

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПЕТЕРБУРГСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
ИМ. Б.П. КОНСТАНТИНОВА НАЦИОНАЛЬНОГО
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА КУРЧАТОВСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Иевлев Евгений Альбертович

**Динамика неабелевых струн
в суперсимметричных калибровочных теориях**

Научная специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Юнг Алексей Викторович
доктор физико-математических наук

Санкт-Петербург
2020

Содержание

Введение	6
Глава 1 Неабелевы струны в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД:	
основные сведения	18
1.1 Четырёхмерная $\mathcal{N} = 2$ СКХД	18
1.2 Сигма-модель на мировой поверхности	21
1.3 2D-4D соответствие	23
Глава 2 Неабелевы струны в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД	26
2.1 Основная идея	26
2.2 μ -деформированная $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная КХД	28
2.3 Неабелевы струны	34
2.3.1 Уравнения движения	34
2.3.2 Профильные функции струны	36
2.3.3 Неравные массы кварков	39
2.4 Эффективная теория на мировой поверхности	41
2.4.1 $CP(N - 1)$ модель на мировой поверхности струны	42
2.4.2 Потенциал на мировой поверхности при больших μ	45
2.4.3 Массовый спектр на струне	48
2.5 Фермионные нулевые моды	49
2.5.1 Суперориентационные моды в $\mathcal{N} = 2$ пределе	50
2.5.2 Разложение фермионных ориентационных нулевых мод при малых μ	52
2.5.3 Поднятие фермионных ориентационных мод	56
2.5.4 Эффективное действие в ориентационном секторе	57
2.5.5 Супертрансляционные нулевые моды	58
2.6 Физика в теории на мировой поверхности и невылетающие монополи	60
Глава 3 $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная КХД: исследование семило-	
кальных струн	63
3.1 Постановка задачи	64
3.1.1 Четырёхмерная теория	64
3.1.2 Спектр масс	67
3.2 Семилокальные неабелевы вихри	69

3.2.1	БPS семилокальная неабелева струна	70
3.2.2	Деформированная теория на мировой поверхности	72
3.3	Обсуждение результатов	74
Глава 4	Теория на мировой поверхности в пределе больших N	77
4.1	$\mathbb{C}P(N - 1)$ сигма модели: обзор	78
4.1.1	Несуперсимметричная модель	78
4.1.2	$\mathcal{N} = (2, 2)$ модель	81
4.1.3	μ -деформированная $\mathbb{C}P(N - 1)$ модель	84
4.2	Эффективный потенциал в однопетлевом приближении	87
4.2.1	Вывод эффективного потенциала	88
4.2.2	Вакуумные уравнения	91
4.3	Режим сильной связи	92
4.3.1	Малые деформации	93
4.3.2	Эффективное действие	98
4.3.3	Фазовый переход второго рода	105
4.3.4	Большие деформации	107
4.3.5	Случай ненулевых разностей масс	109
4.4	Хиггсовская фаза	110
4.4.1	Квазивакуумы	111
4.4.2	Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи	116
4.5	Фазовая диаграмма двумерной теории	119
Глава 5	Струнный «барион» в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД	123
5.1	Краткий обзор	123
5.2	Безмассовый барион из теории струн	127
5.3	Масса кинка из точного суперпотенциала	130
5.3.1	Точный центральный заряд	131
5.3.2	Предел $\mathbb{C}P(1)$	133
5.4	Спектр в слабой связи	136
5.5	Зеркальное описание и спектр в сильной связи	137
5.5.1	Зеркальный суперпотенциал	138
5.5.2	Кинки при промежуточных β	139
5.5.3	Кинки вблизи $\beta = 0$	142
5.6	Кривые нейтральной устойчивости (CMS)	144
5.6.1	Первичные кривые на плоскости β	145
5.7	Фаза вместо-конфайнмента	147
5.8	Струнный барион из теории поля	149

5.9	Детали 2D-4D соответствия	152
5.9.1	Связь между константами связи	152
5.9.2	Дуальности	156
5.10	Обсуждение результатов	159
Заключение		162
Приложение А Полезные формулы в двумерном пространстве-времени		165
Приложение Б Решение уравнений Дирака для суперориентационных мод		169
Приложение В Коэффициенты эффективного действия $CP(N-1)$ модели		172
V.1	Краткий обзор	172
V.2	Фермионные петли	173
V.2.1	Кинетическое слагаемое фотона	174
V.2.2	Кинетическое слагаемое поля $Re \sigma$	177
V.2.3	Кинетическое слагаемое поля $Im \sigma$	180
V.2.4	Смешивание $A_\mu - Im \sigma$	182
V.2.5	Возможное смешивание $A_\mu - Re \sigma$	184
V.3	Бозонные петли	185
V.3.1	Взаимодействия полей	185
V.3.2	Кинетическое слагаемое фотона	186
V.3.3	Кинетическое слагаемое поля $Re \sigma$	188
V.3.4	Кинетическое слагаемое поля $Im \sigma$	189
V.3.5	Возможные смешивания	190
V.4	Окончательный ответ	190
Приложение Г Пропагатор фотона в двумерном пространстве-времени		191
Г.1	Пропагатор фотона в обобщённой калибровке	191
Г.2	Массивный фотон	192
Г.3	Наша модель	194
Приложение Д Модулярные функции		195
Д.1	θ -функции	195
Д.2	Функция h	196
Д.3	Функция λ	197

Приложение Е	О центральном заряде в $WCP(2, 2)$ модели	198
Е.1	Вторичные кривые	198
Е.1.1	Распады «дополнительных» кинков	198
Е.1.2	Распад башни состояний с высшими намотками в силь- ной связи	201
Е.2	Намотки центрального заряда в сильной связи	202
Е.2.1	Намотка вдоль θ_{2d}	202
Е.2.2	От положительных к отрицательным β	204
Приложение Ж	Самодуальные точки	206
Список литературы	208

Введение

Явление конфайнмента, понимание природы его возникновения и описание его свойств, является одной из главных нерешённых задач современной теоретической физики. Это явление характерно для сильно взаимодействующих частиц, и стоящий за ним механизм до сих пор окончательно не установлен.

Общепринятой теорией сильных взаимодействий является квантовая хромодинамика (КХД). Конфайнмент кварков и глюонов, или по-другому невылетание цвета, — явление низких энергий, а при низких энергиях КХД находится в режиме сильной связи. Это обстоятельство является серьёзным препятствием к детальным теоретическим исследованиям явления конфайнмента с позиций самой КХД. Однако одним из перспективных подходов, который всё же мог бы помочь в изучении физики в сильной связи, является рассмотрение суперсимметричных аналогов КХД.

В прорывных работах Зайберга и Виттена [1, 2] было показано, что в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теориях возможно явно увидеть явление конденсации монополей. Таким образом, была найдена реализация так называемого дуального эффекта Мейснера, предложенного ранее 'т Хоофтом и Мандельштамом [3, 4]. Этот эффект заключается в следующем: при конденсации магнитных зарядов электрическое поле между двумя пробными электрическими зарядами зажимается в тонкую трубку, что приводит к линейному потенциалу между пробными зарядами. Однако конфайнмент в данной модели по сути является абелевым.

Неабелевы трубки потока (вихри, струны) были обнаружены в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной квантовой хромодинамике (СКХД) с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f = N$ флейворами гипермультиплетов кварков [5, 6, 7, 8] (см. также обзоры [9, 10, 11, 12]). Когда рассматриваемая теория находится в хиггсовской фазе по отношению к скалярным кваркам (т.е. в так называемом кварковом вакууме), образуются неабелевы струны. В слабой связи они приводят к кон-

файнменту монополей, а в сильной связи — к так называемой фазе «вместо конфайнмента», см. обзор [13]. Таким образом, эта модель даёт неабелево обобщение механизма Зайберга-Виттена [1, 2].

Помимо обычных трансляционных нулевых мод, свойственных вихрям Абрикосова-Нильсена-Олесена (АНО) [14], у неабелевой струны есть также ориентационные нулевые моды. Динамика этих мод может быть описана $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной сигма моделью с таргет-пространством $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$. Конечно, координатным пространством этой модели является двумерная мировая поверхность струны [5, 6, 7, 8].

Так как четырёхмерная СКХД находится в хиггсовской фазе по отношению к скалярным кваркам, монополи в этой теории оказываются невылетающими за счёт неабелевых струн. Однако монополи не могут просто прикрепляться к концам струны. На самом деле, в $U(N)$ теориях невылетающие монополя являются соединениями двух различных элементарных неабелевых струн. С точки зрения $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели, живущей на мировой поверхности струны, невылетающие монополи видны как кинки, интерполирующие между различными вакуумами $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели [7, 8, 15] (см. также обзор [11]).

Цель данной работы — обобщить эти построения на теории с меньшим числом суперсимметрий, а также углубить понимание динамики неабелевых струн, изучая их в $\mathcal{N} = 2$ теории. Мы начнём с первой из этих целей.

$\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная квантовая хромодинамика является хорошей теоретической лабораторией, удобной для изучения непертурбативной неабелевой динамики. Однако, так как в конце концов мы хотим лучше изучить «реальный мир», мы заинтересованы в рассмотрении более реалистичных моделей. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная КХД — один из наиболее многообещающих примеров. Так же как и в обычной КХД, в этой теории нет так называемых присоединённых скаляров, т.е. скалярных полей в присоединённом представлении калибровочной группы. Поэтому здесь не может происходить абелизация, которая как раз возникает из-за конденсации этих скалярных полей.

Много работы было сделано для того, чтобы обобщить конструкцию неабелевых струн на КХД-подобные теории с меньшим числом суперсимметрий, в частности на $\mathcal{N} = 1$ СКХД [16, 17, 18, 19], см. также обзор [11]. К развитию данного направления приложил руку и автор данной диссертации, см.

[19, 20, 21, 22]. Один из перспективных подходов — деформировать $\mathcal{N} = 2$ СКХД при помощи массы μ присоединённой материи (получается так называемая μ -деформированная СКХД) и исследовать, что происходит с неабелевыми струнами при такой деформации. Данная деформация нарушает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию. В пределе $\mu \rightarrow \infty$ присоединённая материя отщепляется, и, как следствие, четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД.

Этот нелёгкий путь начинается в Главе 2 с рассмотрения простейшего случая, когда число ароматов кварковых гипермультиплетов такое же, как число цветов, $N_f = N$. μ -деформированная $\mathcal{N} = 2$ СКХД, снабжённая D -членом Файе-Илиополуса (ФИ), уже рассматривалась в литературе [16, 17, 18, 23, 24, 25]. В этом случае солитонный вихрь-струна точно удовлетворяет границе Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (общепринятая аббревиатура — BPS), что упрощает анализ. Однако при больших μ эта теория не переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД.

В данной работе мы встаём на иной путь и рассматриваем μ -деформированную $\mathcal{N} = 2$ СКХД без ФИ-члена в кварковом вакууме. Такая теория более «реалистична», т.к. в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД нет никакого ФИ-члена. И действительно, в пределе больших μ такая деформированная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Вакуумное среднее кварков здесь задаётся параметром $\sqrt{\mu t}$, где t — масса кварка. Это обстоятельство приводит к тому, что неабелевы струны больше не удовлетворяют BPS-границе в точности (или, как говорят, не насыщают BPS-границу). Это сильно усложняет исследование таких солитонов, но такое исследование всё ещё остаётся возможным.

Очень важным для физики вопросом является вопрос о том, выживают ли монополи в пределе больших μ , когда четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. С точки зрения квазиклассики, само существование монополей 'т Хоофта–Полякова основано на наличии присоединённых скаляров, развивающих ненулевое вакуумное среднее. Эти вакуумные средние делают возможными подобные солитонные решения классических уравнений движения. Присоединённые поля также играют ключевую роль в механизме Зайберга–Виттена, где их вакуумные средние приводят к формированию монополей, которые в свою очередь конденсируются, что в конечном счёте приводит к конфайнменту. При больших μ присоединённые поля становятся тяжёлыми и отщепляются в нашей

четырёхмерной теории, а их вакуумные средние зануляются. Таким образом, с точки зрения квазиклассики можно было бы ожидать, что монополи также пропадают.

В пределе больших μ в данной работе удалось вывести эффективную теорию на мировой поверхности неабелевой струны. Трансляционный сектор снова тривиален, но кое-что происходит с ориентационными модами струны. Оказывается, что в то время как бозонный сектор теории всё ещё описывается $CP(N - 1)$ моделью, фермионный сектор полностью отщепляется. Это происходит из-за того, что суперориентационные фермионные нулевые моды струны становятся массивными. Из-за этого теория на мировой поверхности вынуждена находиться в кулоновской фазе (фазе конфайнмента), по крайней мере при больших N , см. [26]. Более того, разности масс кварков индуцируют потенциал в эффективной теории, который приводит к распаду монополей. Тем самым, для того чтобы монополи выжили при этом переходе, массы кварков в четырёхмерной теории должны быть одинаковыми.

Эти результаты показывают, что неабелевы струны и невылетающие монополи μ -деформированной $\mathcal{N} = 2$ СКХД выживают в пределе больших μ , когда четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Это важный и несколько неожиданный результат. Он служит свидетельством в пользу физически важного вывода, сделанного ранее (см. например обзор [13]), о том, что фаза «вместо конфайнмента» выживает в пределе больших μ в кварковом вакууме деформированной СКХД.

После этого мы двигаемся дальше и рассматриваем случай $N_f > N$ в Главе 3. Теперь у неабелевых струн появляются новые нулевые моды, так называемые моды размера, или размерные моды. Такая струна называется семилокальной. Мы изучаем, что происходит с семилокальной струной в μ -деформированной СКХД. Как можно было ожидать, обнаруживается, что рассматриваемый солитонный вихрь перестаёт быть BPS-насыщенным. Теория на мировой поверхности более не является суперсимметричной.

Несколько удивительным оказывается то, что «семилокальность» такой струны тоже пропадает. Появляется потенциал, зависящий от размерных модулей струны, вследствие чего эти моды становятся тяжёлыми, струна сжимается и становится «локальной». В пределе больших μ теория на мировой поверхности

становится точно такой же, как в случае $N_f = N$. И снова наличие монополей, соединяющих неабелевы струны, является свидетельством в пользу механизма «вместо конфайнмента».

Следующий логичный шаг на этом пути — подробное рассмотрение теории на мировой поверхности. Это сделано в Главе 4 при помощи $1/N$ разложения. Приближение больших N было впервые использовано Виттенем для решения как несуперсимметричной, так и $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной двумерных $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ моделей [26].

Здесь мы используем приближение больших N для изучения фазовой структуры теории на мировой поверхности неабелевой струны в μ -деформированной СКХД по отношению к параметру деформации μ и разности масс кварков Δm . Обнаруживается богатая фазовая структура, включающая две фазы сильной связи и две хиггсовских фазы.

В случае $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрии данная теория обладает семейством вырожденных вакуумов, соответствующих различным неабелевым струнам в четырёхмерном пространстве. Оказывается, что, если мы начнём с малых μ и станем увеличивать параметр деформации, теория на мировой поверхности претерпевает один или несколько фазовых переходов.

При больших Δm бывшие вырожденные вакуумы расщепляются и превращаются в квазивакуумы, которые в конечном счёте пропадают, когда параметр деформации μ становится достаточно большим. Напротив, если положить Δm равным нулю, то расщеплённые квазивакуумы не пропадают. Даже в пределе больших μ в теории всё ещё имеются N квазивакуумов, соответствующих неабелевым струнам с разными натяжениями. Кинки, интерполирующие между этими вакуумами, выживают.

Это позволяет заключить, что невылетающие монополи выживают при μ -деформации, если массы кварков равны друг другу. Тем самым мы подтверждаем результаты, полученные из четырёхмерной СКХД. Это также подтверждают самосогласованность нашего подхода.

Второй целью данной работы является более глубокое изучение неабелевых струн в $\mathcal{N} = 2$ случае [27].

Рассмотрим $\mathcal{N} = 2$ СКХД с калибровочной группой $U(N = 2)$, $N_f = 4$ ароматами кварков и ФИ D -членом [28]. Ранее в работе [29] было установлено, что

неабелевы семилокальные струны в данной теории обладают особыми свойствами. В четырёхмерии константа связи не перенормируется и β -функция равна нулю точно. Теория на мировой поверхности оказывается суперконформной и критической.

При анализе этих неабелевых струн была высказана гипотеза «тонкой струны» [29]. Говоря кратко, она утверждает, что в пределе сильной связи поперечный размер струны стремится к нулю, и, таким образом, поправки по высшим производным в низкоэнергетической эффективной теории отсутствуют. Такая струна может рассматриваться как критическая суперструна. Это позволяет применять продвинутую технику теории струн, например, для вычисления спектра состояний в этой теории. Данная теория неабелевой струны была идентифицирована как теория струн типа IIA [30].

Адроны $\mathcal{N} = 2$ СКХД могут быть представлены как состояния замкнутой струны¹. В частности, в работах [30, 31] был найден безмассовый гипермультиплет, который был идентифицирован как барион четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД. Он был назван b -барионом.

Важной задачей является проверка описанных выше струнных результатов с точки зрения самой теории поля. Именно эти задачи решаются в данной работе, см. Главу 5. Для этого используется так называемое 2D-4D соответствие, т.е. совпадение BPS спектров в четырёхмерной (4D) $\mathcal{N} = 2$ СКХД, с одной стороны, и в двумерной (2D) теории на мировой поверхности струны [7, 8, 32], с другой стороны. Это позволяет сконцентрироваться на изучении двумерной эффективной теории, а после этого перевести результаты на четырёхмерный язык.

