_0 = 0, \dots, N-1 \quad (4.3)$$

Кроме того, между этими вакуумами интерполируют кинки.

При введении деформации $\tilde{\mu}$ эти вакуумы расщепляются, и при малых $\tilde{\mu}$ имеется одно истинное основное состояние (4.1) и $N-1$ квазивакуумов. Для начала, рассмотрим эту картину с точки зрения классического лагранжиана (1.13). Классический потенциал равняется

$$\mathcal{V}_{cl}(n, \sigma, D) = iD (\bar{n}_i n^i - 2\beta) + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i0} |n^i|^2 \quad (4.4)$$

Выведем спектр масс в окрестности (квази)вакуума $\sqrt{2}\sigma = m_{i_0}$ для некоторого i_0 . В такой окрестности величины n^i , $i \neq i_0$ малы, в то время как

$$n_{i_0} = \sqrt{2\beta} + \delta n_{i_0} \quad (4.5)$$

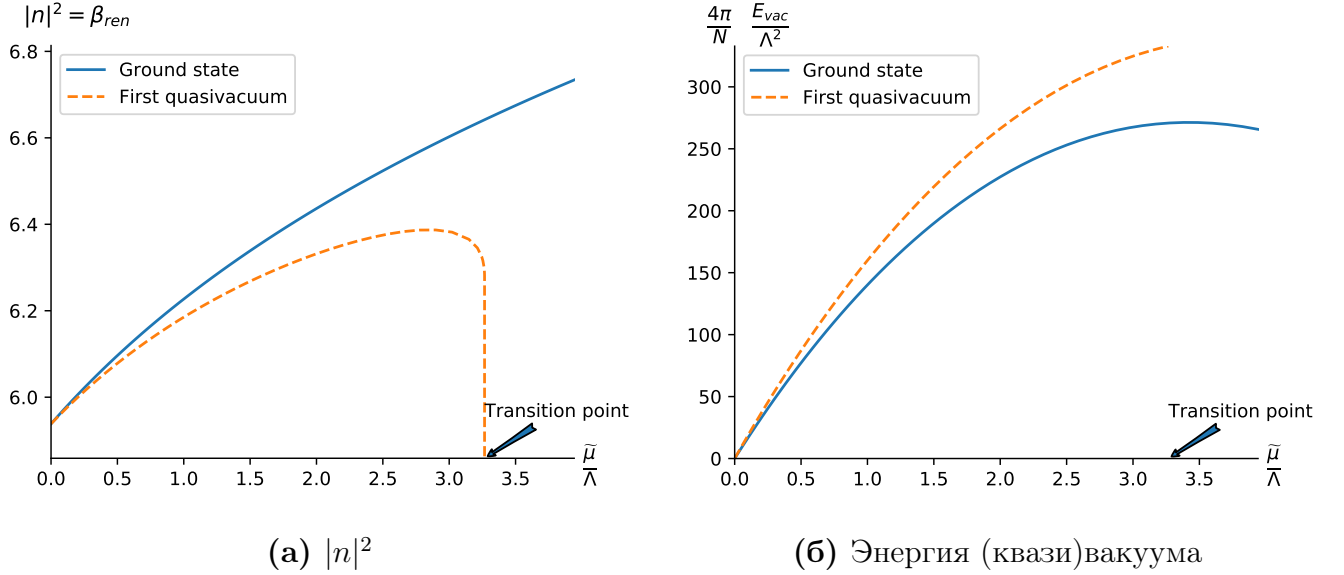


Рис. 9: Пример фазового перехода с исчезновением кинков. Сплошная синяя линия относится к истинному основному состоянию $i_0 = 0$, прерывистая оранжевая линия представляет первый квазивакуум $i_0 = 1$. Значение параметра деформации $\tilde{\mu}$ отложено на горизонтальной оси (в единицах Λ), положение точки фазового перехода показано стрелкой. Оба графика получены численным расчётом при $\Delta m/\Lambda = 10$, $N = 16$

Из D -условия получим

$$\delta n_{i_0} \approx -\frac{1}{2 \cdot 2\beta} \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 \quad (4.6)$$

и потенциал (4.4) становится

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{cl} &\approx \sum_{i \neq i_0} |m_i - m_{i_0}|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_{i \neq i_0} \text{Re}(m_i - m_0) |n^i|^2 - v(\mu) \text{Re}(m_{i_0} - m_0) \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 \\ &= \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 [|m_i - m_{i_0}|^2 + v(\mu) \text{Re}(m_i - m_{i_0})] \end{aligned} \quad (4.7)$$

так что масса возбуждения n^i равняется

$$M_i^2 = |m_i - m_{i_0}|^2 + v(\mu) \text{Re}(m_i - m_{i_0}) \quad (4.8)$$

Если бы M_i^2 обратилось в ноль для некоторого i , это бы означало что рассматриваемый вакуум становится нестабильным. Это происходит для каждого $i_0 \neq 0$ при достаточно сильной деформации, т.к. в этом случае найдётся такой i что $\text{Re}(m_i - m_{i_0}) < 0$.