Мы исследуем BPS-защищённый сектор $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели на мировой поверхности, начиная с режима слабой связи, где можно сравнить получаемые результаты с квазиклассическим расчётом. После того как спектр частиц в этой области надёжно установлен, можно продвигаться в режим сильной связи. Удаётся подтвердить, что теория действительно входит в так называемую фазу «вместо конфайнмента», обнаруженную ранее, см. обзор [13]. Эта фаза

¹Дело в том, что в данной теории отсутствуют открытые струны, так как неабелева струна не может оканчиваться на монополе. Вместо этого монополь является соединительным узлом двух неабелевых струн. Это обстоятельство косвенно говорит о самосогласованности нашего подхода, так как в присутствии открытых струн мы имели бы $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрию в четырёхмерии вместо $\mathcal{N} = 2$.

качественно напоминает обычный конфайнмент в КХД: кварки и калибровочные бозоны, заэкранированные в слабой связи, в сильной связи превращаются в монополь-антимонопольные пары, внутри которых монополи соединены неабелевыми струнами и являются невылетающими. Они образуют мезоны и барионы.

В очень сильной связи возникает новый короткий BPS безмассовый гипермультиплет, который оказывается тем самым b -барионом, найденным ранее из струнной картины. Тем самым мы демонстрируем, что безмассовое «барионное» состояние, которое было обнаружено ранее с использованием теории струн, видно также из теоретико-полевого подхода. Судя по всему, это первый пример подобного рода.

Эти результаты также служат очередным подтверждением гипотезы «тонкой струны», упомянутой выше. Оперирование солитонной струной как критической суперструной, судя по всему, является самосогласованной процедурой. Таким образом, в этом нелёгком путешествии «по водам сильной связи» у нас имеются надёжный руль и хорошие паруса.

Положения, выносимые на защиту

Следующие положения выносятся на защиту:

1. Показано, что неабелевы струны и невылетающие монополи μ -деформированной $\mathcal{N} = 2$ СКХД выживают в пределе больших μ , когда четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. А именно, они выживают в том случае, если массы кварков СКХД одинаковы.
2. Показано, что низкоэнергетической эффективной теорией на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 1$ СКХД с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f = N$ гипермультиплетами кварков в ориентационном секторе является несуперсимметричная сигма-модель с таргет-пространством $CP(N - 1)$. Трансляционный сектор является тривиальным и отщепившимся.
3. Показано, что семилокальная струна μ -деформированной $\mathcal{N} = 2$ СКХД с $N < N_f < 2N$ вырождается в пределе больших μ , когда четырёхмер-

ная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. А именно, появляется потенциал, зависящий от модулей размера струны, вследствие чего последние отщепляются, и семилокальная струна превращается в локальную. Теория на мировой поверхности в этом пределе совпадает с теорией в случае $N_f = N$.

4. Низкоэнергетическая эффективная теория на мировой поверхности неабелевой струны в теории, интерполирующей из $\mathcal{N} = 2$ в $\mathcal{N} = 1$ СКХД, решена в главном порядке приближения больших N . Решение этой модели подтверждает результаты, полученные из рассмотрения четырёхмерной теории, а именно то, что неабелевы струны и невылетающие монополи выживают в пределе одинаковых масс кварков. Более того, найдена фазовая диаграмма теории на мировой поверхности.
5. Существование безмассового b -барионного гипермультиплетта $\mathcal{N} = 2$ СКХД с калибровочной группой $U(2)$ и $N_f = 4$ ароматами гипермультиплетов кварков, полученного ранее с использованием теории струн, подтверждено в данной работе при помощи методов теории поля. Это является очередным свидетельством в пользу гипотезы «тонкой струны» для неабелевой струны в данной теории.
6. Механизм «вместо конфайнмента» продемонстрирован явным образом в $\mathcal{N} = 2$ СКХД с калибровочной группой $U(2)$ и $N_f = 4$ ароматами гипермультиплетов кварков. Показано, что после пересечения стенки нейтральной устойчивости заэкранированные кварки и калибровочные бозоны, присутствовавшие в слабой связи, заменяются на связанные монополь-антимонопольные пары в сильной связи.

Структура диссертации

Данная диссертация состоит из Введения, пяти Глав, Заключения, семи Приложений и списка литературы. Диссертация содержит 216 страниц, 29 рисунков. Список литературы включает в себя 98 наименований.

- Во **Введении** кратко описываются задачи, решаемые в данной диссертации. Кроме того, формулируются основные положения, выносимые на защиту, а также обсуждается апробация данной работы.

- В **Главе 1** приводятся необходимые сведения о неабелевых струнах в суперсимметричных калибровочных теориях.
- В **Главе 2** рассматривается μ -деформированная $\mathcal{N} = 2$ СКХД с числом цветов, равным числу ароматов $N_f = N$. В особенности изучается предел больших μ , когда теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Исследуется судьба неабелевых струн и невылетающих монополей в этом пределе.
- В **Главе 3** построения Главы 2 обобщаются на случай $N_f > N$. Изучается вопрос о том, что происходит с семилокальной струной в $\mathcal{N} = 1$ пределе.
- В **Главе 4** представлено исследование низкоэнергетической эффективной теории на неабелевой струне в СКХД, интерполирующей между $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 1$ суперсимметриями. Упор делается на случай $N_f = N$. Используя разложение при больших N , получено решение теории на мировой поверхности, а также фазовая диаграмма модели.
- **Глава 5** посвящена несколько иному направлению исследований, а именно неабелевым струнам в $\mathcal{N} = 2$ СКХД в калибровочной группой $U(2)$ и $N_f = 4$ гипермультиплетами кварков. В этом случае, теория на мировой поверхности является суперконформной. В этой Главе при помощи методов теории поля подтверждено существование безмассового b -бариона, найденного ранее при помощи методов теории струн. Кроме того, механизм «вместо конфайнмента» изучается в действии.
- В **Заключении** кратко описаны основные результаты данной работы и возможные направления дальнейших исследований.
- Развёрнутые **Приложения** содержат полезную информацию и некоторые дополнительные результаты. В них разъясняется и дополняется часть материала, представленного в основной части данной диссертации. В то же время они не затрудняют чтение основных Глав диссертации.

Личный вклад автора

Все основные результаты были получены лично автором или при совместной работе с другими исследователями.

Апробация результатов исследования

Результаты данного исследования докладывались и обсуждались на следующих конференциях:

1. 2015 09-12 ноября, СПбГУ: Международная студенческая конференция "Science and Progress"
2. 2016 29 февраля - 05 марта, Рощино, Россия: 50-я Зимняя Школа ПИЯФ
3. 2016 17-21 октября, СПбГУ: Международная студенческая конференция "Science and Progress"
4. 2018 27 мая - 2 июня, Валдай, Россия: XX международный семинар по физике высоких энергий "Quarks-2018"
5. 2018 14-23 июня, Эриче, Италия: 56-я Международная школа по субъядерной физике "From gravitational waves to QED, QFD and QCD"
6. 2018 27-31 августа, СПбГУ: VI международная конференция "Models in Quantum Field Theory"
7. 2019 2-7 марта, Рощино, Россия: 53-я Зимняя Школа ПИЯФ
8. 2019 21-30 июня, Эриче, Италия: 57-я Международная школа по субъядерной физике "In Search for the Unexpected"
9. 2020 10-15 марта, Рощино, Россия: 54-я Зимняя Школа ПИЯФ
10. 2020 13-24 июля, онлайн: летняя школа "QFT and Geometry Summer School"
11. 2020 24-28 августа, онлайн: школа "Hamilton School on Mathematical Physics"
12. 2020 9-13 ноября, онлайн: международная конференция "The XXIV International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists"
13. 2020 16-20 ноября, онлайн: международная конференция "YITP workshop Strings and Fields"

Кроме того, результаты данного исследования докладывались и обсуждались на семинарах Отделения теоретической физики НИЦ Курчатовский институт — ПИЯФ, а также на семинарах кафедры Физики высоких энергий и элементарных частиц Санкт-Петербургского Государственного Университета.

Результаты, полученные в данной работе, были опубликованы в 5 статьях (входят в базы данных РИНЦ, Web of Science и Scopus):

1. E. Ievlev, A. Yung, *Non-Abelian strings in $N=1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **95**, 125004 (2017)
2. E. Ievlev, A. Yung, *What Becomes of Semilocal non-Abelian strings in $N=1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **98**, 094033 (2018)
3. E. Ievlev, A. Yung, *Non-Abelian strings in $N=1$ supersymmetric QCD (Conference Paper)*, EPJ Web of Conferences **191**, 06003 (2018)
4. A. Gorsky, E. Ievlev, A. Yung, *Dynamics of non-Abelian strings in the theory interpolating from $N=2$ to $N=1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **101**, 014013 (2020)
5. E. Ievlev, M. Shifman, A. Yung, *String Baryon in Four-Dimensional $N=2$ Supersymmetric QCD from the 2D-4D Correspondence*, Phys. Rev. D **102**, 054026 (2020)

Благодарности

Автор данной диссертации выражает свою глубочайшую благодарность своему научному руководителю Алексею Викторовичу Юнгу за его терпение, дружеское расположение и поддержку. В течение нескольких лет он вёл меня к пониманию современной теоретической физики и постоянно делился своими идеями. Соискатель также хотел бы поблагодарить соавторов статей, Михаила Аркадьевича Шифмана и Александра Сергеевича Горского, без которых эта работа вряд ли стала бы возможной.

Данное исследование было поддержано Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС» в рамках гранта No. 19-1-5-106-1 «Аспирант», а также Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) в рамках

научных проектов No. 18-32-00015 (для молодых учёных) и No. 18-02-00048. Автор надеется, что РФФИ продолжит поддержку небольших научных групп и амбициозных молодых учёных.

Автор благодарит также Санкт-Петербургский Государственный Университет и НИЦ Курчатовский институт — ПИЯФ, где была выполнена данная работа. Соискатель выражает свою благодарность членам Теоретического отделения ПИЯФ и Кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц СПбГУ за участие в обсуждениях результатов, представленных в данной работе.

ГЛАВА 1

Неабелевы струны в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД: основные сведения

Данная Глава дополняет Введение. Здесь более подробно представлены необходимые сведения о неабелевых струнах.

1.1 Четырёхмерная $\mathcal{N} = 2$ СКХД

Неабелевы вихри (трубки потока, струны) были впервые обнаружены в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f \geq N$ ароматами кварков [5, 6, 7, 8], см. также обзоры [9, 10, 11, 12]. В частности, сектор материи такой $U(N)$ теории содержит N_f гипермультиплетов кварков, каждый из которых состоит из комплексных скалярных полей q^{kA} и \tilde{q}_{Ak} (скварков) и их фермионных суперпартнёров — все в фундаментальном представлении калибровочной группы $SU(N)$. Здесь, $k = 1, \dots, N$ — цветной индекс, в то время как A — индекс аромата, $A = 1, \dots, N_f$. Мы также вводим массы кварков m_A . Кроме того, в лагранжиан вводится ФИ параметр ξ , соответствующий D -члену для $U(1)$ множителя в калибровочной группе. Это слагаемое не нарушает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию.

В слабой связи, $g^2 \ll 1$ (здесь g^2 — калибровочная константа связи $SU(N)$), данная теория находится в Хиггсовском режиме, в котором скварки имеют ненулевые вакуумные средние. Эти вакуумные средние даются формулой

$$\langle q^{kA} \rangle = \sqrt{\xi} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \tilde{q}^{kA} \rangle = 0,$$

$$k = 1, \dots, N, \quad A = 1, \dots, N_f, \quad (1.1.1)$$

где поля скварков представлены в виде матриц по цветному (k) и флейворному (A) значкам (маленькими латинскими буквами нумеруются строки этих матриц, а заглавными — столбцы).

Такие вакуумные средние нарушают калибровочную группу $U(N)$. В результате, все калибровочные бозоны оказываются массивными за счёт механизма Хиггса. Они объединяются с заэкранированными кварками и формируют длинные $\mathcal{N} = 2$ мультиплеты с массой

$$m_G \sim g\sqrt{\xi}. \quad (1.1.2)$$

Кроме калибровочной симметрии $U(N)$, конденсат скварков (1.1.1) нарушает также группу симметрии ароматов $SU(N_f)$. Если массы кварков равны нулю, то выживает диагональная подгруппа $SU(N)$, составленная из калибровочной группы $SU(N)$ и $SU(N)$ -подгруппы флейворной группы $SU(N_f)$. Это — хорошо известный пример блокировки цвета и аромата (англ. color-flavor locking).

Таким образом, ненарушенной глобальной симметрией нашей четырёхмерной СКХД является

$$SU(N)_{C+F} \times SU(\tilde{N}) \times U(1)_B. \quad (1.1.3)$$

Выше,

$$\tilde{N} = N_f - N.$$

Симметрия $U(1)$ в (1.1.3) ассоциируется с \tilde{N} кварками с флейворными значками $A = N + 1, N + 2, \dots, N_f$, подробности см. в [11]. Говоря точнее, наша $U(1)_B$ — ненарушенная (вакуумными средними скварков) комбинация двух $U(1)$ симметрий: первая — подгруппа флейворной $SU(N_f)$, вторая — глобальная $U(1)$ подгруппа калибровочной группы $U(N)$.

Ненарушенная глобальная группа $U(1)_B$ в формуле (1.1.3) идентифицируется с «барионной» симметрией. Отметим, что то, что обычно идентифицируется с барионным $U(1)$ -зарядом, является *частью* нашей *калибровочной* группы СКХД.

Эта теория обладает хиггсовской веткой \mathcal{H} , формируемой безмассовыми кварками, находящимися в бифундаментальном представлении глобальной группы (1.1.3) и несущими барионный заряд, подробности см. в работе [30].

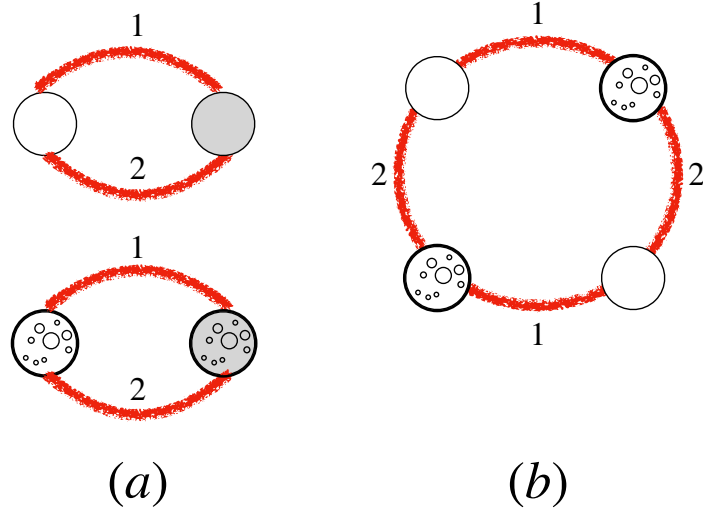


Рис. 1.1: Примеры «ожерелий» из монополей: (а) мезонных; (б) барионных. Цифры 1,2 относятся к двум типам струн, соответствующим двум вакуумам теории на мировой поверхности. Закрашенные кружки представляют антимнополю. Два типа кинков есть n^P -кинки и ρ^K -кинки.

Размерность этой ветки даётся формулой

$$\dim \mathcal{H} = 4N\tilde{N}. \quad (1.1.4)$$

Такая пертурбативная хиггсовская ветка — точное свойство теории, и она может быть продолжена прямо в область сильной связи.

Как уже было отмечено ранее, мы рассматриваем $\mathcal{N} = 2$ СКХД в фазе Хиггса: N скварков развивают ненулевые вакуумные средние. Поэтому неабелевы струны, присоединённые к монополям, приводят к их невылетанию. В четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ теории эти струны $1/2$ BPS-насыщены; поэтому, их натяжение определяется в точности ФИ-параметром,

$$T = 2\pi\xi. \quad (1.1.5)$$

Однако, монополи не могут просто присоединиться к концам струны, так как в $U(N)$ теориях струны стабильны топологически. На самом деле, в $U(N)$ теориях невылетающие монополи являются соединениями двух различных элементарных неабелевых струн [7, 8, 33] (см. обзор [11]). В результате, в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД мы появляются монополь-антимнопольные мезоны, в которых монополь и антимнополь соединены двумя струнами, см. Рис. 1.1а. Кроме того, в $U(N)$ калибровочных теориях есть также и барионы, напоминающие собой «ожерелья» из $N \times$ (целое число) монополей [11]. Например, в

случае калибровочной группы $U(2)$ возможно барионное состояние, состоящее из четырёх монополей, как показано на Рис. 1.1b.

Как монополь-антимонопольные мезоны, так и монопольные барионы со спинами $J \sim 1$ имеют массы, определяемые натяжением струны, $\sim \sqrt{\xi}$, и в слабой связи $g^2 \ll 1$ они тяжелее, чем пертурбативные состояния с массами порядка $m_G \sim g\sqrt{\xi}$. Таким образом, они распадаются на пертурбативные состояния¹ и, на самом деле, в слабой связи нельзя ожидать, что они возникают как стабильные состояния.

Только в области сильной связи $g^2 \sim 1$ можно ожидать что такие струнных мезоны и барионы (или по крайней мере некоторые из них), показанные на Рис. 1.1, становятся стабильными.