Для определённости, рассмотрим массы на окружности (1.3). Тогда при выборе вакуума $i_0 = 0$ имеем $\text{Re}(m_i - m_0) > 0$ для всех $i \neq 0$, и этот вакуум

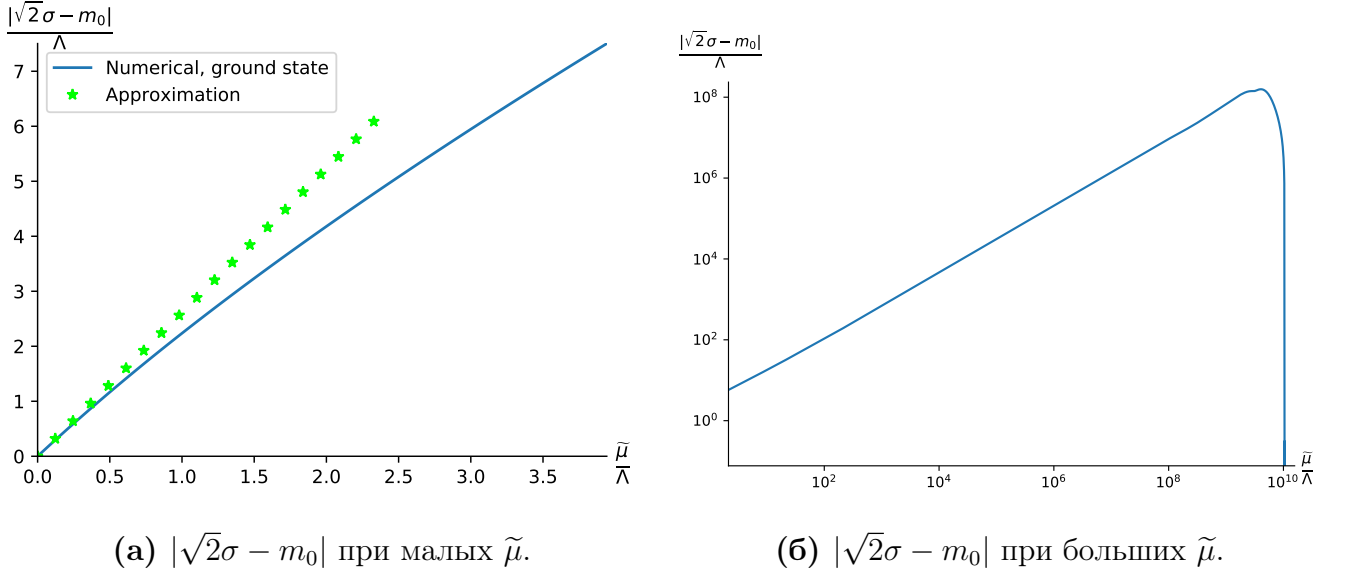


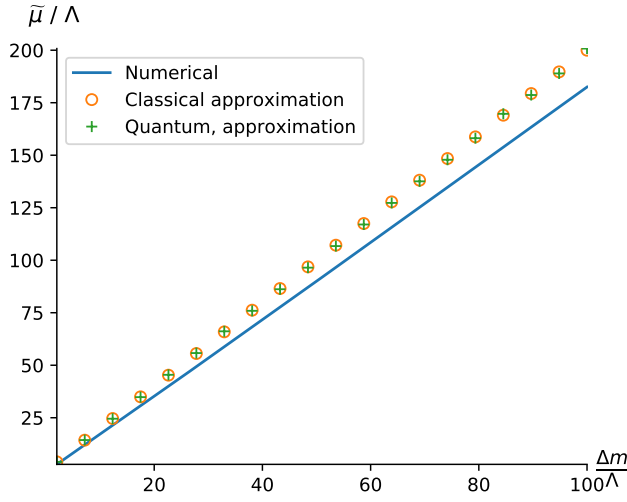
Рис. 10: Вакуумное среднее поля $\sqrt{2}\sigma - m_0$ на разных масштабах. На рис. а показаны малые $\tilde{\mu}$. Сплошная синяя линия представляет численный расчёт, зелёные звёздочки – приближённое значение (4.2). На Рис. б показано поведение при больших $\tilde{\mu}$ (в двойном логарифмическом масштабе). Можно видеть, что при $\tilde{\mu} \rightarrow m_G$ действительно выполняется $\sqrt{2}\langle\sigma\rangle \rightarrow m_0$. Фиксировано $\Delta m/\Lambda = 10$, $m_G/\Lambda = 10^{10}$, $N = 16$

оказывается стабильным (что и ожидалось). Однако можно показать, что все квазивакуумы $0 < i_0 < N/2$ становятся абсолютно нестабильными, когда параметр деформации достигает критического значения

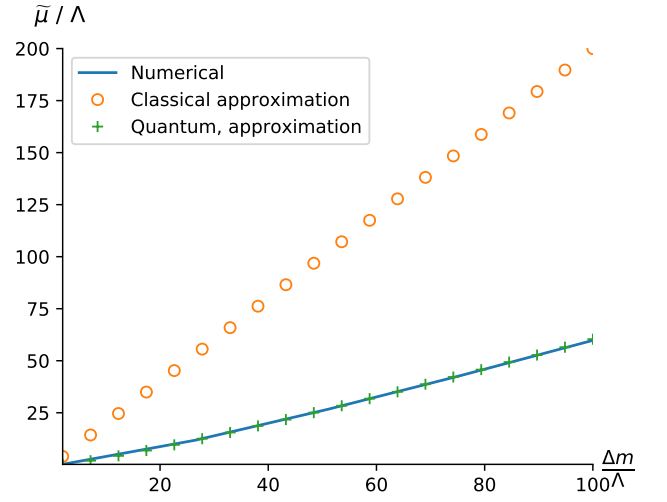
$$v(\mu_{\text{crit},i_0}) = 2\Delta m \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi(i_0-1)}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi i_0}{N}\right)} \approx \frac{4\pi}{N} \frac{\Delta m}{\sin\left(\frac{2\pi i_0}{N}\right)} \quad (4.9)$$

На последнем шаге было использовано приближение больших N . Подобное утверждение справедливо и для квазивакуумов $N/2 < i_0 < N$, тогда как квазивакуум с номером $i_0 = N/2$ (для чётных N) распадается при $v(\mu_{\text{crit},N/2}) = 2\Delta m$. Когда $\tilde{\mu}$ превосходит это критическое значение, все квазивакуумы уже распались. В теории остаётся единственное вакуумное состояние и никаких кинков.

Эти квазивакуумы можно увидеть и из однопетлевого потенциала. Следуя [31], вспомним, что при выводе эффективного потенциала (2.9) в качестве n^i -поля с ненулевым вакуумным средним была выбрана компонента $n \equiv n_0$. Вместо этого, для изучения квазивакуумов в качестве поля с ненулевым вакуумным средним можно взять n_{i_0} , проинтегрировав по всем остальным компонентам n^i . Численный расчёт показывает, что в итоге получается эффективный потенциал, у которого есть минимум при небольших деформациях, но эти минимумы



(а) Согласие с классической формулой (4.9), если положить $\lambda = 0$



(б) Наличие λ усиливает эффект

Рис. 11: Линия фазового перехода с исчезновением кинков. Δm по горизонтальной оси, $\tilde{\mu}$ по вертикальной. Сплошной синей линией показан результат численного расчёта кривой, на которой распадается последний квазивакуум, и выше которой остаётся только одно вакуумное состояние. Оранжевые кружки соответствуют классической формуле (4.9), зелёные знаки «+» – квантовому приближению (4.11). Рис. а показывает, что если искусственно «выключить» деформацию фермионной массы, $\tilde{\lambda}_0 = 0$, получается хорошее согласие с классической формулой (4.9). Однако, в действительности мы находимся в ситуации Рис. б, что лучше описывается формулой (4.11)

пропадают при больших $\tilde{\mu}$, см. Рис. 9. На графике 9а это соответствует тому, что $|n|^2$ резко спадает до нуля вблизи точки фазового перехода. Из Рис. 9б видно, что квазивакуумы вырождены при ненарушенной суперсимметрии, а также что энергия квазивакуума (с учётом квантовых поправок) действительно больше чем энергия основного состояния.

На Рис. 11 показана соответствующая кривая раздела фаз. Из графика видно, что классическая формула (4.9) работает только если искусственно положить $\lambda = 0$ в (1.13), но она совершенно не работает, когда масса фермиона получает добавку. Как видно из Рис. 11б, тяжёлые фермионы усиливают эффект распада квазивакуумов.

Можно вывести приближённую формулу, лучше описывающую кривую раздела фаз. Рассмотрим, к примеру, первый квазивакуум $i_0 = 1$. Тогда в выражении для β_{ren} (2.12) вместо Δm_{i_0} следует подставить $\Delta m_{i_1} = m_i - m_1$. Тогда $\text{Re } \Delta m_{01} < 0$, и в качестве точки фазового перехода можно приближённо при-

нять точку, в которой $\beta_{\text{ren}} \rightarrow -\infty$, т.е.

$$iD + v(\tilde{\mu}) \operatorname{Re} \Delta m_{01} + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2 = 0. \quad (4.10)$$

С помощью (1.23), (1.24), (4.2) и аналога (2.13) можно показать, что фазовый переход происходит при значении параметра деформации

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} \approx \frac{2 \Delta m}{1 + \tilde{\lambda}_0 \frac{\ln m_G / \Delta m}{\ln \Delta m / \Lambda}}. \quad (4.11)$$

При очень больших значениях $\tilde{\mu}$ не остаётся ни одного квазивакуума, кроме единственного основного состояния, и теория на мировой поверхности переходит в несуперсимметричную модель. В этом пределе вакуумное среднее поля $\sqrt{2}\sigma$ снова стремится к m_0 . Действительно, при больших $\tilde{\mu}$ мы можем найти приближённое решение вакуумных уравнений (2.12) - (2.14), и, используя выражение для Λ (1.27), находим

$$\sqrt{2}\sigma - m_0 \sim \frac{\Delta m m_G^2}{\tilde{\mu}^2} \ln \frac{\tilde{\mu}}{\Delta m} \ln \frac{\tilde{\mu}}{m_G}. \quad (4.12)$$

Эта величина обращается в ноль при больших $\tilde{\mu}$. Численный расчёт подтверждает данный вывод, см. Рис. 10б.

4.2 Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи

В работах [26, 31] было обнаружено, что как в несуперсимметричной $CP(N-1)$ модели (1.1), так и в её суперсимметричной версии (1.7) фазовый переход между режимами сильной и слабой связи происходит при $\Delta m = \Lambda$. При больших Δm теория находится в области слабой связи (хиггсовская фаза), тогда как при малых Δm – в области сильной связи. Поэтому можно ожидать похожего поведения в рассматриваемой здесь деформированной модели (1.13).

Следуя [26, 31], отождествим кривую этого фазового перехода с кривой, на которой $|n_0^2| = 2\beta_{\text{ren}}$ становится отрицательным. Таким образом, мы ищем решение уравнения

$$\beta_{\text{ren}} = 0, \quad (4.13)$$

где β_{ren} находится по формуле (2.12).