1.2 Сигма-модель на мировой поверхности

Наличие глобальной группы $SU(N)_{C+F}$ является причиной формирования неабелевых вихрей-струн [5, 6, 7, 8]. Наиболее важной особенностью этих вихрей является наличие ориентационных нулевых мод. Как уже было упомянуто выше, в $\mathcal{N} = 2$ СКХД такие струны являются $1/2$ BPS-насыщенными.

Рассмотрим вкратце модель, возникающую на мировой поверхности неабелевой струны [11].

Поля, отвечающие трансляционным модулям, описываются действием Намбу-Гото² и отщепляются от остальных модулей. Ниже мы будем обсуждать главным образом внутренние модули.

Если $N_f = N$, то динамика ориентационных нулевых мод неабелевого вихря, которые становятся полями ориентационных модулей на мировой поверхности, описывается двумерной $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной $CP(N - 1)$ моделью.

Если ввести дополнительные ароматы кварков, то неабелевы струны становятся семилокальными — у них появляются модули размера, или размерные модули [34]. В случае семилокального неабелева вихря в $U(N)$ $\mathcal{N} = 2$ СКХД с N_f ароматами, кроме комплексных ориентационных модулей n^P (здесь $P = 1, \dots, N$), необходимо также добавить размерные модули ρ^K (где $K =$

¹Их квантовые числа по отношению к глобальной группе (1.1.3) допускают такие распады, см. [11].

²В суперсимметризованной форме.

$N + 1, \dots, N_f$), см. работы [5, 8, 34, 35, 36, 37]. Размерные модули также являются комплексными.

Эффективная теория на мировой поверхности струны является двумерной $\mathcal{N} = (2, 2)$ взвешенной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ сигма моделью, для которой вводится обозначение $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(N, \tilde{N})$ ³ [29, 30, 31]. Эта модель описывает внутреннюю динамику неабелевой семилокальной струны. Подробности можно найти, например, в обзоре [11].

Сигма-модель $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(N, \tilde{N})$ может быть определена как низкоэнергетический предел некоторой $U(1)$ калибровочной теории [40]. Бозонная часть действия этой теории выглядит следующим образом:⁴

$$S = \int d^2x \left\{ |\nabla_\alpha n^P|^2 + |\tilde{\nabla}_\alpha \rho^K|^2 + \frac{1}{4e^2} F_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{e^2} |\partial_\alpha \sigma|^2 + 2 \left| \sigma + \frac{m_P}{\sqrt{2}} \right|^2 |n^P|^2 + 2 \left| \sigma + \frac{m_K}{\sqrt{2}} \right|^2 |\rho^K|^2 + \frac{e^2}{2} (|n^P|^2 - |\rho^K|^2 - r)^2 \right\}, \quad (1.2.1)$$

$$P = 1, \dots, N, \quad K = N + 1, \dots, N_f.$$

Здесь, m_A ($A = 1, \dots, N_f$) есть так называемые твистованные массы⁵ (они происходят из масс кварков в четырёхмерии), в то время как r — обратная константа связи (ФИ-слагаемое в двумерии). Отметим, что r является вещественной частью комплексифицированной константы связи, введённой в формуле (1.2.5),

$$r = \text{Re } \beta.$$

Поля n^P и ρ^K обладают зарядами $+1$ и -1 по дополнительной калибровочной группе $U(1)$, и соответствующие ковариантные производные в (1.2.1) определяются как

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha - iA_\alpha, \quad \tilde{\nabla}_\alpha = \partial_\alpha + iA_\alpha, \quad (1.2.2)$$

³Как ориентационные, так и размерные модули обладают логарифмически расходящимися нормами, см. например [35]. После подходящей инфракрасной регуляризации, логарифмически расходящиеся нормы могут быть поглощены в определения соответствующих двумерных полей [35]. На самом деле, теория на мировой поверхности семилокальной неабелевой струны не является в точности $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(N, \tilde{N})$ моделью [37], существуют небольшие отличия. Истинная теория называется zn моделью. Тем не менее, инфракрасная физика в ней та же самая, как и в модели (1.2.1) [38], см. также [39].

⁴Формула (1.2.1) и аналогичные выражения ниже приведены в Евклидовой формулировке.

⁵Англ. twisted masses

соответственно. Комплексное скалярное поле σ является суперпартнёром $U(1)$ калибровочного поля A_α .

Число бозонных степеней свободы в модели (1.2.1) равно $2N_f - 1 - 1 = 2(N_f - 1)$. Здесь, $2N_f$ есть число вещественных степеней свободы полей n^P и ρ^K , и мы также учли одно вещественное ограничение, накладываемое последним слагаемым в (1.2.1) в пределе $e^2 \rightarrow \infty$, и одну фазу, съедаемую механизмом Хиггса.

Помимо упомянутой выше калибровочной симметрии $U(1)$, сигма-модель (1.2.1) в безмассовом случае обладает также глобальной группой симметрии

$$SU(N) \times SU(\tilde{N}) \times U(1)_B, \quad (1.2.3)$$

то есть в точности такой же, как и ненарушенная глобальная группа четырёхмерной теории (1.1.3). Поля n и ρ преобразуются по следующим представлениям:

$$n : (\mathbf{N}, \mathbf{1}, 0), \quad \rho : (\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{N}}, 1). \quad (1.2.4)$$

Здесь, глобальная «барионная» $U(1)_B$ симметрия есть ненарушенная на классическом уровне (при $\beta > 0$) комбинация глобальной $U(1)$ группы, вращающей поля n и ρ с одинаковыми фазами, и калибровочной группы $U(1)$, вращающей их с противоположными фазами, подробности см. в работе [30]. Ненулевые твистованные массы m_A нарушают каждую из SU -компонент в (1.2.3) до произведения групп $U(1)$.

Двумерная константа связи естественным образом комплексифицируется с включением в действие θ -члена

$$\beta = r + i \frac{\theta_{2d}}{2\pi}, \quad (1.2.5)$$

ult θ_{2d} — θ -угол в двумерии.

1.3 2D-4D соответствие

Существующие исследования вихрей в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД в слабой связи показывают, что неабелевы струны удерживают монополи, приводя к их невылетанию. Элементарные монополи являются соединениями двух различных элементарных неабелевых струн [7, 8]. В четырёхмерной теории мы имеем монополь-антимонопольные мезоны, в которых монополь и антимонополь

соединены двумя удерживающими струнами (см. Рис. 1.1). В случае с калибровочной группой $U(N)$ мы также имеем «барионы», состоящие из $N \times$ (целое число) монополей.

Монополи обладают нетривиальными квантовыми числами по отношению к глобальной группе симметрии (1.1.3) четырёхмерной СКХД, см. обзор [11]. И действительно, с точки зрения теории на мировой поверхности неабелевой струны, невылетающие монополи видны как кинки, интерполирующие между двумя разными вакуумами [7, 8]. Эти кинки описываются в сильной связи полями n^P и ρ^K [26, 41] (для $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ модели $P = 1, \dots, N$, $K = N + 1, \dots, N_f$). Эти два типа кинков соответствуют двум типам монополей — у обоих один и тот же магнитный заряд, но разные глобальные заряды. Это видно уже из того, что глобальная группа симметрии теории на мировой поверхности точно такая же, как в (1.1.3), а $U(1)$ заряды полей n^P и ρ^K равны 0 и 1, соответственно. Одно из них преобразуется в фундаментальном представлении по первой группе SU , другое — по второй, см. (1.2.4). То же самое относится и к монополям в четырёхмерии.

Как уже отмечалось выше, невылетающие монополи четырёхмерной СКХД являются соединениями двух различных неабелевых струн. С точки зрения теории на мировой поверхности они видны как кинки, интерполирующие между двумя различными вакуумами $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ модели. Это является причиной так называемого 2D-4D соответствия, то есть совпадения спектра BPS монополей в четырёхмерной СКХД в некоторой сингулярной точке кулоновской ветки (которая становится кварковым вакуумом (1.1.1) при введении ненулевого ξ) с одной стороны, и спектра кинков двумерной $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ модели с другой стороны. Массы (дионных) монополей в четырёхмерной СКХД даются точным решением Зайберга-Виттена [2], в то время как спектр кинков $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ модели может быть получен из точного твистованного эффективного потенциала [32, 40, 42, 43, 44, 45]. Этот эффективный суперпотенциал может быть написан в терминах твистованного кирального суперполя, низшей компонентой которого является комплексное скалярное поле σ (см. (1.2.1)) [40]. Этот суперпотенциал вводится в Разделе 5.3, и с его помощью изучается спектр кинков $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ модели.

Это совпадение было обнаружено в работах [32, 45] и позже объяснено в

[7, 8] при помощи представления о невылетающих монополях в четырёхмерии как о кинках в теории на мировой поверхности. Важным при этом является тот факт, что как монополи, так и кинки являются BPS-насыщенными состояниями⁶, и их массы не могут зависеть от неголоморфного параметра ξ [7, 8]. Это означает, что, хотя невылетающие монополи и выглядят физически совсем по-другому, нежели обычные монополи на кулоновской ветке четырёхмерной СКХД (в определённой сингулярной точке, которая становится изолированным вакуумом при ненулевых ξ), их массы равны. Более того, эти массы совпадают с массами кинков в теории на мировой поверхности.

Отметим, что вакуумные средние поля σ , получаемые из точного твистованного суперпотенциала, совпадают с двойными корнями кривой Зайберга-Виттена [2] в кварковом вакууме четырёхмерной СКХД [32, 45]. Это является ключевой технической причиной, ведущей к совпадению спектров в двумерии и в четырёхмерии.

⁶Невылетающие монополи, будучи соединениями двух различных 1/2-BPS струн, являются 1/4-BPS состояниями в четырёхмерной СКХД [7].

ГЛАВА 2

Неабелевы струны в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД

Так же как и в обычной КХД, в $\mathcal{N} = 1$ СКХД нет скалярных полей в присоединённом представлении калибровочной группы. Поэтому считается, что динамика этой теории существенно неабелева. С другой стороны, благодаря суперсимметрии её легче изучать, чем несуперсимметричную КХД. Можно надеяться, что, начав с $\mathcal{N} = 2$ СКХД и отщепив присоединённые скаляры, можно придти к неабелеву режиму. В частности, уже было показано, что фаза «вместо конфайнмента» выживает в пределе, когда присоединённая материя (присутствовавшая в $\mathcal{N} = 2$ КХД) отщепляется, см. обзор [13] и упомянутые в нём работы.

В данной Главе мы делаем этот шаг и исследуем, что же происходит с неабелевыми струнами и невылетающими монополями при отщеплении присоединённой материи. Мы рассматриваем некоторую деформацию $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f = N$ ароматами кварков, а именно вводя массовое слагаемое μ для материи в присоединённом представлении. Такая μ -деформация нарушает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию, и в пределе больших μ теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную КХД.

2.1 Основная идея

Помимо трансляционных мод, типичных для АНО струн, неабелевы струны обладают также ориентационными модулями, соответствующими вращениям их потоков внутри неабелевой группы $SU(N)$. Динамика ориентационных модулей в $\mathcal{N} = 2$ КХД описывается двумерной $CP(N - 1)$ моделью, живущей на мировой поверхности неабелевой струны. В данной Главе мы изучаем реше-

ния для таких неабелевых струн и выводим эффективную теорию на мировой поверхности струны в пределе больших μ .

Схожая задача была рассмотрена в работах [16, 17, 18, 23, 24, 25], где μ -деформация рассматривалась в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f = N$ ароматами безмассовых кварков, снабжённая ФИ D -членом. В пределе больших μ эта теория переходит в некоторую теорию, отличающуюся от $\mathcal{N} = 1$ КХД как раз наличием такого ФИ слагаемого. В частности, в этой теории конденсация скалярных кварков вызвана этим ФИ D -членом.

В вышеупомянутых работах было показано, что бозонные профильные функции неабелевой струны не меняются при μ -деформации, тогда как фермионные нулевые моды становятся другими, отличающимися от тех, какими они были в пределе $\mathcal{N} = 2$. Струна остаётся BPS-насыщенной, и теория на мировой поверхности превращается в гетеротическую $CP(N-1)$ модель с $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперсимметрией [17, 18, 23, 25]. В этой модели, супертрансляционные фермионные модули взаимодействуют с суперориентационными. Решение теории на мировой поверхности при больших N показывает, что $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперсимметрия спонтанно нарушена [24]. В этой модели имеются N вакуумов, соответствующих N различным неабелевым струнам, и дискретная симметрия Z_{2N} спонтанно нарушается.

В этой Главе рассматривается μ -деформация $\mathcal{N} = 2$ СКХД без ФИ слагаемого в кварковом вакууме. Конденсат скварков определяется выражением $\sqrt{\mu t}$, где t — масса кварка. Отметим, что в присутствии ФИ D -члена нельзя было бы ввести массы кварков, тогда как в рассматриваемой здесь модели кварки массивны. Более того, как уже было упомянуто выше, эта теория более «реалистична» также потому, что в ней нет ФИ-слагаемого. В пределе больших μ она переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД в кварковом вакууме. Неабелевы струны перестают быть BPS-насыщенными, и фермионные профили струны изменяются.

Мы изучаем решения для неабелевых профильных функций в пределе больших μ и выводим эффективную теорию на мировой поверхности струны. Бозонный сектор этой теории всё ещё описывается $CP(N-1)$ моделью. $CP(N-1)$ модель асимптотически свободна, и это определяется её масштабом Λ_{CP} (положением инфракрасного полюса константы связи). При малых μ $\Lambda_{CP} = \Lambda_{\mathcal{N}=2}$,

где $\Lambda_{\mathcal{N}=2}$ — масштаб четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД, см. например обзор [11]. В данной Главе показано, что в пределе больших μ величина Λ_{CP} экспоненциально мала. Мы также выводим потенциал в двумерной модели на мировой поверхности, индуцированный разностями масс кварков.

После этого мы приступаем к изучению фермионного сектора теории на мировой поверхности. При μ -деформации все фермионные суперориентационные моды становятся массивными. Поэтому мы остаёмся с чисто бозонной $CP(N-1)$ моделью на мировой поверхности струны в пределе, когда четырёхмерная теория становится $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Из-за этого теория на мировой поверхности находится в кулоновской фазе (фазе конфайнмента), по крайней мере при больших N [26].

Мы также рассматриваем вопрос о том, что происходит с невылетающими монополями 'т Хоофта–Полякова, присутствовавшими в $\mathcal{N} = 2$ пределе, когда мы переходим к большим μ . Изучая потенциал в теории на мировой поверхности, мы показываем, что невылетающие монополя, которые видны в на мировой поверхности как кинки [7, 8], становятся нестабильными при больших μ , если кварки имеют разные массы. Однако, если массы кварков равны друг другу, то невылетающие монополи выживают в пределе $\mathcal{N} = 1$ КХД.

2.2 μ -деформированная $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная КХД

В данном Разделе мы кратко рассматриваем интересующую нас четырёхмерную теория (детали можно найти в обзоре [11]). Нашей четырёхмерной теорией является μ -деформированная $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная КХД с калибровочной группой $U(N) = SU(N) \times U(1)$. Состав полей данной теории следующий. $\mathcal{N} = 2$ векторный мультиплет состоит из $U(1)$ калибровочного поля A_μ и $SU(N)$ калибровочного поля A_μ^a , комплексных скалярных полей $a^{U(1)}$ и a^a в присоединённом представлении, и их фермионных суперпартнёров $(\lambda_\alpha^1, \lambda_\alpha^2)$ и $(\lambda_\alpha^{1a}, \lambda_\alpha^{2a})$. Индекс присоединённого представления a пробегает значения от 1 до $N^2 - 1$, а спинорный индекс $\alpha = 1, 2$. Присоединённые скаляры и фермионы λ^2 могут быть скомбинированы в $\mathcal{N} = 1$ присоединённые киральные мультиплеты $\mathcal{A}^{U(1)}$ и $\mathcal{A}^{SU(N)} = \mathcal{A}^a T^a$, где T^a — генераторы группы $SU(N)$, нормированные как $\text{Tr}(T^a T^b) = (1/2) \delta^{ab}$.

Сектор материи состоит из $N_f = N$ ароматов гипермультиплетов кварков в фундаментальном представлении, и скалярных компонент (скварков) q^{kA} и \tilde{q}_{Ak} , в фермионы представлены как ψ^{kA} и $\tilde{\psi}_{Ak}$. Здесь $A = 1, \dots, N$ — индекс аромата, а $k = 1, \dots, N$ — цветной индекс.

Суперпотенциал $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД даётся выражением

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=2} = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{q}_A \mathcal{A}^{U(1)} q^A + \tilde{q}_A \mathcal{A}^a T^a q^A \right\} + m_A \tilde{q}_A q^A, \quad (2.2.1)$$

где одно и то же обозначение используется как для мультиплетов кварков q^A и \tilde{q}_A , так и для их скалярных компонент, а m_A — кварковые массы.

μ -деформация представляет собой массовое слагаемое для присоединённой материи,

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\mu_1}{2} \left(\mathcal{A}^{U(1)} \right)^2 + \frac{\mu_2}{2} (\mathcal{A}^a)^2, \quad (2.2.2)$$

которое нарушает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию до $\mathcal{N} = 1$.