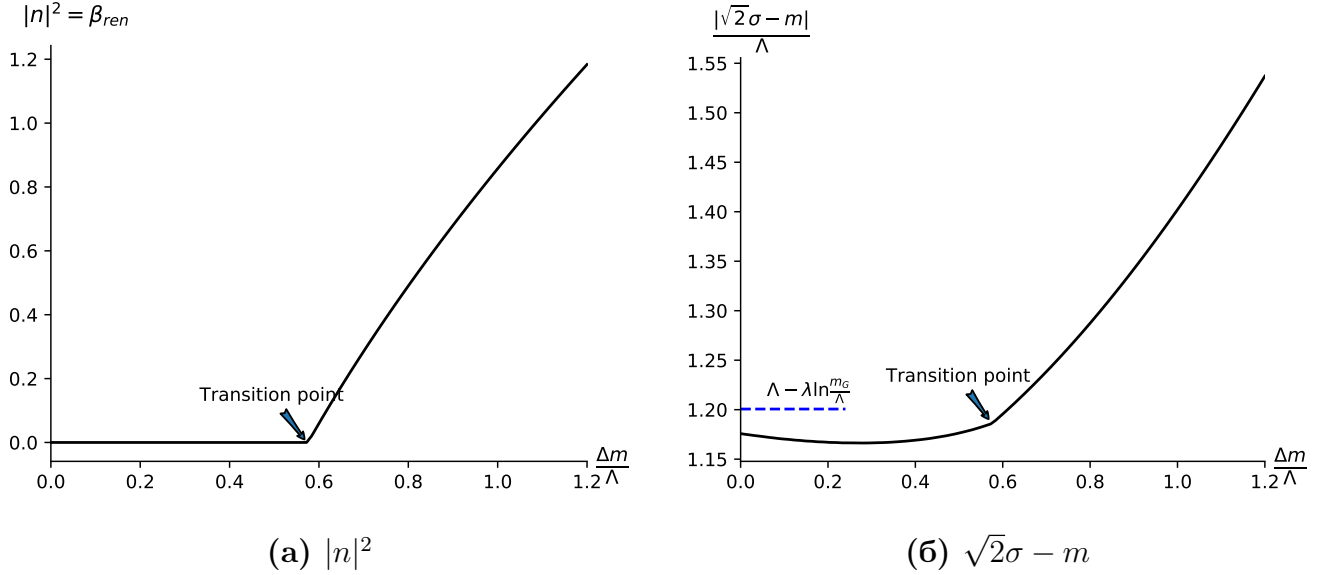


Рис. 12: Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи: вакуумные средние. На графиках показан пример фазового перехода при фиксированных $\tilde{\mu}/\Lambda = 0.03$, $N = 16$. Масштаб масс Δm отложен по горизонтальной оси. Положение точки фазового перехода отмечено стрелкой. На Рис. б, пунктирная линия показывает приближённое значение вакуумного среднего (3.17). Можно видеть, что характер фазового перехода качественно такой же, как и в чисто бозонной (1.1) и в суперсимметричной (1.7) моделях, см. [26, 31].

В модели с $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрией при $\tilde{\mu} = 0$ фазовый переход происходит при $\Delta m = \Lambda$ [31]. Случай $\tilde{\mu} \neq 0$ несколько сложнее. Автору не удалось получить явное решение уравнений (2.12) - (2.14), но можно получить приближённые решения в областях малых и очень больших $\tilde{\mu}$.

Начнём с области $\tilde{\mu} \lesssim \Lambda$, и предположим что вакуумное среднее поля σ принимает только вещественные значения (это предположение верно для основного состояния). Тогда, используя (2.13) и тождество

$$\prod_{k=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) = \frac{N}{2^{N-1}}, \quad (4.14)$$

можно переписать (2.12) как

$$2\beta_{\text{ren}} = \frac{2(N-1)}{4\pi} \left(\ln \frac{\Delta m}{\Lambda} + \frac{1}{N-1} \ln N + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{v(\tilde{\mu}) - 2(\sqrt{2}\sigma - m_0)}{2\Delta m} \right) \right) \quad (4.15)$$

Приравнивая это выражение к нулю, получим

$$v(\tilde{\mu}) - 2(\sqrt{2}\sigma - m_0) = 2\Delta m \left(\left(\frac{\Lambda}{\Delta m} \right)^2 N^{-\frac{2}{N-1}} - 1 \right) \quad (4.16)$$

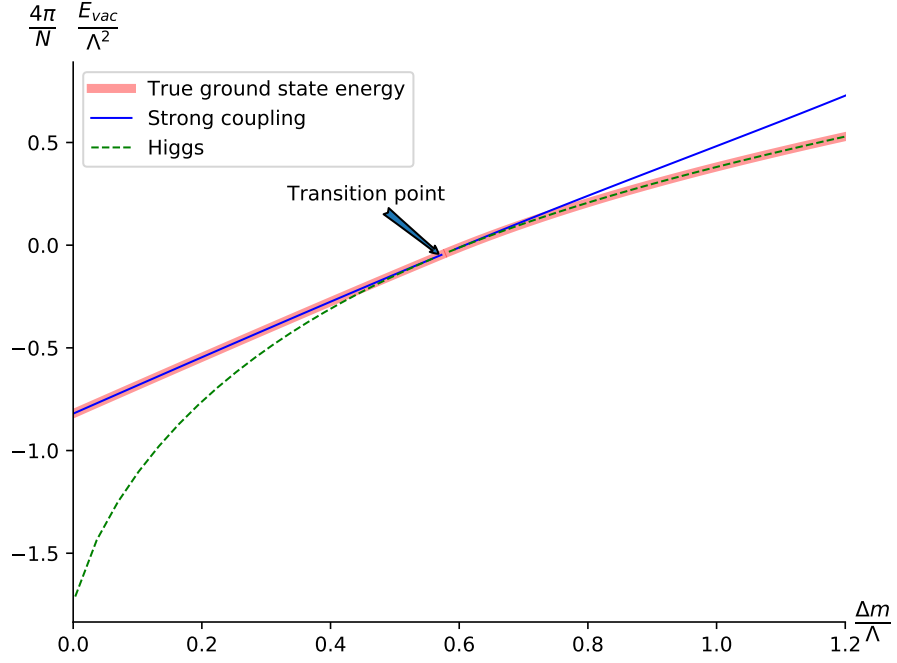


Рис. 13: Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи: энергия вакуума. Жирной толстой линией показана величина вакуумной энергии основного состояния. Сплошная синяя линия справа от точки фазового перехода отвечает аналитическому продолжению вакуумной энергии сильной связи в хиггсовскую фазу. Обратно, прерывистая зелёная линия ниже точки фазового перехода показывает есть аналитическое продолжение вакуумной энергии хиггсовской фазы в режим сильной связи (и соответствует нефизическому «состоянию» с $|n|^2 < 0$). В точке фазового перехода эти кривые касаются друг друга, и $|n|^2 = 0$. Этот график качественно такой же, как и в чисто бозонной (1.1) и суперсимметричной (гетеротической) (1.7) моделях, см. [26, 31]. Фиксированы $\tilde{\mu}/\Lambda = 0.03$, $N = 16$

При малых деформациях можно пользоваться приближённой формулой $v(\tilde{\mu}) \approx \tilde{\mu}$, см. (1.23). Кроме того, в режиме сильной связи при фиксированном $\tilde{\mu}$ вакуумное среднее поля σ почти не зависит от Δm (это точно выполняется в суперсимметричной и в чисто бозонной $CP(N-1)$ моделях), так что для этого вакуумного среднего можно пользоваться формулой, выведенной для $\Delta m = 0$ (3.17), причём вплоть до точки фазового перехода. Тогда, из (4.16) можно вывести уравнение линии раздела фаз:

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \frac{2 \frac{\Lambda^2}{\Delta m} N^{-\frac{2}{N-1}} - \Lambda - \Delta m}{1 + 2 \tilde{\lambda}_0 \ln \frac{m_G}{\Lambda}}, \quad (4.17)$$

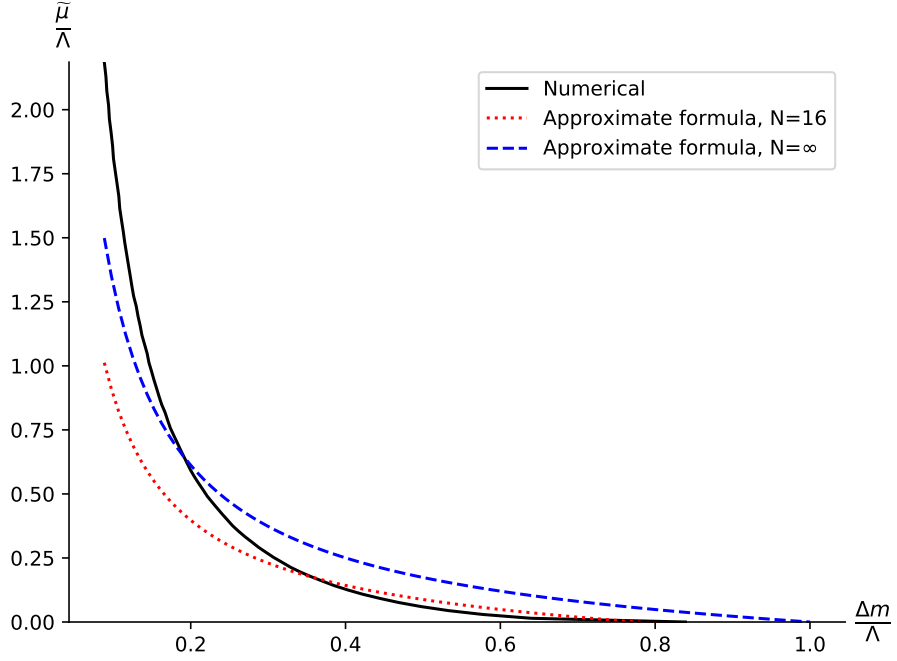


Рис. 14: Линия раздела фаз сильной и слабой связи. Δm по горизонтальной, $\tilde{\mu}$ по вертикальной оси. Сплошной чёрной линией показан результат численного расчёта при $N = 16$. Точечная красная линия соответствует приближённой формуле (4.17) с $N = 16$. Прерывистая синяя линия соответствует приближённой формуле (4.18) при $N \rightarrow \infty$

или, устремляя $N \rightarrow \infty$,

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \frac{(2\Lambda + \Delta m)(\Lambda - \Delta m)}{\Delta m \left(1 + 2\tilde{\lambda}_0 \ln \frac{m_G}{\Lambda}\right)} \quad (4.18)$$

Эти формулы являются хорошим приближением линии раздела фаз, см. Рис. 14. Можно видеть, что с ростом $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$ соответствующее значение Δm_{crit} монотонно убывает. Более того, сравнивая (4.17) и (4.18), можно проверить справедливость численного расчёта применительно к описанию предела больших N , т.к. численный расчёт проводится, разумеется, при конечном значении N^5 .