В специальном случае, когда

$$\mu \equiv \mu_2 = \mu_1 \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad (2.2.3)$$

суперпотенциал (2.2.2) превращается в односледовый оператор

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \mu \text{Tr}(\Phi^2) \quad (2.2.4)$$

где матрица присоединённых скаляров определена как

$$\Phi = \frac{1}{2} a^{U(1)} + T^a a^a. \quad (2.2.5)$$

Мы будем рассматривать четырёхмерную СКХД в пределе больших μ_1 и μ_2 , когда присоединённая материя отщепляется, и теория превращается в $\mathcal{N} = 1$ КХД. Исключая присоединённые поля из суммы суперпотенциалов (2.2.1) и (2.2.2), получим кварковый суперпотенциал нашей μ -деформированной четырёхмерной теории:

$$\mathcal{W}(q, \tilde{q}) = -\frac{1}{2\mu_2} \left[(\tilde{q}_A q^B)(\tilde{q}_B q^A) - \frac{\alpha}{N} (\tilde{q}_A q^A)^2 \right] + m_A (\tilde{q}_A q^A), \quad (2.2.6)$$

где

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (2.2.7)$$

В случае односледовой деформации (2.2.3) $\alpha = 0$.

Запишем бозонное действие этой теории:¹

$$S_{\text{bos}} = \int d^4x \left(\frac{1}{2g_2^2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{\text{SU}(N)} \right)^2 + \frac{1}{4g_1^2} \left(F_{\mu\nu}^{\text{U}(1)} \right)^2 + \left| \nabla_\mu q^A \right|^2 + \left| \nabla_\mu \bar{q}^A \right|^2 + V(q^A, \bar{q}_A) \right). \quad (2.2.8)$$

Здесь ∇_μ — ковариантная производная

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{\text{U}(1)} - i A_\mu^a T^a, \quad (2.2.9)$$

а скалярный потенциал $V(q^A, \bar{q}_A)$ есть сумма потенциалов от D и F -членов,

$$V(q^A, \bar{q}_A) = V_D(q^A, \bar{q}_A) + V_F(q^A, \bar{q}_A). \quad (2.2.10)$$

Потенциал D -члена дается формулой

$$V_D = \frac{g_2^2}{2} (\bar{q}_A T^a q^A - \bar{q}_A T^a \bar{q}^A)^2 + \frac{g_1^2}{8} (|q^A|^2 - |\bar{q}^A|^2)^2, \quad (2.2.11)$$

а потенциал F -слагаемого определяется суперпотенциалом (2.2.6). Он равен

$$V_F = \frac{1}{|\mu_2|^2} \left\{ (\bar{q}_A q^B) \left[(\bar{q}_C \bar{q}^A) - \frac{\bar{\alpha}}{N} \delta_C^A (\bar{q}_F \bar{q}^F) - \bar{\mu}_2 \bar{m}_A \delta_C^A \right] \right. \\ \times \left[(\tilde{q}_B q^C) - \frac{\alpha}{N} \delta_B^C (\tilde{q}_F q^F) - \mu_2 m_B \delta_B^C \right] \\ + (\tilde{q}_A \bar{q}^B) \left[(\bar{q}_B \bar{q}^C) - \frac{\bar{\alpha}}{N} \delta_B^C (\bar{q}_F \bar{q}^F) - \bar{\mu}_2 \bar{m}_B \delta_B^C \right] \\ \left. \times \left[(\tilde{q}_C q^A) - \frac{\alpha}{N} \delta_C^A (\tilde{q}_F q^F) - \mu_2 m_A \delta_C^A \right] \right\}. \quad (2.2.12)$$

В данной работе мы рассматриваем вакуум (ноль потенциала (2.2.10)), в котором максимальное число кварков развивают ненулевые вакуумные средние, а именно N штук (так называемый $r = N$ вакуум, где r — число выпавших в

¹Отсюда и далее в настоящей Главе используется евклидова формулировка, то есть $F_{\mu\nu}^2 = 2F_{0i}^2 + F_{ij}^2$, $(\partial_\mu a)^2 = (\partial_0 a)^2 + (\partial_i a)^2$, и так далее. Кроме того, сигма-матрицы определяются как $\sigma^{\alpha\dot{\alpha}} = (1, -i\vec{\tau})$, $\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha} = (1, i\vec{\tau})$. Опускание и поднятие спинорных значков осуществляется при помощи антисимметричного тензора $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1$, $\varepsilon^{12} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1$. Такие же соглашения о опускании и поднятии значков относятся к флейворным $\text{SU}(N)$ значкам f, g и пр.

конденсат кварков в слабой связи, см. обзор [13]). При этом, вакуумные средние скварков равны

$$\langle q^{kA} \rangle = \langle \bar{q}^{kA} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\xi_1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \sqrt{\xi_N} \end{pmatrix}, \quad (2.2.13)$$

где поля скварков записаны в виде матрицы размера $N \times N$ по цветным и флейворным значкам, а параметры ξ_A определяются как

$$\xi_A = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 (m_A - \hat{m}) \right), \quad (2.2.14)$$

причём

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N m_A. \quad (2.2.15)$$

В случае односледовой деформации (2.2.3) выражения для параметров ξ_A упрощаются:

$$\xi_A = 2 \mu_2 m_A \quad (2.2.16)$$

В данной Главе мы главным образом рассматриваем неабелев предел, когда массы всех кварков одинаковы,

$$m_1 = m_2 = \dots = m_N \equiv m, \quad (2.2.17)$$

так что параметры ξ_A вырождаются, $\xi_A \equiv \xi$, и вакуумные средние скварков становятся

$$\langle q^{kA} \rangle = \langle \bar{q}^{kA} \rangle = \sqrt{\frac{\xi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

Отметим, что при устремлении $\mu \rightarrow \infty$ (при фиксированных массах кварков) параметры $\xi \sim \mu t$ также уходят на бесконечность, и наш кварковый вакуум превращается в убегающий вакуум² (все r вакуумов при ненулевых r превращаются в убегающие вакуумы). В этом случае $\mathcal{N} = 1$ СКХД становится теорией, в которой есть только N вакуумов, происходящих из N монопольных вакуумов ($r = 0$ вакуумов) $\mathcal{N} = 2$ СКХД.

²Англ. run-away vacuum.

Здесь же мы определяем $\mathcal{N} = 1$ иным образом. Переходя к пределу больших μ , мы делаем массы кварков маленькими, так что произведение μt (и вакуумные средние кварков) остаются фиксированными,

$$\mu \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow 0, \quad \mu t = \text{фиксировано.} \quad (2.2.19)$$

Таким образом мы контролируем все r вакуумов, имеющих в $\mathcal{N} = 2$ СКХД. В этой Главе делаем упор на неабелевы струны в $r = N$ кварковом вакууме (2.2.18), предполагая предел больших μ , когда четырёхмерная теория переходит в обобщённую $\mathcal{N} = 1$ СКХД, определённую выше.

Для того, чтобы удержать нашу четырёхмерную теорию в режиме слабой связи, мы предполагаем, что вакуумные средние кварков достаточно большие по сравнению с масштабом $\Lambda_{\mathcal{N}=1}$ $SU(N)$ сектора $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Выражаясь точнее, мы предполагаем, что

$$\sqrt{\mu t} \gg \Lambda_{\mathcal{N}=1}. \quad (2.2.20)$$

Вакуумные средние кварков (2.2.18) приводят к спонтанному нарушению как калибровочной, так и флейворной $SU(N)$ -симметрий. Однако, остаётся глобальная диагональная группа $SU(N)$,

$$U(N)_{\text{gauge}} \times SU(N)_{\text{flavor}} \rightarrow SU(N)_{C+F}, \quad (2.2.21)$$

сравн. (1.1.3). Таким образом, в данном вакууме происходит блокировка цвета с ароматом. Это приводит к возникновению неабелевых струн, см. обзор [11].

Кратко опишем пертурбативный спектр четырёхмерной теории в пределе больших μ (некоторые подробности могут быть найдены в обзоре [11]). Для простоты рассмотрим случай, когда массы кварков одинаковы. Калибровочная группа $U(N)$ полностью нарушена механизмом Хиггса, и массы калибровочных бозонов равны

$$m_G^{SU(N)} = g_2 |\sqrt{\xi}| \quad (2.2.22)$$

для калибровочных бозонов $SU(N)$, и

$$m_G^{U(1)} = g_1 \sqrt{\frac{N}{2}} |\sqrt{\xi}| \quad (2.2.23)$$

для полей $U(1)$. Ниже мы также будем предполагать, что массы калибровочных бозонов одного порядка,

$$m_G^{U(1)} \sim m_G^{SU(N)} \equiv m_G \quad (2.2.24)$$

Матрица масс кварков может быть найдена из потенциалов (2.2.11) и (2.2.12). Оказывается, что из $4N^2$ вещественных степеней свободы скварков q^{kA} и \bar{q}^{kA} , N^2 фаз «съедены» механизмом Хиггса, $(N^2 - 1)$ вещественных скварков обладают массой (2.2.22), а один вещественный скварк имеет массу (2.2.23). Эти скварки являются скалярными суперпартнёрами, соответственно, калибровочных бозонов $SU(N)$ и $U(1)$ в массивных векторных $\mathcal{N} = 1$ супермультиплеттах.

Остальные $2N^2$ скварков становятся гораздо легче в пределе больших μ . Массы $2(N^2 - 1)$ из них, формирующих присоединённое представление глобальной группы $SU_{C+F}(N)$ (2.2.21), даются формулой

$$m_L^{SU(N)} = \left| \frac{\xi}{\mu_2} \right|, \quad (2.2.25)$$

а два вещественных синглета по $SU_{C+F}(N)$ имеют массу

$$m_L^{U(1)} = \sqrt{\frac{N}{2}} \left| \frac{\xi}{\mu_1} \right|, \quad (2.2.26)$$

Если μ_2 и μ_1 одного порядка (точнее, мы предполагаем ниже, что $\alpha = \text{const}$, см. (2.2.7)), то

$$m_L^{U(1)} \sim m_L^{SU(N)} \equiv m_L \sim m \ll m_G. \quad (2.2.27)$$

Эта иерархия масс окажется существенной для дальнейшего рассмотрения.

В частности, в пределе (2.2.19) $m_L \rightarrow 0$, и $2N^2$ скварков становятся безмассовыми. Это отражает наличие Хиггсовской ветки, которая развивается в этом пределе. Наличие безмассовых скалярных полей, развивающих ненулевые вакуумные средние, делает решение в виде струны плохо определённым [46, 47], см. также следующий раздел. Ниже мы используем μ -деформированную $\mathcal{N} = 2$ СКХД при больших μ как инфракрасную (ИК) регуляризацию $\mathcal{N} = 1$ СКХД. При больших, но конечных μ Хиггсовская ветка, характерная для $\mathcal{N} = 1$ СКХД, поднята, и ИК расходимости оказываются регуляризованными, см. также [48].

2.3 Неабелевы струны

В данной главе выводится решение для неабелева вихря в предположении одинаковых масс кварков (2.2.17). Сперва мы выпишем анзац общего вида для неабелевых струн и выпишем уравнения на профильные функции струны. Затем мы решим эти уравнения в предположении иерархии масс (2.2.27) в пределе больших μ .

2.3.1 Уравнения движения

Рассмотрим статичную струну, растянутую вдоль оси x_3 , так что соответствующие профильные функции зависят только от координат в плоскости (x_1, x_2) . Следуя методу, разработанному для $\mathcal{N} = 2$ СКХД (см. обзор [11]), предположим сперва, что нетривиальные профильные функции появляются только у тех полей скварков, которые имеют ненулевые вакуумные средние. Поэтому мы положим

$$q^{kA} = \bar{q}^{kA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi^{kA}. \quad (2.3.1)$$

и будем искать решение в виде струны при помощи следующей подстановки [6, 7, 11]:

$$\begin{aligned} \varphi &= \phi_2 + n\bar{n}(\phi_1 - \phi_2) \\ &= \frac{1}{N}(\phi_1 + (N-1)\phi_2) + (\phi_1 - \phi_2) \left(n\bar{n} - 1/N \right), \\ A_i^{\text{SU}(N)} &= \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f_W(r) \left(n\bar{n} - 1/N \right), \\ A_i^{\text{U}(1)} &= \frac{2}{N} \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f(r), \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где индекс i пробегает значения 1, 2. Профильные функции $\phi_1(r)$ и $\phi_2(r)$ определяют профили скварковых полей в плоскости, ортогональной к покоящейся струне, тогда как $f(r)$ и $f_W(r)$ играют роль профилей калибровочных полей. Профильные функции зависят от расстояния r от данной точки x^i до центра струны x_0^i в плоскости (x_1, x_2) .

Здесь также был введён комплексный вектор n^l , $l = 1, \dots, N$, подчиняющийся условию

$$\bar{n}_l \cdot n^l = 1. \quad (2.3.3)$$

Вектор n^l параметризует ориентационные моды неабелевого вихря. Он возникает из-за возможности вращения конкретного струнного решения по отношению к ненарушенной глобальной цвет-ароматной группе $SU(N)_{C+F}$, см. (2.2.21).

Граничные условия для калибровочных и скалярных профильных функций следующие:

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 0, & \phi_2(0) &\neq 0, & \phi_1(\infty) &= \sqrt{\xi}, & \phi_2(\infty) &= \sqrt{\xi}, & (2.3.4) \\ f_W(0) &= 1, & f(0) &= 1, & f_W(\infty) &= 0, & f(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя наш анзац (2.3.2) в действие (2.2.8), получим функционал энергии (натяжение струны):

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int r dr \left(\frac{2}{g_1^2 N^2} \frac{f'^2}{r^2} + \frac{N-1}{N} \frac{1}{g_2^2} \frac{f_W'^2}{r^2} + \phi_1'^2 + (N-1)\phi_2'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N^2} \frac{[f + (N-1)f_W]^2}{r^2} \phi_1^2 + \frac{N-1}{N^2} \frac{[f - f_W]^2}{r^2} \phi_2^2 + V(\phi_1, \phi_2), \right) \quad (2.3.5) \end{aligned}$$

где потенциал $V(\phi_1, \phi_2)$ есть

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{4|\mu_2|^2} \left(\phi_1^2 \left[\phi_1^2 + \frac{\alpha}{N} (\phi_1^2 + (N-1)\phi_2^2) - 2\mu_2 m \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + (N-1)\phi_2^2 \left[\phi_2^2 + \frac{\alpha}{N} (\phi_1^2 + (N-1)\phi_2^2) - 2\mu_2 m \right]^2 \right) \quad (2.3.6) \end{aligned}$$

и предполагается, что величина $\mu_2 m$ вещественна³.

Из функционала натяжения струны (2.3.5) получаются уравнения для профильных функций:

$$\begin{aligned} f'' - \frac{f'}{r} - \frac{g_1^2}{2} (f + (N-1)f_W)\phi_1^2 - (N-1)\frac{g_1^2}{2} (f - f_W)\phi_2^2 &= 0 \quad (2.3.7) \\ f_W'' - \frac{f_W'}{r} - \frac{g_2^2}{N} (f + (N-1)f_W)\phi_1^2 + \frac{g_2^2}{N} (f - f_W)\phi_2^2 &= 0 \\ \phi_1'' + \frac{\phi_1'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f + (N-1)f_W)^2}{r^2} \phi_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= 0 \\ \phi_2'' + \frac{\phi_2'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f - f_W)^2}{r^2} \phi_2 - \frac{1}{2(N-1)} \frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= 0 \end{aligned}$$

³Если же она является комплексной величиной, то соотношение (2.3.1) следует изменить, включив в него фазу $\mu_2 m$.

Эти уравнения — второго, а не первого порядка. Это происходит из-за того, что струна более не является BPS-насыщенной. Отметим, что в случае BPS струны, массы скаляров, образующих струну, равны массам калибровочных бозонов (2.2.22) и (2.2.23), см. [11]. Это не так в случае нашей μ -деформированной теории. Массы скаляров в синглетном и присоединённом представлении в матрице φ^{kA} в (2.3.1) даются формулами (2.2.25) и (2.2.26), и в пределе больших μ они гораздо меньше, чем массы калибровочных бозонов. В частности, как уже было упомянуто, в пределе (2.2.19) $m_L \rightarrow 0$, и в нашей μ -деформированной теории появляется хиггсовская ветка.

2.3.2 Профильные функции струны

Частым явлением в суперсимметричных калибровочных теориях является наличие хиггсовских веток. Это — плоские направления потенциала скаляров, на которых заряженные скалярные поля могут развивать вакуумные средние, нарушая калибровочную симметрию. Во многих случаях вследствие такого нарушения появляются топологические причины устойчивости вихрей-струн. Динамика формирования вихрей в теориях с хиггсовскими ветками уже была затронута в работах [46, 47, 48]. Заранее вовсе не известно, существуют или нет в таких теориях стабильные решения в виде струн. Дело в том, что теория с хиггсовской веткой представляет собой предельный случай сверхпроводника первого рода с исчезающей массой частицы Хиггса. В частности, в [46] было показано, что бесконечно длинные струны не могут образовываться в этом случае из-за инфракрасных расходимостей.

Позднее этот вопрос изучался в работах [47, 48]. Было показано, что вихри на хиггсовских ветках становятся логарифмически «толстыми» благодаря наличию безмассовых скалярных полей в четырёхмерии. Тем не менее, они являются хорошо определёнными, если регуляризовать ИК расходимости. Один из способов регуляризации — рассмотрение струны конечной длины L [47]. Такая постановка задачи типична при рассмотрении конфайнмента. В работе [47] было показано, что потенциал между тяжёлыми пробными зарядами становится нелинейным,

$$V(L) \sim \frac{L}{\log L}, \quad (2.3.8)$$

в теориях с хиггсовскими ветками.

Другой способ ИК-регуляризации — поднять хиггсовскую ветку, так что у скалярных полей, образующих струну, появляются маленькие, но всё же ненулевые массы m_L , сравн. [48]. Здесь мы используем именно этот подход, см. формулы (2.2.25) и (2.2.26), в предположении, что параметр μ большой, но конечный.

В главном порядке по $\log m_G/m_L$ решение для вихря имеет следующую структуру в плоскости (x_1, x_2) [47]. калибровочные поля локализованы в центральной части радиуса R_g и практически равны нулю вне этой области⁴. Напротив, скалярные профили почти постоянны в центральной части. В частности, профильная функция ϕ_1 , ассоциированная с намоткой вихря, почти равна нулю в центральной части (см. (2.3.4)),

$$\begin{aligned}\phi_1 &\approx 0 \\ \phi_2 &\approx (1 - c)\sqrt{\xi},\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

где c — некоторая постоянная, которая будет определена ниже.

При этом могут быть найдены решения первых двух уравнений для калибровочных профильных функций в (2.3.7):

$$f = f_W \approx 1 - \frac{r^2}{R_g^2}\tag{2.3.10}$$

в центральной области вихря.

Вне центральной части в логарифмически широком интервале

$$1/m_G \lesssim r \lesssim 1/m_L\tag{2.3.11}$$

калибровочные профили практически зануляются, и последние два уравнения в (2.3.7) сводятся в уравнениям для свободных безмассовых полей. Их решения

⁴Величина R_g будет определена ниже.

имеют логарифмическую форму

$$\begin{aligned}\phi_1 &\approx \sqrt{\xi} \left(1 - \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{m_L R_g}} \right), \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi} \left(1 - c \cdot \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{m_L R_g}} \right),\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

где нормировка фиксирована шивкой с центральной областью (2.3.9) и с граничными условиями на бесконечности (2.3.4).

В области очень больших r , $r \gg 1/m_L$, скалярные поля экспоненциально подходят к их вакуумным средним ($\sim \exp\{-m_L r\}$), см. (2.3.4)). Эта область вносит пренебрежимо малый вклад в натяжение струны, и конкретная форма скалярного потенциала (2.3.6) не важна.

При подстановке найденного решения в функционал энергии (2.3.5) получается

$$T \approx \frac{\text{const}}{R_g^2} \left(\frac{2}{g_1^2 N^2} + \frac{N-1}{g_2^2 N} \right) + \frac{2\pi|\xi|}{\ln \frac{1}{R_g m_L}} [1 + (N-1)c^2],\tag{2.3.13}$$

где первое слагаемое происходит от калибровочных полей в центральной части, а второе — от кинетического слагаемого скаляров в логарифмической области (2.3.11).

Минимизация этого выражения по отношению к постоянной c даёт

$$c = 0,\tag{2.3.14}$$

так что профильная функция ϕ_2 не зависит от r и тождественно равна своему вакуумному среднему $\sqrt{\xi}$.

Минимизируя (2.3.13) по отношению к R_g находим:

$$R_g \sim \frac{\text{const}}{m_G} \ln \frac{m_G}{m_L}.\tag{2.3.15}$$

Решения для профильных функций струны в промежуточной области

(2.3.11) получаются

$$\begin{aligned}\phi_1 &\approx \sqrt{\xi} \left(1 - \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{m_G}{m_L}} \right), \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi}, \\ f &\approx f_W \approx 0,\end{aligned}\tag{2.3.16}$$

и окончательная формула для натяжения неабелевой струны:

$$T = \frac{2\pi|\xi|}{\ln \frac{m_G}{m_L}} + \dots,\tag{2.3.17}$$

где поправки подавлены степенями большого логарифма $\log m_G/m_L$. Главный член происходит из кинетической энергии кварков $((\phi'_1)^2)$, проинтегрированной по промежуточной области (2.3.11), см. (2.3.5). Отметим, что логарифмическое подавление натяжения струны присуще не только неабелевым струнам. Похожее выражение было найдено для струны АНО на Хиггсовской ветке в [47, 48].

2.3.3 Неравные массы кварков

В данном Разделе мы ослабим условие (2.2.17) и рассмотрим решение для струны в предположении, что разности масс кварков малы,

$$\Delta m_{AB} = m_A - m_B \ll \hat{m},\tag{2.3.18}$$

где \hat{m} — средняя масса кварка, (2.2.15).

Неравные массы кварков нарушают цвет-ароматную симметрию (2.2.21) до $U(1)^N$, так что ориентационные моды неабелевой струны перестают быть нулевыми модами. Они становятся квази нулевыми модами в приближении малых разностей масс кварков (2.3.18), сравн. [11]. В самом деле, в Разделе 2.4.2 будет выведен потенциал в теории на мировой поверхности, имеющий N точек экстремума, соответствующих Z_N струнам.

Теперь следует обобщить анзац для струнного решения (2.3.2) следующим образом. Во-первых, положим ориентационный вектор

$$n^l = \delta^{lA_0}, \quad A_0 = 1, \dots, N\tag{2.3.19}$$

выделяющий Z_N -струну с номером A_0 (струну, связанную с намоткой A_0 -го аромата скварков, см. [11]).

Можно ожидать, что, также как и в случае равных масс кварков, главный вклад в натяжение струны вносит логарифмически широкая область (2.3.11), тогда как центральная часть струны не даёт вклада в главном порядке. Тогда, с учётом (2.3.18), можно пренебречь разностями масс различных калибровочных бозонов, положив

$$m_G \approx g_2 \sqrt{|\widehat{\xi}|}, \quad (2.3.20)$$

где

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N \xi_A. \quad (2.3.21)$$

В этом приближении можно использовать тот же самый анзац для калибровочных полей, что и в случае одинаковых масс кварков, см. последние два уравнения в (2.3.2) с n^l из (2.3.19). Калибровочные поля всё так же параметризуются только двумя профильными функциями $f(r)$ и f_W , которые отличны от нуля в центральной области струны, определяемой величиной m_G (2.3.20).

Анзац для полей скварков в (2.3.2) обобщается следующим образом:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi_1(r) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_2(r) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_{A_0}(r) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \phi_N(r) \end{pmatrix}, \quad (2.3.22)$$

где введены профильные функции ϕ_1, \dots, ϕ_N для ароматов без намоток $A \neq A_0$, а функция ϕ_{A_0} соответствует A_0 -му аромату с намоткой.

Граничные условия для профильных функций калибровочных полей такие же, как и в (2.3.4), а для кварков нужно потребовать

$$\phi_{A_0}(0) = 0 \quad (2.3.23)$$

$$\phi_A(\infty) = \sqrt{\xi_A}, \quad A = 1, \dots, N, \quad (2.3.24)$$

где ξ_A определены в (2.2.14).

Теперь уравнения для профильных функций выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
f'' - \frac{f'}{r} - \frac{g_1^2}{2}(f + (N-1)f_W)\phi_{A_0}^2 - \frac{g_1^2}{2}(f - f_W) \sum_{A \neq A_0} \phi_A^2 &= 0 \\
f_W'' - \frac{f_W'}{r} - \frac{g_2^2}{N}(f + (N-1)f_W)\phi_{A_0}^2 &+ \frac{g_2^2}{N(N-1)}(f - f_W) \sum_{A \neq A_0} \phi_A^2 = 0 \quad (2.3.25) \\
\phi_{A_0}'' + \frac{\phi_{A_0}'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f + (N-1)f_W)^2}{r^2} \phi_{A_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi_{A_0}} &= 0 \\
\text{При } A \neq A_0, \quad \phi_A'' + \frac{\phi_A'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f - f_W)^2}{r^2} \phi_A - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi_A} &= 0.
\end{aligned}$$

Решая эти уравнения так же, как и в предыдущем подразделе, получим:

$$\phi_A \approx \sqrt{\xi_A}, \quad A \neq A_0. \quad (2.3.26)$$

Кроме того, калибровочные профильные функции определяются формулой (2.3.10) в центральной области, а снаружи они зануляются. Размер этой центральной области всё так же определяется формулой (2.3.15).

Как и в случае равных масс кварков, профильная функция ϕ_1 практически равна нулю в центральной части, а в области (2.3.11) (промежуточные r) она даётся формулой

$$\phi_{A_0} \approx \sqrt{\xi_{A_0}} \left(1 - \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{m_G}{m_L}} \right). \quad (2.3.27)$$

Натяжения Z_N струн теперь находятся по следующей формуле:

$$T_{A_0} = \frac{2\pi|\xi_{A_0}|}{\ln \frac{m_G}{m_L}} + \dots, \quad A_0 = 1, \dots, N. \quad (2.3.28)$$

Видно, что теперь натяжения N Z_N струн расщепляются.

2.4 Эффективная теория на мировой поверхности

У неабелевой струны имеются как трансляционные, так и ориентационный нулевые моды. Если позволить соответствующим модам медленно меняться с

координатами на мировой поверхности $z = x_3$ и t , они превращаются в поля эффективной низкоэнергетической теории на мировой поверхности струны [6, 7], см. также обзор [11]. А именно, мы будем иметь трансляционные модули $x_0^i(t, z)$ (положение струны в плоскости (x_1, x_2) , $i = 1, 2$), а также ориентационные модули $n^l(t, z)$, $l = 1, \dots, N$. Трансляционный сектор представляет собой теорию свободных полей и отщепляется от остальной динамики, поэтому мы сконцентрируемся на ориентационном секторе.

В данном Разделе будет выведена бозонная часть эффективной низкоэнергетической теории на струне.

2.4.1 $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модель на мировой поверхности струны

Во-первых, рассмотрим случай, когда массы кварков одинаковы (2.2.17). Тогда цвет-ароматная симметрия (2.2.21) не нарушена, и ориентационные модули n^l описывают нулевые моды неабелевой струны. А именно, рассмотрим частное Z_N -решение (2.3.2) с $n^l = \delta^{lA_0}$, $A_0 = 1, \dots, N$. Оно нарушает группу $SU(N)_{C+F}$ до $SU(N - 1) \times U(1)$. Поэтому $SU(N)_{C+F}$ -вращение решения для струны Z_N даёт целое семейство решений (неабелевы струны), параметризуемых вектором n^l из пространства модулей

$$\frac{SU(N)_{C+F}}{SU(N - 1) \times U(1)} = \mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1). \quad (2.4.1)$$

Так как в случае одинаковых масс кварков группа $SU(N)_{C+F}$ не нарушена, на модули n^l нет никакого потенциала на мировой поверхности. Для того, чтобы получить кинетический член, мы последуем общей процедуре, разработанной в [6, 7] (см. обзор [11]) для случая $\mathcal{N} = 2$. Нужно подставить решение (2.3.2) в четырёхмерное действие (2.2.8), предполагая n^l медленно меняющейся функций от координат t и z .

Как только модули n^l перестают быть постоянными, компоненты калибровочного поля $A_0^{\text{SU}(N)}$ и $A_3^{\text{SU}(N)}$ также становятся ненулевыми. Мы используем анзац [6, 7, 49]

$$A_k^{\text{SU}(N)} = -i \left[\partial_k n \cdot \bar{n} - n \cdot \partial_k \bar{n} - 2n \cdot \bar{n} (\bar{n} \partial_k n) \right] \rho(r), \quad k = 0, 3, \quad (2.4.2)$$

для этих компонент, где предполагается, что цветные значки свёрнуты внутри

скобок в третьем слагаемом. Здесь также введена новая профильная функция $\rho(r)$, которая будет определена из процедура минимизации.

Подставляя (2.3.2) и (2.4.2) в (2.2.8) получим $\mathbb{CP}(N - 1)$ модель

$$S^{(1+1)} = 2\beta \int dt dz \{ (\partial_k \bar{n} \partial_k n) + (\bar{n} \partial_k n)^2 \}, \quad (2.4.3)$$

с константой связи β , даваемой выражением

$$\beta = \frac{2\pi}{g_2^2} I, \quad (2.4.4)$$

где I — нормировочный интеграл, определяемый профильными функциями струны, проинтегрированными по плоскости (x_1, x_2) ,

$$I = \int_0^\infty r dr \left\{ \left(\frac{d}{dr} \rho(r) \right)^2 + \frac{1}{r^2} f_W^2 (1 - \rho)^2 + g_2^2 \left[\frac{\rho^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (1 - \rho) (\phi_2 - \phi_1)^2 \right] \right\}. \quad (2.4.5)$$

Этот функционал определяет уравнение движения для ρ ,

$$-\frac{d^2}{dr^2} \rho - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \rho - \frac{1}{r^2} f_W^2 (1 - \rho) + \frac{g_2^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) \rho - \frac{g_2^2}{2} (\phi_1 - \phi_2)^2 = 0, \quad (2.4.6)$$

а граничные условия для ρ есть

$$\rho(\infty) = 0, \quad \rho(0) = 1, \quad (2.4.7)$$

подробности см. в [11].

Приведённые формулы справедливы для неабелевой струны как в $\mathcal{N} = 2$ СКХД, так и в μ -деформированной СКХД. В нашем пределе больших μ мы используем профильные функции струны, найденные в Разделе 2.3.2. Чтобы найти решение для ρ , заметим, что в центральной части струны $\rho \approx 1$. В промежуточной области (2.3.11) $f_W \approx 0$. Слагаемые в уравнении (2.4.6), содержащие производные от ρ , пренебрежимо малы по сравнению с другими (это будет проверено ниже), и поэтому можно легко найти приближённое решение:

$$\rho \approx \frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} \approx \frac{\left(\frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{Rgm_L}} \right)^2}{2 - 2 \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{Rgm_L}} + \left(\frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{Rgm_L}} \right)^2}, \quad (2.4.8)$$

где в качестве кварковых профильных функций используются решения (2.3.16).

Легко проверить, что $\rho' \sim m_L \rho$ и $\rho'' \sim m_L^2 \rho$, так что вычёркивание производных в (2.4.6) действительно самосогласованно.

Следующий шаг — подстановка этого решения в (2.4.5) и вычисление I . Как мы увидим, только область $r \lesssim 1/m_L$ вносит ощутимый вклад в этот интеграл. Имеем:

$$I \approx g_2^2 \int r dr \left(\frac{1}{2} \frac{(\phi_1 - \phi_2)^4}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} + \frac{2\phi_1\phi_2(\phi_1 - \phi_2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} \right) = \frac{g_2^2}{2} \int r dr \frac{(\phi_1^2 - \phi_2^2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} \quad (2.4.9)$$

Вычисление даёт

$$I \approx c \frac{m_G^2}{m_L^2} \frac{1}{\ln^2 \frac{m_G^2}{m_L^2}} \sim \frac{g^2 |\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2 |\mu|}{|m|}}, \quad (2.4.10)$$

где были использованы формулы (2.2.22) и (2.2.25), а константа c происходит из неопределённости в верхнем пределе ($\sim 1/m_L$) этого интеграла. Что касается области больших r , $r \gg 1/m_L$, функция ρ спадает там экспоненциально, и вклад от этой области, соответственно, пренебрежимо мал.

Подставляя (2.4.10) в (2.4.4), получим итоговый ответ для константы связи β теории $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ на мировой поверхности (2.4.3),

$$\beta \approx c \frac{2\pi}{g_2^2} \frac{m_G^2}{m_L^2} \frac{1}{\ln^2 \frac{m_G^2}{m_L^2}} \sim \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2 |\mu|}{|m|}}. \quad (2.4.11)$$

Модель $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ (2.4.3) — низкоэнергетическая эффективная теория на мировой поверхности струны. Она описывает динамику безмассовых ориентационных модулей при энергиях, гораздо меньших обратной толщины струны, пропорциональной m_L . При более высоких энергиях необходимо учитывать поправки к (2.4.3) со старшими производными.

Соотношение (2.4.11) было выведено на классическом уровне. В квантовой теории константа связи β является бегущей. Соотношение (2.4.11) определяет константу связи $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модели на масштабе ультрафиолетового (УФ) обрезания теории на мировой поверхности, равному m_G . Модель $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$

асимптотически свободна. Её константа связи на ультрафиолетовом масштабе $m_G \sim \sqrt{\xi}$ в одной петле даётся формулой

$$4\pi\beta(\sqrt{\xi}) = N \ln \frac{\sqrt{\xi}}{\Lambda_{CP}}, \quad (2.4.12)$$

где Λ_{CP} — масштаб $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модели. Это даёт для масштаба Λ_{CP}

$$\Lambda_{CP} \approx \sqrt{\xi} \exp \left\{ -\text{const} \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2|\mu|}{|m|}} \right\}. \quad (2.4.13)$$

Мы видим, что масштаб $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модели Λ_{CP} экспоненциально мал, так что теория на мировой поверхности находится в слабой связи в широком интервале энергий $\gg \Lambda_{CP}$. Это можно противопоставить неабелевой струне в $\mathcal{N} = 2$ СКХД, где масштаб теории на мировой поверхности Λ_{CP} равен масштабу $\Lambda_{\mathcal{N}=2}$ четырёхмерной СКХД [11].

2.4.2 Потенциал на мировой поверхности при больших μ

В данном подразделе мы ослабим условие равных масс кварков (2.2.17) и рассмотрим эффект, производимый разностями масс кварков в лидирующем порядке по Δm_{AB} , см. (2.3.18). Неравные массы кварков нарушают цветароматную симметрию (2.2.21) до $U(1)^N$, так что, как уже было упомянуто выше, ориентационные моды неабелевой струны более не являются нулевыми модами. Они становятся квазинулевыми модами в приближении малых разностей масс кварков (2.3.18). При этом всё ещё можно ввести ориентационные квазимодули n^l , $l = 1, \dots, N$ и рассмотреть неглубокий потенциал в теории $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ (2.4.3), создаваемый разностями масс. Мы пренебрежём влиянием малых разностей масс на кинетическое слагаемое, предполагая, что оно всё ещё даётся формулой (2.4.3).