В пределе больших деформаций $\tilde{\mu} \gg m_G$. Имеем:

$$2\beta_{\text{ren}} \sim \frac{N}{4\pi} \ln \frac{v(\mu_{\text{crit}}) \Delta m_{\text{crit}} + \Delta m_{\text{crit}}^2}{\Lambda_{2d}^2} = 0, \quad (4.19)$$

где величина Λ_{2d} экспоненциально мала, как следует из (1.22). Из (1.23) и (1.27) получаем, с точностью до логарифмического множителя,

$$\Delta m_{\text{crit}} \sim \frac{(\Lambda_{4d}^{N=1})^2 \tilde{\mu}_{\text{crit}}}{m_G^2} \exp\left(-\text{const} \frac{\tilde{\mu}_{\text{crit}}^2}{m_G^2}\right), \quad (4.20)$$

⁵ В численных расчётах для данной статьи было взято значение $N = 16$. Грубая оценка точности из (4.17) и (4.18) даёт $1 - N^{-1/(N-1)} \approx 0.17$, т.е. качественно полученные здесь результаты справедливы.

где было использовано, что $\Delta m \ll m$, Здесь мы снова видим, что Δm_{crit} монотонно убывает с ростом $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$.

5 Фазовая диаграмма двумерной теории

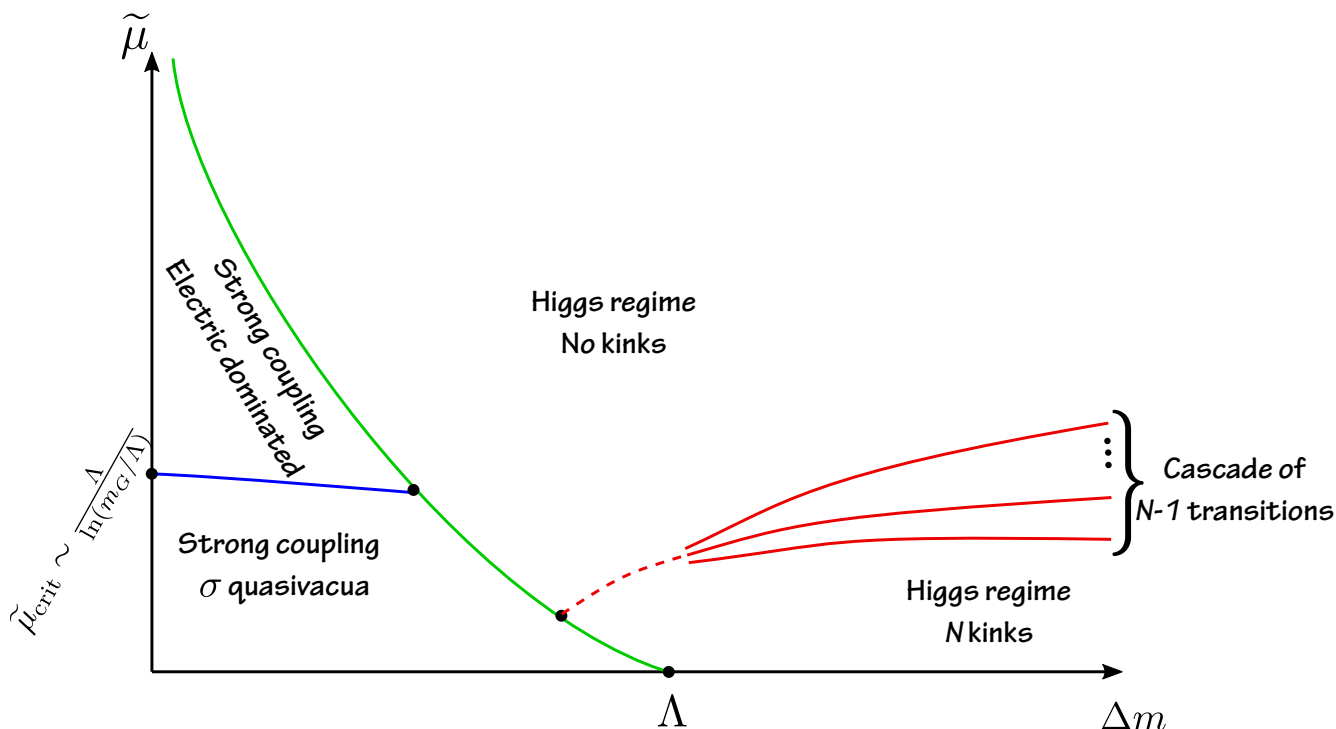


Рис. 15: Полная фазовая диаграмма (схематично). Δm по горизонтальной оси, $\tilde{\mu}$ по вертикальной. Каскад $N - 1$ кривых соответствует исчезновению кинков, интерполирующих между основным состоянием и квазивакуумами. Прерывистые линии проведены из общих соображений, т.к. $1/N$ разложение плохо работает в этой области.

В предыдущих главах были подробно изучены различные фазы рассматриваемой в данной работе μ -деформированной $CP(N - 1)$ модели. В данной главе все полученные результаты будут систематизированы в виде одной диаграммы, см. Рис. 15.

В рассматриваемой μ -деформированной $CP(N - 1)$ модели есть два параметра, не зависящих от N . Таковыми являются параметр деформации $\tilde{\mu}$ (см. (1.18)) и масштаб масс Δm , причём последний есть не что иное как масштаб разностей масс кварков четырёхмерной теории. В данной работе была найдена нетривиальная фазовая диаграмма на плоскости параметров $(\Delta m, \tilde{\mu})$, с двумя фазами сильной связи и двумя хиггсовскими фазами, которые отделены друг от друга тремя кривыми раздела фаз с двумя трикритическими точками. Эта фазовая диаграмма изображена на Рис. 15.