Наш подход — взять струнное решение (2.3.2) с невозмущёнными профильными функциями, найденными в Разделе 2.3.2, и подставить его в потенциал (2.2.12), учитывая явную зависимость этого потенциала от m_A в главном порядке по Δm_{AB} . После трудоёмкого вычисления получается потенциал теории на мировой поверхности,

$$\delta V_{1+1} = \chi \sum_{A=1}^N \frac{\text{Re} \left[(\xi_A - \hat{\xi}) \hat{\xi} \right]}{|\hat{\xi}|} |n^A|^2, \quad (2.4.14)$$

где δV_{1+1} — искомый потенциал (с точностью до константы), ξ_P всё ещё определяются формулой (2.2.14), а множитель χ определяется профильными функциями струны, проинтегрированными по плоскости (x_1, x_2) ,

$$\chi = \frac{\pi}{|\mu_2|^2} \int_0^\infty r dr (\phi_2^2 - \phi_1^2) \left[\phi_1^2 - \frac{\alpha}{N} (\phi_1^2 - \phi_2^2) \right]. \quad (2.4.15)$$

Теперь используем решения для ϕ_1 и ϕ_2 (см. Раздел 2.3.2) и проинтегрируем здесь по области $r \lesssim 1/m_L$. Предположим также, что μ_1 и μ_2 масштабируются так, что параметр α в (2.2.7) остаётся постоянным. Точнее, предположим, что

$$\mu \equiv \mu_2 = \text{const} \cdot \mu_1 \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad (2.4.16)$$

Тогда, получим для χ

$$\chi \approx \text{const} \cdot \frac{2\pi}{\ln \frac{m_G}{m_L}}. \quad (2.4.17)$$

Более того, область интегрирования $r \gg 1/m_L$ в (2.4.15) не вносит вклада в главном порядке. Неизвестная постоянная выше возникает из-за неопределённости в верхнем пределе интегрирования по r , $r \sim 1/m_L$.

Подставляя это в (2.4.14), получим

$$\delta V_{1+1} \approx \text{const} \cdot 2\pi \sum_{A=1}^N \frac{\text{Re} \left[(\xi_A - \hat{\xi}) \hat{\xi} \right]}{|\hat{\xi}| \ln \frac{m_G}{m_L}} |n^A|^2. \quad (2.4.18)$$

Теперь, определим неизвестную постоянную в формуле выше, сравнив её в выражении (2.3.28) для натяжения Z_N струн. Z_N струны являются экстремумами потенциала на мировой поверхности V_{1+1} , так что значение потенциала V_{1+1} в точке экстремума $n^l = \delta^{lA_0}$, соответствующей A_0 -ой Z_N струне, должно быть равно натяжению (2.3.28). Отсюда получается $\text{const} = 1$ в (2.4.18), и окончательная формула для потенциала в теории на мировой поверхности $\mathbb{C}P(N-1)$ получается следующей:⁵

$$V_{1+1} \approx \frac{4\pi}{\ln \frac{m_G}{m_L}} \left| \sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 \left(\sum_{A=1}^N m_A |n^A|^2 - \hat{m} \right) \right|. \quad (2.4.19)$$

⁵Хотя формула (2.4.19) кажется логичной, она не может быть правильной при произвольных Δm_{AB} . Это можно увидеть уже из рассмотрения $U(N=2)$ модели с массами $m_1 = -m_2$. Разрешение этой проблемы до сих пор неизвестно, но стоит отметить, что при больших Δm_{AB} введение модулей n^A менее мотивировано.

Этот потенциал, проинтегрированный по координатам на мировой поверхности t и z , должен быть добавлен к кинетическому члену в (2.4.3). Заметим, что этот потенциал — обобщение нашего результата (2.4.18), так как он включает все порядки разложения по степеням $(m_A - \hat{m})/\hat{m}$. Для односледовой μ -деформации (2.2.3) потенциал на мировой поверхности принимает особенно простой вид

$$V_{1+1} \approx \frac{4\pi}{\ln \frac{m_G}{m_L}} |\mu_2| \left| \sum_{A=1}^N m_A |n^A|^2 \right|. \quad (2.4.20)$$

У потенциала (2.4.19) есть только один минимум и один максимум (в случае общего положения по Δm_{AB}). Другие $(N - 2)$ точки экстремумов являются седловыми точками. Все эти точки экстремумов расположены в

$$n^A = \delta^{AA_0}, \quad A_0 = 1, \dots, N, \quad (2.4.21)$$

и соответствуют Z_N струнам. Значение потенциала в конкретной точке экстремума совпадает с натяжением A_0 -ой Z_N струны,

$$V_{1+1}(n^A = \delta^{AA_0}) = T_{A_0}, \quad A_0 = 1, \dots, N. \quad (2.4.22)$$

Абсолютный минимум (единственный вакуум) потенциала (2.4.19) соответствует Z_N струне, связанной в намоткой скварка наименьшей массы.

Заметим, что наш вывод формулы (2.4.18) воспроизвёл логарифмическое подавление, типичное для струн в предельных сверхпроводниках первого рода (с маленькой массой частицы Хиггса m_L), см. (2.3.28) и [47].

Потенциал (2.4.19) похож на потенциал в теории на мировой поверхности неабелевой струны, выведенный в [50] в случае μ -деформированной $\mathcal{N} = 2$ СКХД в пределе малых μ . В этом случае теория на мировой поверхности является гетеротической $\mathbb{CP}(N - 1)$ моделью с $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперсимметрией. При малых μ потенциал на мировой поверхности, полученный в [50], может быть написан в виде

$$V_{1+1}^{\mu \rightarrow 0} = 4\pi \left| \sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 \left(\sum_{A=1}^N m_A |n^A|^2 - \hat{m} \right) \right|. \quad (2.4.23)$$

Он отличается от (2.4.19) отсутствием логарифмического подавления. У этого обстоятельства есть естественное объяснение. При малых μ , так же как и

в нашем случае, седловые точки потенциала на мировой поверхности соответствуют Z_N струнам, и соотношение (2.4.22) остаётся справедливым. С другой стороны, в пределе малых μ Z_N струны BPS насыщены, и их натяжения есть $T_{A_0}^{\mu \rightarrow 0} = 2\pi|\xi_{A_0}|$, см. [50]. Это объясняет отсутствие логарифмического подавления в потенциале (2.4.23).

2.4.3 Массовый спектр на струне

Предположим, что m_1 — наименьшая из масс кварков. Тогда вакуум потенциала на мировой поверхности (2.4.19) располагается в

$$n^A = \delta^{A1} \quad (2.4.24)$$

и минимальное значение потенциала есть $V_{1+1}^{\min} = T_{A=1}$. Вычислим спектр масс пертурбативных состояний теории на мировой поверхности в этом вакууме. Раскладывая

$$|n^1|^2 = 1 - \sum_{A \neq 1} |n^A|^2 \quad (2.4.25)$$

и извлекая квадратичные по флуктуациям n^A слагаемые из потенциала (2.4.19), получим массы возбуждений на мировой поверхности n^A , $A \neq 1$

$$m_{A \neq 1}^2 = \frac{\pi}{\beta \ln \frac{m_G}{m_L}} \frac{\text{Re} [(\xi_A - \xi_1)\bar{\xi}_1]}{|\xi_1|}. \quad (2.4.26)$$

Отметим множитель $1/(2\beta)$, который появляется из-за кинетического слагаемого в (2.4.3). Подставляя константу связи β и (2.4.11), мы видим, что массы пертурбативных состояний ведут себя как

$$m_{A \neq 1}^2 \sim m(m_A - m_1) \ln \frac{m_G}{m_L}. \quad (2.4.27)$$

Константа связи $\mathbb{CP}(N-1)$ модели растёт при низких энергиях и «замораживается» на масштабе масс, вычисленных выше. Если эти массы гораздо больше чем Λ_{CP} (2.4.13), то теория на мировой поверхности находится в режиме слабой связи. Так как масштаб Λ_{CP} экспоненциально мал, мы видим, что теория на мировой поверхности находится в слабой связи даже при весьма маленьких разностях масс Δm_{AB} . Однако, в пределе равных масс (2.2.17), когда $\Delta m_{AB} = 0$, теория на мировой поверхности $\mathbb{CP}(N-1)$ оказывается в режиме сильной связи.

Наш результат (2.4.19) для потенциала на мировой поверхности неабелевой струны в μ -деформированной теории можно сравнить с потенциалом на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 2$ СКХД с ФИ D -членом, вызванным разностями масс кварков, см. обзор [11]. В случае $\mathcal{N} = 2$ все Z_N струны вырождены, с натяжениями, определяемыми параметром ФИ. У потенциала на мировой поверхности в этом случае есть N минимумов, расположенных в (2.4.21), разделённых невысокими барьерами, квадратичными по Δm_{AB} . Теория на мировой поверхности $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрична, и наличие N вакуумов обеспечено индексом Виттена для суперсимметричной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели. Там есть кинки, интерполирующие между этими вакуумами, которые интерпретируются как невылетающие монополи четырёхмерной СКХД [7, 8], см. также Раздел 2.6 и обзор [11].

В пределе больших μ потенциал (2.4.19) доминирует над квадратичным по Δm_{AB} потенциалом, и последним можно пренебречь. Мы видим, что большинство вакуумов, имевшихся в $\mathcal{N} = 2$ случае, поднимаются, и при ненулевых Δm_{AB} в теории на мировой поверхности есть только один вакуум. Кроме того, поднявшиеся вакуумы становятся седловыми точками, а не локальными минимумами, и поэтому классически они нестабильны. Это означает, что в теории на мировой поверхности нет кинков.

Таким образом, мы приходим к выводу, что невылетающие монополи, имевшиеся в $\mathcal{N} = 2$ СКХД с ФИ-членом, не выживают предел больших μ , когда μ -деформированная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД, при условии что разности масс Δm_{AB} не равны нулю. Только когда $\Delta m_{AB} = 0$, потенциал (2.4.19) зануляется (и теория на мировой поверхности переходит в режим сильной связи), и можно рассматривать кинки/невылетающие монополи. Это будет обсуждаться ниже в Разделе 2.6.

2.5 Фермионные нулевые моды

В данном Разделе будут рассмотрены фермионные нулевые моды неабелевой струны. Во-первых, мы кратко опишем предел малых μ , см. более подробный обзор в [11]. В этом пределе деформационный суперпотенциал (2.2.2) сводится к ФИ F -члену и не нарушает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию [51, 52]. В пределе $\mathcal{N} = 2$

как суперориентационные, так и супертрансляционные фермионные нулевые моды неабелевой струны могут быть получены при помощи преобразований суперсимметрии из решения для бозонной струны [7, 18, 25]. После этого, мы плавно будем увеличивать μ и изучать возмущения суперориентационных нулевых мод при малых μ . Мы покажем, что все суперориентационные фермионные нулевые моды становятся массивными из-за μ -деформации. В результате фермионные модули, которые становятся фермионными полями в двумерной низкоэнергетической $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модели на струне, приобретают массы. В конечном счёте они исчезают из теории на мировой поверхности в пределе больших μ . В конце мы упомянем про супертрансляционные фермионные нулевые моды, которые, так же как и в $\mathcal{N} = 2$ теории, могут быть получены при помощи преобразований суперсимметрии из решения для бозонной струны.

2.5.1 Суперориентационные моды в $\mathcal{N} = 2$ пределе

Фермионная часть $\mathcal{N} = 2$ СКХД, определяемая суперпотенциалами (2.2.1) и (2.2.2) (до исключения присоединённых полей) может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4d} = & \frac{2i}{g_2^2} \text{Tr} \overline{\lambda_f^{\text{SU}(N)}} \not{D} \lambda_f^{\text{SU}(N)} + \frac{i}{g_1^2} \overline{\lambda_f^{\text{U}(1)}} \not{\partial} \lambda_f^{\text{U}(1)} + \text{Tr} i \overline{\psi} \not{\nabla} \psi + \text{Tr} i \tilde{\psi} \not{\nabla} \tilde{\psi} \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{q_f} \lambda_f^{\text{U}(1)} \psi + \tilde{\psi} \lambda_f^{\text{U}(1)} q_f + \overline{\psi} \lambda_f^{\text{U}(1)} q_f + q_f \lambda_f^{\text{U}(1)} \tilde{\psi} \right) \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{q_f} \lambda_f^{\text{SU}(N)} \psi + \tilde{\psi} \lambda_f^{\text{SU}(N)} q_f + \overline{\psi} \lambda_f^{\text{SU}(N)} q_f + q_f \lambda_f^{\text{SU}(N)} \tilde{\psi} \right) \quad (2.5.1) \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \tilde{\psi} \left(\frac{1}{2} a^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^{\text{SU}(N)} \right) \psi \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \overline{\psi} \left(\frac{1}{2} \overline{a}^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{\text{SU}(N)} \right) \tilde{\psi} \\
& - 2\sqrt{\frac{N}{2}} \mu_1 \left[\left(\lambda^{2\text{U}(1)} \right)^2 + \left(\overline{\lambda}_2^{\text{U}(1)} \right)^2 \right] - \mu_2 \text{Tr} \left[\left(\lambda^{2\text{SU}(N)} \right)^2 + \left(\overline{\lambda}_2^{\text{SU}(N)} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

где производные, действующие на фермионные поля, определяются через σ -матрицы, например $\overline{\nabla} = \nabla_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\alpha}$. Фермионные кварки ψ_α^{kA} , $\tilde{\psi}_{Ak}^\alpha$ записаны в ви-

де матриц по цветным и флейворным значкам. Индекс f относится к группе $SU(2)_R$ $\mathcal{N} = 2$ теории, $q^f = (q, \bar{q})$, $\lambda_\alpha^f = (\lambda_\alpha^1, \lambda_\alpha^2)$. Стоит обратить внимание на массовые слагаемые от μ -деформации для $f = 2$ фермионных суперпартнёров к калибровочным бозонам в (2.5.1). В $\mathcal{N} = 2$ пределе эти слагаемые исчезают.

Решение для струны в $\mathcal{N} = 2$ пределе при малых μ характеризуется как $1/2$ BPS; это означает, что половина суперзарядов $\mathcal{N} = 2$ теории действуют на решение (2.3.2) тривиальным образом, если ориентационный вектор n^l постоянен. А именно, четыре суперзаряда (из восьми суперзарядов $Q^{\alpha f}$), удовлетворяющие условиям

$$Q^{21} = Q^{22}, \quad Q^{11} = -Q^{12}. \quad (2.5.2)$$

действуют тривиально на BPS струну в $\mathcal{N} = 2$ теории с ФИ F -членом [7, 11, 52].

Другие четыре суперзаряда дают четыре супертрансляционные моды, являющиеся суперпартнёрами к двум трансляционным модам.

Однако, как только ориентационный вектор n^l становится медленно меняющейся функцией t и z , суперзаряды, отобранные условием (2.5.2), становятся генераторами суперсимметрии, действующими в $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной $CP(N-1)$ модели на мировой поверхности струны [7]. Это позволяет получить ориентационные фермионные нулевые моды из бозонного решения при помощи преобразований суперсимметрии, подчиняющихся условию (2.5.2) [7, 11]. В результате получается

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_2 &= \frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{\phi_2} \cdot n \bar{\xi}_L, \\ \bar{\psi}_1 &= -\frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{\phi_2} \cdot \xi_R \bar{n}, \\ \lambda^{11 \text{ SU}(N)} &= i \frac{\phi_1}{\phi_2} f_W \frac{x^1 - i x^2}{r^2} \cdot n \bar{\xi}_L, \\ \lambda^{22 \text{ SU}(N)} &= -i \frac{\phi_1}{\phi_2} f_W \frac{x^1 + i x^2}{r^2} \cdot \xi_R \bar{n}, \\ \lambda^{12 \text{ SU}(N)} &= \lambda^{11 \text{ SU}(N)}, \quad \lambda^{21 \text{ SU}(N)} = -\lambda^{22 \text{ SU}(N)}, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

где цветные и флейворные значки не выписаны явно, а верхние индексы присоединённых фермионов означают $\lambda^{\alpha f}$.

Отметим, что бозонные профильные функции струны $\phi_{1,2}(r)$, $f(r)$ и f_W в

данном Разделе — профильные функции BPS струны в $\mathcal{N} = 2$ пределе малых μ , а не струнные профильные функции Раздела 2.3.2, которые соответствовали пределу больших μ . Первые являются решениями уравнений первого, а не второго порядка (2.3.7). Они удовлетворяют граничным условиям (2.3.4), и были найдены численно в [6], см. также обзор [11].

Грассмановы переменные $\xi_{R,L}^l$, $l = 1, \dots, N$ в (2.5.3) пропорциональны параметрам преобразований суперсимметрии $\epsilon^{\alpha f}$, подчиняющимся условию (2.5.2):

$$\xi_L^l \sim \epsilon^{21} + \epsilon^{22}, \quad \xi_R^l \sim \epsilon^{12} - \epsilon^{11}. \quad (2.5.4)$$

Эти параметры становятся фермионными полями (суперпартнёрами к n^l) в эффективной теории на мировой поверхности $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$, как только мы допускаем их слабую зависимость от координат на мировой поверхности t и z [7, 11]. Они подчиняются условиям

$$\bar{n}_l \xi_{L,R}^l = 0, \quad (2.5.5)$$

которые есть не что иное как суперсимметричное обобщение $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ условия $|n|^2 = 1$.

2.5.2 Разложение фермионных ориентационных нулевых мод при малых μ

При включении массовых членов для $f = 2$ калибровочных фермионов (см. последнюю строчку в (2.5.1)), теория становится $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной, и половина суперзарядов $Q^{\alpha f=2}$ теряется. Больше нет преобразований суперсимметрии, которые бы действовали тривиально на струну с постоянным n^l (они использовались ранее для нахождения суперориентационных мод в $\mathcal{N} = 2$ пределе), и струна перестаёт быть BPS. Поэтому, чтобы вычислить нулевые моды, приходится решать уравнения Дирака.

Отметим, что в случае безмассовой μ -деформированной теории с ФИ D -членом, рассмотренной в [25], суперзарядами, действующими тривиально на струнное решение с постоянным n^l в $\mathcal{N} = 2$ пределе, были Q^{12} и Q^{21} , вместо линейных комбинаций, подчиняющихся условию (2.5.2). Поэтому при включении μ -деформации теряется только один (или два вещественных) из этих суперзарядов, а именно Q^{12} . Другой (два вещественных), Q^{21} , всё ещё действует

тривиально и обеспечивает BPS-насыщенность струны. В нашем случае, все четыре суперзаряда $\mathcal{N} = 1$ теории $Q^{\alpha 1}$ действуют нетривиально на струну. Это является причиной того, почему струна перестаёт быть BPS при включении μ .

Уравнения Дирака, следующие из действия (2.5.1), следующие:

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{g_1^2} \left(\overline{\partial} \lambda^{fU(1)} \right) + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{\psi} q^f + \overline{q}^f \widetilde{\psi} \right) - 4\delta_2^f \sqrt{\frac{N}{2}} \mu_1 \overline{\lambda}_2^{U(1)} = 0, \\
& \frac{i}{g_2^2} \left(\overline{\mathcal{D}} \lambda^{fSU(N)} \right)^a + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{\psi} T^a q^f + \overline{q}^f T^a \widetilde{\psi} \right) - \delta_2^f \mu_2 \overline{\lambda}_2^{aSU(N)} = 0, \\
& -i\overline{\psi} \overleftarrow{\nabla} + i\sqrt{2} \left[\overline{q}_f \left\{ \lambda^{fU(1)} + \lambda^{fSU(N)} \right\} + \widetilde{\psi} \left\{ \frac{1}{2} \overline{a}^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{SU(N)} \right\} \right] = 0, \\
& i\nabla \widetilde{\psi} + i\sqrt{2} \left[\left\{ \lambda_f^{U(1)} + \lambda_f^{SU(N)} \right\} q^f + \left\{ \frac{1}{2} \overline{a}^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{SU(N)} \right\} \psi \right] = 0,
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned}
& i\overline{\nabla} \psi + i\sqrt{2} \left[\left\{ \overline{\lambda}_f^{U(1)} + \overline{\lambda}_f^{SU(N)} \right\} q^f + \left\{ \frac{1}{2} a^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^{SU(N)} \right\} \widetilde{\psi} \right] = 0, \\
& -i\widetilde{\psi} \overleftarrow{\nabla} + i\sqrt{2} \left[\overline{q}^f \left\{ \overline{\lambda}_f^{U(1)} + \overline{\lambda}_f^{SU(N)} \right\} + \overline{\psi} \left\{ \frac{1}{2} a^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^{SU(N)} \right\} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Для того чтобы упростить задачу, ниже мы будем придерживаться следующей стратегии. Мы рассмотрим область малых μ и будем искать решения этих уравнений Дирака по теории возмущений по μ . Конечно, нулевые моды (2.5.3) удовлетворяют уравнениям Дирака (2.5.6) [18, 25] при $\mu = 0$. Мы возьмём эти моды в качестве нулевого приближения и найдём поправки, пропорциональные μ .

Похожий метод был использован в работах [18, 25] для безмассовой μ -деформированной теории с ФИ D -членом. В этом случае было показано, что ориентационные фермионные нулевые моды выживают при μ -деформации, но их профильные функции при этом меняются. Ниже мы покажем, что в случае нашей μ -деформированной теории с массивными кварками без ФИ D -члена ответ другой: ориентационные фермионные нулевые моды не выживают после μ -деформации.

По аналогии с методом, использованным в работе [25], используем следующую

щий анзац для суперориентационных мод:

$$\lambda^{1f \text{ SU}(N)} = 2 \frac{x^1 - ix^2}{r} \lambda_+^{1f}(r) n_{\bar{\xi}_L} + 2 \lambda_-^{1f}(r) \xi_L \bar{n}, \quad (2.5.7)$$

$$\lambda^{2f \text{ SU}(N)} = 2 \frac{x^1 + ix^2}{r} \lambda_+^{2f}(r) \xi_R \bar{n} + 2 \lambda_-^{2f}(r) n_{\bar{\xi}_R},$$

$$\bar{\psi}_1 = 2 \bar{\psi}_{1+}(r) \xi_R \bar{n} + 2 \frac{x^1 - ix^2}{r} \bar{\psi}_{1-}(r) n_{\bar{\xi}_R}.$$

$$\bar{\psi}_2 = 2 \bar{\psi}_{2+}(r) n_{\bar{\xi}_L} + 2 \frac{x^1 + ix^2}{r} \bar{\psi}_{2-}(r) \xi_L \bar{n}.$$

(2.5.8)

$$\bar{\psi}_1 = 2 \bar{\psi}_{1+}(r) \xi_R \bar{n} + 2 \frac{x^1 - ix^2}{r} \bar{\psi}_{1-}(r) n_{\bar{\xi}_R}.$$

$$\bar{\psi}_2 = 2 \bar{\psi}_{2+}(r) n_{\bar{\xi}_L} + 2 \frac{x^1 + ix^2}{r} \bar{\psi}_{2-}(r) \xi_L \bar{n}.$$

Здесь $\lambda_+(r)$ и $\psi_+(r)$ представляют «недеформированные» профильные функции, имевшиеся в $\mathcal{N} = 2$ случае, тогда как $\lambda_-(r)$ и $\psi_-(r)$ являются поправками по μ . Конечно, такая терминология имеет смысл только в пределе малых μ , когда «-»-компоненты имеют порядок малости μ . Вообще говоря, «+»-компоненты профильных функций раскладываются по чётным степеням параметра μ , а «-»-компоненты — по нечётным.

Рассмотрим уравнения для поправочных «-»-компонент (решения для «+»-компонент написаны в формуле (2.5.3) с точностью до членов порядка $O(\mu^2)$). Половина из них весьма похожи на уравнения, которые были решены в [25]. Обозначим

$$\lambda_-^{22} - \lambda_-^{21} \equiv \lambda_-,$$

тогда два из этих уравнений для λ_- и $\bar{\psi}_{1-}$ принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_r \bar{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{r} \bar{\psi}_{1-}(r) - \frac{1}{Nr} (f + f_W(N-1)) \bar{\psi}_{1-}(r) + i\phi_2 \lambda_- &= 0 \\ -\partial_r \lambda_- - \frac{f_W}{r} \lambda_- + i g_2^2 \phi_2 \bar{\psi}_{1-}(r) - \mu_2 g_2^2 \frac{i f_W \phi_1}{2 r \phi_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Эти уравнения могут быть решены так же, как и в [25]. Их решения даются формулами

$$\bar{\psi}_{1-} = -\mu_2 g_2^2 \frac{r}{8\phi_1} (\phi_1^2 - \phi_2^2) + O(\mu^3),$$

$$\lambda_- = \lambda_-^{22} - \lambda_-^{21} = -\mu_2 g_2^2 \frac{i}{4} \left((f_W - 1) \frac{\phi_2}{\phi_1} + \frac{\phi_1}{\phi_2} \right) + O(\mu^3). \quad (2.5.10)$$

Ещё одна часть профильных функций, $\bar{\psi}_{2-}$ и $(\lambda_-^{12} + \lambda_-^{11})$, удовлетворяют таким же уравнениям (2.5.9). Их решение также есть

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{2-} &= \bar{\psi}_{1-}, \\ \lambda_-^{12} + \lambda_-^{11} &= \lambda_-.\end{aligned}\tag{2.5.11}$$

Рассмотрим поведение этих решений при $r \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$. Бозонные профильные функции экспоненциально спадают на бесконечности

$$f_W(r) \sim \exp\{-m_G r\}, \quad \phi_{1,2} - \sqrt{\xi} \sim \exp\{-m_G r\},\tag{2.5.12}$$

а их поведение при $r \rightarrow 0$ такое:

$$f_W(r) - 1 \sim r^2, \quad \phi_1 \sim r, \quad \phi_2 \sim \text{const},\tag{2.5.13}$$

see (2.3.4).

Отсюда видно, что фермионные нулевые моды (2.5.10), (2.5.11) нормируемы. Они экспоненциально спадают при $r \rightarrow \infty$ и регулярны в $r \rightarrow 0$.

Теперь рассмотрим решения для остальных компонент. Они оказываются несколько более сложными. Обозначая

$$\lambda_-^{22} + \lambda_-^{21} \equiv \lambda_{(1)},$$

получим:

$$\begin{aligned}\partial_r \bar{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{r} \bar{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{Nr} (f - f_W) \bar{\psi}_{1-}(r) + i \phi_1 \lambda_{(1)} &= 0, \\ -\partial_r \lambda_{(1)} - \frac{f_W}{r} \lambda_{(1)} + i g_2^2 \phi_1 \bar{\psi}_{1-}(r) - \mu_2 g_2^2 \frac{i}{2} \frac{f_W}{r} \frac{\phi_1}{\phi_2} &= 0.\end{aligned}\tag{2.5.14}$$

До сих пор решения наших уравнений были некоторыми алгебраическими комбинациями бозонных профильных функций. Однако, в случае $\bar{\psi}_{1-}$ и $\lambda_{(1)}$ это уже не так. Соответствующие уравнения решены в Приложении Б. Сами решения написаны в формулах (Б.1.6) и (Б.1.7).

Две оставшиеся моды $\bar{\psi}_{2-}$ и $(\lambda_-^{12} - \lambda_-^{11})$ удовлетворяют тем же уравнениям (2.5.14). Поэтому и выражения для этих мод те же,

$$\bar{\psi}_{2-}(r) = \bar{\psi}_{1-}(r), \quad \lambda_-^{12} - \lambda_-^{11} = \lambda_{(1)}(r).\tag{2.5.15}$$

Решения (Б.1.6) и (Б.1.7) спадают экспоненциально на бесконечности, но поведение поля λ в (Б.1.7) сингулярно при $r \rightarrow 0$: оно пропорционально $1/r$. Это означает, что эти моды ненормируемы. Наш теоретико-возмущенческий подход не работает: поправки к (2.5.3), пропорциональные μ , оказываются ненормируемыми. В следующем подразделе будет показано, что разрешение этой проблемы лежит в том, что фермионные ориентационные моды становятся массивными вследствие μ -деформации.

2.5.3 Поднятие фермионных ориентационных мод

Рассмотрим вместо уравнений Дирака (2.5.6) уравнения с ненулевым собственным значением для фермионных кварков,

$$-i\bar{\psi}\overleftarrow{\nabla} + i\sqrt{2}\left(\bar{q}_f\left\{\lambda^{fU(1)} + \lambda^{fSU(N)}\right\} + \tilde{\psi}\left\{\frac{1}{2}\bar{a}^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \bar{a}^{SU(N)}\right\}\right) = -m_{or}\tilde{\psi}, \quad (2.5.16)$$

$$i\nabla\bar{\psi} + i\sqrt{2}\left(\left\{\lambda_f^{U(1)} + \lambda_f^{SU(N)}\right\}q^f + \left\{\frac{1}{2}\bar{a}^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \bar{a}^{SU(N)}\right\}\psi\right) = -m_{or}\psi. \quad (2.5.17)$$

с массой m_{or} , которая будет определена из условия нормируемости суперориентационных мод.

Поступая так же как в предыдущем подразделе, вместо (2.5.14) придём к

$$\begin{aligned} \partial_r\bar{\psi}_{i-}(r) + \frac{1}{r}\bar{\psi}_{i-}(r) + \frac{1}{Nr}(f - f_N)\bar{\psi}_{i-}(r) + i\phi_1\lambda_{(1)} &= m_{or}\frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{2\phi_2}, \\ -\partial_r\lambda_{(1)} - \frac{f_N}{r}\lambda_{(1)} + ig_2^2\phi_1\bar{\psi}_{i-}(r) - \mu_2g_2^2\frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Эти уравнения рассматриваются в Приложении Б. Решения этих уравнений написаны в формулах (Б.1.8) и (Б.1.9). Условие регулярности этих решений

при $r \rightarrow 0$ даёт для собственного значения

$$m_{or} = -\frac{\mu_2 g_2^2 \int_0^\infty dy \frac{f_N^2(y) \phi_1^2(y)}{y \phi_2^2(y)}}{1 - 2 \int_0^\infty dy \frac{f_N^2(y) \phi_1^2(y)}{y \phi_2^2(y)}}. \quad (2.5.19)$$

Решения для $\widetilde{\psi}_{2-}$ и комбинации $(\lambda_-^{12} - \lambda_-^{11})$ удовлетворяют такому же уравнению (2.5.18) и связаны с решениями (Б.1.8) и (Б.1.9) при помощи (2.5.15).

2.5.4 Эффективное действие в ориентационном секторе

Теперь, чтобы увидеть эффект от поднятия ориентационных фермионных нулевых мод, выведем фермионную часть двумерного эффективного действия на мировой поверхности струны с точностью до $O(\mu)$. Для этого предположим что фермионные модули $\xi_{L,R}^l$ являются медленно меняющимися функциями от t и z , подставим наш анзац (2.5.7), (2.5.8) в четырёхмерное фермионное действие (2.5.1) и проинтегрируем по x_1, x_2 . Из кинетических членов четырёхмерных фермионов (содержащие производные ∂_0 и ∂_3) получаются соответствующие кинетические слагаемые для двумерных фермионов, а массовые члены получаются из-за того, что теперь фермионные моды поднимаются. В результате, квадратичная часть двумерного фермионного действия есть

$$\mathcal{S}_{2d} = \int dt dz \left\{ \frac{4\pi}{g_2^2} (\bar{\xi}_L i \partial_R \xi_L + \bar{\xi}_R i \partial_L \xi_R) + m_{or} \gamma (\bar{\xi}_R \xi_L + \bar{\xi}_L \xi_R) + \dots \right\}, \quad (2.5.20)$$

где многоточие обозначает слагаемые более высоких порядков по полям, и

$$\gamma = -4 \int dx_1 dx_2 \widetilde{\psi}_{1+} \bar{\psi}_{2+} = 4 \int dx_1 dx_2 |\bar{\psi}_{2+}|^2, \quad (2.5.21)$$

тогда как

$$\partial_R = \partial_0 + i \partial_3, \quad \partial_L = \partial_0 - i \partial_3.$$

Мы видим, что все двумерные фермионные поля $\xi_{L,R}^l$ становятся массивными с массой m_{or} , пропорциональной μ . Можно ожидать, что в пределе больших μ эти фермионы отщепляются от бозонной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модели (2.4.3).

2.5.5 Супертрансляционные нулевые моды

Как уже было упомянуто выше, супертрансляционные моды могут быть получены из решения для бозонной струны при помощи преобразований суперсимметрии даже в μ -деформированной теории. Решение для струны перестаёт быть BPS, и все четыре оставшихся суперзаряда $Q^{\alpha 1}$ в $\mathcal{N} = 1$ теории действуют нетривиально на решение для струны. Так же как и бозонные трансляционные моды, супертрансляционные моды отщепляются от ориентационной $\mathbb{CP}(N - 1)$ модели и описываются свободными фермионами на мировой поверхности струны. Этого можно было ожидать из общих соображений. Для этого заметим, что ориентационные поля фермионов $\xi_{L,R}^l$ становятся тяжёлыми в пределе больших μ , а без них нельзя построить взаимодействие полей n^l и супертрансляционных модулей $\zeta_{L,R}$, совместимое с симметриями теории (если не рассматривать поправки со старшими производными).

Для полноты мы явно построим супертрансляционные нулевые моды в пределе больших μ , действуя преобразованиями $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии на струнное решение Раздела 2.3. $\mathcal{N} = 1$ преобразования суперсимметрии выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{kA} &= i\sqrt{2}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}\alpha}q^{kA}\epsilon^{\alpha} + \sqrt{2}\bar{\epsilon}^{\alpha}\bar{F}^{kA}, \\ \delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}Ak} &= i\sqrt{2}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}\alpha}\bar{q}_{Ak}\epsilon^{\alpha} + \sqrt{2}\bar{\epsilon}^{\alpha}\bar{F}_{kA},\end{aligned}\tag{2.5.22}$$

где F -слагаемые есть производные суперпотенциала (2.2.6),

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Ak} &= -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial q^{kA}} = \frac{i}{\mu_2}\left(\tilde{q}_{Ck}(\tilde{q}_{Aq}^C) - \frac{\alpha}{N}(\tilde{q}_Cq^C)\tilde{q}_{Ak}\right) + m\tilde{q}_{Ak} \\ &= \frac{i}{\mu_2}\left(\varphi_{Ck}(\varphi_{Aq}^C) - \frac{\alpha}{N}(\varphi_C\varphi^C)\varphi_{Ak}\right) + m\varphi_{Ak},\end{aligned}\tag{2.5.23}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}^{kA} &= -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\tilde{q}_{Ak}} = \frac{i}{\mu_2}\left(q^{kC}(\tilde{q}_Cq^A) - \frac{\alpha}{N}(\tilde{q}_Cq^C)q^{kA}\right) + mq^{kA} \\ &= \frac{i}{\mu_2}\left(\varphi^{kC}(\varphi_C\varphi^A) - \frac{\alpha}{N}(\varphi_C\varphi^C)\varphi^{kA}\right) + m\varphi^{kA},\end{aligned}\tag{2.5.24}$$

и где была использована формула (2.3.1).