Когда параметр $\tilde{\mu}$ стремится к нулю, суперсимметрия не нарушена, и теория может находиться или в режиме сильной связи (при небольших Δm), или в

хиггсовской фазе (большие Δm , слабая связь). В обеих фазах в теории имеется N вырожденных вакуумов, так что кинки, интерполирующие между этими вакуумами, не являются невылетающими. В фазе сильной связи при малых Δm поле фотона становится динамическим, и вследствие киральной аномалии приобретает массу.

При введении деформации бывшие вырожденные вакуумы расщепляются. В сильной связи остаётся одно истинное основное состояние, а также $N - 1$ квазивакуумов. У фотона появляется безмассовая компонента. Кинки становятся невылетающими. Когда параметр деформации $\tilde{\mu}$ мал, конфайнмент обусловлен разницей энергий σ -квазивакуумов. При увеличении $\tilde{\mu}$ в конечном счёте теория пересекает критическую линию, на которой исходные σ -квазивакуумы распадаются. После этого расщепление квазивакуумов и невылетание кинков возникают только из-за постоянного электрического поля.

В хиггсовской фазе при больших Δm теория находится в режиме слабой связи. Вакуумное среднее поля n становится ненулевым, поле фотона становится нефизическим и тяжёлым вследствие механизма Хиггса. Если параметр $\tilde{\mu}$ достаточно мал, то в теории имеются N квазивакуумов с разными энергиями, и кинки, интерполирующие между соседними квазивакуумами, являются невылетающими. Однако при увеличении параметра $\tilde{\mu}$ мы пересекаем критическую кривую, где (см. например (4.9)) квазивакуумы распадаются по одному, и в итоге в теории остаётся лишь одно основное состояние и никаких кинков.

Заключение

В настоящей работе была изучена динамика μ -деформированной $CP(N - 1)$ модели (1.13). Эта модель возникает как теория на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной квантовой хромодинамике, деформированной массовым членом μ материи в присоединённом представлении.

Когда параметр деформации $\tilde{\mu}$ мал, данная двумерная теория превращается в $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричную $CP(N - 1)$ модель. При увеличении параметра деформации четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД, тогда как теория на мировой поверхности становится несуперсимметричной μ -деформированной $CP(N - 1)$ моделью. Это происходит из-за того, что фермионные нулевые моды, которые были в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ теории, становятся массивными при «включении» параметра $\tilde{\mu}$. Как следствие, при больших значениях $\tilde{\mu}$ фермионные степени свободы на мировой поверхности становятся тяжёлыми и отщепляются. В результате теория на мировой поверхности становится чисто бозонной $CP(N - 1)$ моделью.

В настоящей работе этот переход был детально изучен в приближении большого числа цветов N .

Было показано, что результаты, полученные в статье [18] для μ -деформированной четырёхмерной теории, согласуются с рассмотрением низкоэнергетической теории на мировой поверхности. Можно перейти на мировой лист в $\mathcal{N} = 2$ теории и затем взять предел больших $\tilde{\mu}$, или же сперва ввести большую деформацию в четырёхмерии и только потом перейти к теории на мировой поверхности.

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 4d \mathcal{N} = 2 \text{ SQCD} & \xrightarrow{\text{worldsheet}} & 2d \mathcal{N} = (2, 2) \text{ CP}(N - 1) \\
 \text{large } \tilde{\mu} \downarrow & & \text{large } \tilde{\mu} \downarrow \\
 4d \mathcal{N} = 1 \text{ SQCD} & \xrightarrow{\text{worldsheet}} & 2d \mathcal{N} = 0 \text{ CP}(N - 1)
 \end{array} \tag{5.1}$$

Однако стоит отметить, что при промежуточных значениях параметра деформации $\tilde{\mu}$ строгого вывода теории на мировой поверхности до сих пор нет.

Как уже обсуждалось ранее, кинки теории на мировой поверхности интерпретируются как невылетающие монополи четырёхмерной СКХД. Результаты, полученные в данной работе, показывают в частности, что при больших $\tilde{\mu}$, когда четырёхмерная теория в принципе становится $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной

КХД, монополи остаются только в сильной связи при очень маленьких разностях масс, меньше критического значения (4.20). В хиггсовской фазе квазивакуумы распадаются при больших $\tilde{\mu}$, что означает следующее: невылетающие монополю и антимонполю, образующие «мезон» на струне (см. Рис. 1), аннигилируют друг с другом и исчезают. Это подтверждает похожие выводы, сделанные в [18].

Список литературы

- [1] N. Seiberg and E. Witten, *Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B426**, 19 (1994), (E) **B430**, 485 (1994) [arXiv:hep-th/9407087].
- [2] N. Seiberg and E. Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B431**, 484 (1994) [arXiv:hep-th/9408099].
- [3] G. 't Hooft, *Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Nonabelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **190**, 455-478 (1981)
- [4] S. Mandelstam, *Vortices and Quark Confinement in Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rept. **23**, 245-249 (1976)
- [5] A. Hanany and D. Tong, *Vortices, instantons and branes*, JHEP **0307**, 037 (2003). [arXiv:hep-th/0306150].
- [6] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi and A. Yung, *Non-Abelian superconductors: Vortices and confinement in $\mathcal{N} = 2$ SQCD*, Nucl. Phys. B **673**, 187 (2003). [arXiv:hep-th/0307287].
- [7] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian string junctions as confined monopoles*, Phys. Rev. D **70**, 045004 (2004). [arXiv:hep-th/0403149].
- [8] A. Hanany and D. Tong, *Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics*, JHEP **0404**, 066 (2004). [arXiv:hep-th/0403158].
- [9] D. Tong, *TASI Lectures on Solitons: Instantons, monopoles, vortices and kinks*, [arXiv:hep-th/0509216].
- [10] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Solitons in the Higgs phase: The moduli matrix approach*, J. Phys. A **39**, R315 (2006) [arXiv:hep-th/0602170].
- [11] M. Shifman and A. Yung, *Supersymmetric Solitons*, Rev. Mod. Phys. **79** 1139 (2007) [arXiv:hep-th/0703267]; an expanded version in Cambridge University Press, 2009.
- [12] D. Tong, *Quantum Vortex Strings: A Review*, Annals Phys. **324**, 30 (2009) [arXiv:0809.5060 [hep-th]].

- [13] M. Shifman and A. Yung, *Lessons from supersymmetry: "Instead-of-Confinement" Mechanism*, Int. J. Mod. Phys. A **29**, no. 27, 1430064 (2014) [arXiv:1410.2900 [hep-th]].
- [14] A. Abrikosov, *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957); Russian original – ZhETF **32**, 1442 (1957);
H. Nielsen and P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. **B61**, 45 (1973). [Reprinted in *Solitons and Particles*, Eds. C. Rebbi and G. Soliani (World Scientific, Singapore, 1984), p. 365].
- [15] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian flux tubes in $N=1$ SQCD: supersizing world-sheet supersymmetry*, Phys. Rev. D **72**, 085017 (2005) [arXiv:hep-th/0501211].
- [16] M. Edalati and D. Tong, *Heterotic vortex strings*, JHEP **0705**, 005 (2007) [arXiv:hep-th/0703045].
- [17] M. Shifman and A. Yung, *Heterotic Flux Tubes in $\mathcal{N} = 2$ SQCD with $\mathcal{N} = 1$ Preserving Deformations*, Phys. Rev. D **77**, 125016 (2008) Erratum: [Phys. Rev. D **79**, 049901 (2009)] [arXiv:0803.0158 [hep-th]].
- [18] E. Ievlev and A. Yung, *Non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **95**, 125004 (2017) [arXiv:1704.03047 [hep-th]].
- [19] E. Ievlev and A. Yung, *Non-Abelian strings in $N = 1$ supersymmetric QCD (Conference Paper)*, EPJ Web Conf. **191**, 06003 (2018)
- [20] E. Ievlev and A. Yung, *What Become of Semilocal non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ SQCD*, Phys. Rev. D **98**, no.9, 094033 (2018) [arXiv:1810.07149 [hep-th]].
- [21] A. Gorsky, E. Ievlev and A. Yung, *Dynamics of non-Abelian strings in the theory interpolating from $\mathcal{N} = 2$ to $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **101**, no.1, 014013 (2020) [arXiv:1911.08328 [hep-th]].
- [22] D. Tong, *Monopoles in the Higgs phase*, Phys. Rev. D **69**, 065003 (2004) [arXiv:hep-th/0307302].
- [23] E. Witten, *Instantons, The Quark Model, And The $1/N$ Expansion*, Nucl. Phys. B **149**, 285 (1979).

- [24] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Meissner effect in Yang-Mills theories at weak coupling*, Phys. Rev. D **71**, 045010 (2005) [arXiv:hep-th/0412082].
- [25] E. Witten, *Phases of $N = 2$ theories in two dimensions*, Nucl. Phys. B **403**, 159 (1993) [arXiv:hep-th/9301042].
- [26] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *The Higgs and Coulomb/confining phases in 'twisted-mass' deformed $CP(N-1)$ model*, Phys. Rev. D **73**, 065011 (2006) [arXiv:hep-th/0512153].
- [27] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Heterotic $N=(0,2)$ $CP(N-1)$ Model with Twisted Masses*, Phys. Rev. D **81**, 065025 (2010) [arXiv:0907.2715 [hep-th]].
- [28] V. Markov, A. Marshakov and A. Yung, *Non-Abelian vortices in $N = 1^*$ gauge theory*, Nucl. Phys. B **709**, 267 (2005) [arXiv:hep-th/0408235].
- [29] F. Ferrari, *Large N and double scaling limits in two dimensions*, JHEP **0205** 044 (2002) [arXiv:hep-th/0202002].
- [30] F. Ferrari, *Non-supersymmetric cousins of supersymmetric gauge theories: quantum space of parameters and double scaling limits*, Phys. Lett. **B496** 212 (2000) [arXiv:hep-th/0003142]; *A model for gauge theories with Higgs fields*, JHEP **0106**, 057 (2001) [arXiv:hep-th/0102041].
- [31] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Large- N Solution of the Heterotic $CP(N-1)$ Model with Twisted Masses*, Phys. Rev. D **82**, no. 2, 025011 (2010) Erratum: [Phys. Rev. D **89**, no. 2, 029904 (2014)] [arXiv:1001.1757 [hep-th]].
- [32] M. Shifman and A. Yung, *Moduli Space Potentials for Heterotic non-Abelian Flux Tubes: Weak Deformation*, Phys. Rev. D **82**, 066006 (2010) [arXiv:1005.5264 [hep-th]].
- [33] M. Shifman and A. Yung, *Large- N Solution of the Heterotic $N=(0,2)$ Two-dimensional $CP(N-1)$ Model*, Phys. Rev. D **77**, 125017 (2008) Erratum: [Phys. Rev. D **81**, 089906 (2010)] [arXiv:0803.0698 [hep-th]].
- [34] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein and V. Zakharov, *Two-dimensional sigma models: Modelling non-perturbative effects in quantum chromodynamics*, Physics Reports **116**, 6, 103 (1984)

- [35] T. Appelquist and J. Carazzone, *Infrared Singularities and Massive Fields*, Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).