Рассмотрим сперва область промежуточных r , в пределах $1/m_G \lesssim r \lesssim 1/m_L$. Как будет показано, фермионные нулевые моды ведут себя как $1/r$. Это

даст главные логарифмические вклады в кинетические члены для фермионов в двумерной эффективной теории на мировой поверхности струны.

Для вычисления фермионных мод нужно подставить бозонные решения (2.3.16) в преобразования (2.5.22). В (2.5.22), первые слагаемые в первой и второй строчках дают вклады $1/r$, тогда как F -слагаемые дают постоянные и логарифмические вклады, которые не дают главных логарифмических членов в эффективном действии. Поэтому F -членами можно пренебречь, и для отличных от нуля фермионных профилей получается

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 - i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_R, \\
\bar{\psi}_2 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 + i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_L, \\
\widetilde{\bar{\psi}}_1 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 - i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_R, \\
\widetilde{\bar{\psi}}_2 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 + i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_L.
\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

Можно видеть, что эти поды действительно пропорциональны $1/r$. Здесь $\zeta_{L,R}$ — грассманы параметры, возникшие от преобразований суперсимметрии, $\zeta_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^1$, $\zeta_R = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^2$. Эти параметры становятся фермионными полями двумерной эффективной теории на мировой поверхности струны.

Область малых r , $r \ll 1/m_G$ не вносит вклада, так как кварковые поля зануляются в этом пределе.

Чтобы найти эффективное действие на мировой поверхности, нужно подставить решения (2.5.25) в четырёхмерное фермионное действие (2.5.1). Для кинетического слагаемого получим

$$\mathcal{L}_{2d} = 2\pi\xi I_\xi (\bar{\zeta}_L i \partial_R \zeta_L + \bar{\zeta}_R i \partial_L \zeta_R), \tag{2.5.26}$$

где нормировочная постоянная

$$I_\xi = \frac{2N}{\ln \frac{m_W}{m_L}}. \tag{2.5.27}$$

Как уже было упомянуто ранее, при выводе этого эффективного действия мы проинтегрировали по поперечным координатам в промежутке $1/m_G \lesssim r \lesssim$

$1/m_L$. Интеграл по r логарифмически усилен. Вклады от других областей не имеют логарифмического усиления, и ими можно пренебречь.

Мы видим, что (2.5.26) — действие свободных фермионов, которые отщепляются от ориентационного сектора, описываемого $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ моделью (2.4.3).

2.6 Физика в теории на мировой поверхности и невылетающие монополи

Как мы уже видели выше, фермионные поля ξ^l эффективной теории на мировой поверхности становятся тяжёлыми в пределе больших μ и отщепляются. Более того, трансляционный сектор состоит из свободных полей и не взаимодействует с ориентационным сектором. Таким образом, в пределе больших μ наша эффективная теория на мировой поверхности неабелевой струны есть бозонная $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модель (2.4.3) без фермионов. Если массы кварков малы, но не равны, ориентационные модули n^l поднимаются за счёт потенциала (2.4.19).

Как уже упоминалось, наша четырёхмерная теория находится в хиггсовской фазе, и скварки развивают вакуумные средние (2.2.18). Поэтому монополи 'т Хоофта–Полякова, которые есть в теории в $\mathcal{N} = 2$ пределе малых μ , сдерживаются неабелевыми струнами. В калибровочных $U(N)$ теориях невылетающие монополи представляют собой соединения двух различных струн [7, 8, 33]. В эффективной теории на мировой поверхности неабелевой струны они видны как кинки, интерполирующие между различными вакуумами $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модели, см. обзор [11].

Важнейший вопрос — выживают или нет невылетающие монополи в пределе больших μ , когда четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. С позиций квазиклассики это было бы неожиданностью. С точки зрения квазиклассики само существование монополей 'т Хоофта–Полякова основывается на наличии присоединённых скаляров, развивающих вакуумные средние. При больших μ присоединённые поля становятся тяжёлыми и отщепляются в нашей четырёхмерной теории, так что квазиклассически можно ожидать, что монополи не выживают.

Теперь же мы видим, что в квантовой теории эта история становится интереснее. Невылетающие монополи представляются как кинки $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модели

на неабелевой струне. Поэтому чтобы разобраться с нашим вопросом, нужно изучать кинки в теории на мировой поверхности. Определённые результаты в этом направлении уже были получены. Как было упомянуто ранее, в рамках безмассовой μ -деформированной $\mathcal{N} = 2$ СКХД с ФИ D -членом было показано, что эффективная теория на мировой поверхности струны есть гетеротическая $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперсимметричная $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модель [17, 18, 23, 25]. В этой модели есть N вырожденных вакуумов, а также кинки, интерполирующие между ними. Это означает, что кинки/невывлетающие монополи всё-таки выживают в пределе больших μ в упомянутой выше теории.

В данной Главе была изучена более «реалистичная» версия μ -деформированной теории без ФИ D -члена. Этак теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД в пределе больших μ . Как было показано здесь, в пределе больших μ теория на мировой поверхности неабелевой струны сводится к несуперсимметричной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели без фермионов. Если разности кварковых масс не равны нулю, появляется потенциал (2.4.19). У него нет нескольких локальных минимумов, и поэтому кинки (невывлетающие монополи четырёхмерной теории) становятся нестабильными и исчезают.

Рассмотрим случай, когда массы кварков равны. Тогда $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модель находится в режиме слабой связи. Эта модель была решена Виттенем [26] в приближении больших N . Было показано, что эта модель находится в фазе конфайнмента. В более подходящих для физики монополей в четырёхмерии терминах это можно понять следующим образом, см. также более детальный обзор [11].

Структура вакуума $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели была изучена в [53]. Было показано, что истинное вакуумное состояние единственно. Однако, есть также порядка N квазивакуумов, которые становятся стабильными в пределе $N \rightarrow \infty$, так как расщепление по энергиям между соседними квазивакуумами — порядка $O(1/N)$. Таким образом, можно представить себе кинк, интерполирующий между истинным вакуумом и первым квазивакуумом, а также антикинк, возвращающийся к истинному вакууму, как на Рис. 2.1. Линейный потенциал конфайнмента между кинком и антикинком связан с возбуждённым квазивакуумом.

Такой конфайнмент кинков в двумерии был проинтерпретирован в терминах струн и монополей четырёхмерной теории в [49]. Тонкая структура вакуумов в

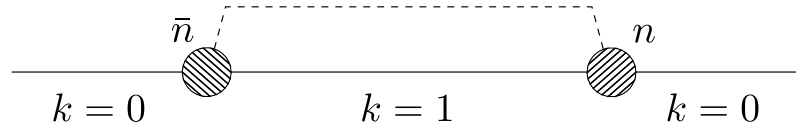


Рис. 2.1: Конфигурация струны с кинком и антикинком. $k = 0$ и $k = 1$ обозначают, соответственно, истинный вакуум и первый квазивакуум.

$CP(N - 1)$ модели на неабелевой струне означает, что N элементарных струн расщепляются за счёт квантовых эффектов и имеют несколько разные натяжения. Разности между натяжениями «соседних» струн пропорциональны Λ_{CP}^2 , см. (2.4.13). Поэтому монополи, в добавление к конфайнменту в четырёхмерии (который обеспечивает то, что они присоединяются к струнам), испытывают также конфайнмент в двумерии вдоль струны. Монополь и антимонаполь, соединённые струной с более сильным натяжением, формируют мезонное связанное состояние.

На Рис. 2.1 представлена монополь-антимонапольная пара, интерполирующая между струнами 0 и 1. Энергия возбуждённой части струны (обозначенной как 1) пропорциональна расстоянию R между кинком и антикинком:

$$V(R) \sim \Lambda_{CP}^2 R. \quad (2.6.1)$$

Когда она превышает массу двух монополей, которая порядка Λ_{CP} , образуется вторая монополь-антимонапольная пара, и струна рвётся. Это даёт оценку характерного размера возбуждённой части струны, $R \sim N/\Lambda_{CP}$. Так как эта длина растёт в пределе больших N , кинки метастабильны с экспоненциально маленькой вероятностью распада $\exp\{-N\}$.

Результаты данной Главы были опубликованы в статьях [19, 20].

ГЛАВА 3

$\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная КХД: исследование семилокальных струн

В предыдущей Главе рассматривалась μ -деформированная $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная КХД с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f = N$ флейворами. В главном порядке при малых μ массовое слагаемой для присоединённой материи сводится в ФИ F -члену, не нарушающему $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию [52, 54]. В кварковом вакууме, конденсат скварков определяется величиной $\sqrt{\mu t}$, где t — масса кварка. В такой постановке неабелевы струны были впервые обнаружены в работах [5, 6, 7, 8], и их динамика была хорошо изучена, см. также обзор [11]. Кроме трансляционных нулевых мод, типичных для абелева вихря-струны АНО [14], у неабелевых струн есть ориентационные модули, связанные с вращениями их потоков внутри неабелевой группы $SU(N)$. Динамика ориентационных модулей в $\mathcal{N} = 2$ СКХД описывается двумерной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ моделью, живущей на мировой поверхности неабелевой струны.

Оказывается, что при ненулевых μ неабелева струна больше не является BPS, и суперсимметрия на мировой поверхности полностью потеряна. Фермионный сектор низкоэнергетической теории на мировой поверхности отщепляется при больших μ , а бозонный сектор описывается двумерной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ моделью. Также в Главе 2 было показано, что в случае одинаковых масс кварков невылетающие монополи, которые на мировой поверхности видны как кинки [7, 8], выживают при μ -деформации и остаются в пределе $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Также был найден потенциал, возникающий при ненулевых разностях кварковых масс.

Неабелевы струны в $\mathcal{N} = 2$ СКХД с «лишними» ароматами кварков ($N_f > N$) уже изучались в литературе. В такой постановке у струны появляются модули размера, и такая струна становится семилокальной. В частности, в неабелевом случае такие струны интерполируют между локальными струна-

ми АНО и инстантонами сигма-модели¹ [34, 55, 56, 57, 58]. Теория на мировой поверхности семилокальной неабелевой струны была впервые рассмотрена с точки зрения D-бран [5, 8], и позднее со стороны теории поля [59, 60, 61, 62]. В частности, было установлено, что теория на мировой поверхности есть так называемая $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричная zn модель.

В данной Главе мы продолжаем изучение неабелевых струн в СКХД с дополнительными ароматами кварков, $N_f > N$, и рассматриваем μ -деформированную теорию. В частности, мы исследуем вопрос о том, что происходит с семилокальной неабелевой струной при увеличении параметра μ и в пределе больших μ , когда теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Во-первых, мы обнаружили, что также как и в случае $N_f = N$, рассмотренном в Главе 2, струна больше не является BPS, и суперсимметрия на мировой поверхности потеряна.

Кроме того, при включении параметра деформации μ сама струна перестаёт быть семилокальной. Рассматривая теорию на мировой поверхности при малых μ мы покажем, что в теории появляется потенциал, зависящий от модулей размера струны, который приводит к сжатию струны. В конце концов в пределе больших μ модули размера отщепляются, и эффективная теория на струне сводится к $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели.

В конце мы обсудим, что происходит с невылетающими монополями.

3.1 Постановка задачи

3.1.1 Четырёхмерная теория

В данном подразделе мы кратко опишем нашу четырёхмерную теорию. Основной моделью здесь является четырёхмерная $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричная КХД с калибровочной группой $SU(N) \times U(1)$. Состав полей этой теории такой. Материя состоит из $N_f = N + \tilde{N}$ ароматов гипермультиплетов кварков в фундаментальном представлении, скалярные компоненты которых мы обозначаем как q^{kA} и \tilde{q}_{Ak} . Здесь, $A = 1, \dots, N_f$ — флейворный, а $k = 1, \dots, N$ — цветной значок. Векторный мультиплет состоит из $U(1)$ калибровочного поля A_μ и $SU(N)$ калибровочного поля A_μ^a , комплексных скалярных полей a и a^a в присоединённом представлении цветной группы, и их суперпартнёров — вейлевских фермионов.

¹Англ. sigma-model lumps.

Индекс a пробегает значения от 1 до $N^2 - 1$, а спинорный индекс $\alpha = 1, 2$.

Суперпотенциал $\mathcal{N} = 2$ СКХД

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=2} = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{q}_A \mathcal{A}^{U(1)} q^A + \tilde{q}_A \mathcal{A}^a T^a q^A \right\} + m_A \tilde{q}_A q^A, \quad (3.1.1)$$

включает $\mathcal{N} = 1$ мультиплеты присоединённой киральной материи $\mathcal{A}^{U(1)}$ и $\mathcal{A}^{SU(N)} = \mathcal{A}^a T^a$, и $\mathcal{N} = 1$ киральные мультиплеты кварков q^A и \tilde{q}_A (здесь используются одни и те же обозначения для суперполей кварков и их скалярных компонент). Деформация μ , рассматриваемая в данной Главе, вводится при помощи суперпотенциала (2.2.2),

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\mu_1}{2} \left(\mathcal{A}^{U(1)} \right)^2 + \frac{\mu_2}{2} (\mathcal{A}^a)^2.$$

Мы предполагаем, что параметры деформации — одного порядка, $\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu$. При увеличении $\mu \rightarrow \infty$, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия нарушается, и теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Напротив, в пределе малых μ этот суперпотенциал не нарушает $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию и сводится к ФИ F -члену [52, 54].

Для того, чтобы полностью контролировать теорию и оставаться в слабой связи при взятии такого предела, нужно потребовать, чтобы произведение $\sqrt{\mu t}$ оставалось постоянным и гораздо большим величины $\Lambda_{\mathcal{N}=1}$, которая является масштабом $SU(N)$ сектора $\mathcal{N} = 1$ СКХД.

Бозонная часть действия выглядит так же, как и (2.2.8):

$$\begin{aligned} S_{\text{bos}} = \int d^4x & \left(\frac{1}{2g_2^2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{SU(N)} \right)^2 + \frac{1}{4g_1^2} \left(F_{\mu\nu}^{U(1)} \right)^2 + \right. \\ & \frac{2}{g_2^2} \text{Tr} \left| \nabla_\mu a^{SU(N)} \right|^2 + \frac{1}{g_1^2} \left| \partial_\mu a^{U(1)} \right|^2 + \left| \nabla_\mu q^A \right|^2 + \left| \nabla_\mu \tilde{q}^A \right|^2 + \\ & \left. V(q^A, \tilde{q}_A, a^{SU(N)}, a^{U(1)}) \right). \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Здесь ∇_μ — ковариантная производная в соответствующем представлении

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^{\text{adj}} &= \partial_\mu - i [A_\mu^a T^a, \cdot], \\ \nabla_\mu^{\text{fund}} &= \partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{U(1)} - i A_\mu^a T^a, \end{aligned}$$

а генераторы $SU(N)$ нормированы как $\text{Tr} (T^a T^b) = (1/2) \delta^{ab}$. Суперпотенциал (3.1.1), (3.1.1) даёт вклад в скалярный потенциал V , который есть сумма

слагаемых типов F и D ,

$$\begin{aligned}
V(q^A, \tilde{q}_A, a^{\text{SU}(N)}, a^{\text{U}(1)}) &= \\
&= \frac{g_2^2}{2} \left(\frac{1}{g_2^2} f^{abc} \bar{a}^b a^c + \bar{q}_A T^a q^A - \tilde{q}_A T^a \tilde{q}^A \right)^2 \\
&+ \frac{g_1^2}{8} (\bar{q}_A q^A - \tilde{q}_A \tilde{q}^A)^2 \\
&+ 2g_2^2 \left| \tilde{q}_A T^a q^A + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{W}_{N=1}}{\partial a^a} \right|^2 + \frac{g_1^2}{2} \left| \tilde{q}_A q^A + \sqrt{2} \frac{\partial \mathcal{W}_{N=1}}{\partial a^{\text{U}(1)}} \right|^2 \\
&+ 2 \sum_{A=1}^{N_f} \left\{ \left| \left(\frac{1}{2} a^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^a T^a \right) q^A \right|^2 + \right. \\
&\quad \left. \left| \left(\frac{1}{2} a^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^a T^a \right) \tilde{q}^A \right|^2 \right\},
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся флейворным значкам A (а также по цветным индексам, которые здесь не выписаны явно).

Рассмотрим случай с одним «лишним» ароматом, $N_f = N + 1$. У скалярного потенциала (3.1.3) есть множество суперсимметричных вакуумов, но в данной Главе мы рассмотрим конкретный вакуум, в котором в конденсат выпадают максимальное число скварков, равное N . С точностью до калибровочного преобразования, вакуумные средние скварков равны

$$\langle q^{kA} \rangle = \langle \tilde{q}^{kA} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \sqrt{\xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \sqrt{\xi_{N-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\xi_N} & 0 \end{array} \right), \tag{3.1.4}$$

где кварковые поля записаны в виде прямоугольных матриц размера $N \times N_f$, а ξ_P определены формулой (2.2.14),

$$\begin{aligned}
\xi_P &= 2 \left(\sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 (m_P - \hat{m}) \right), \\
\hat{m} &= \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N m_P.
\end{aligned}$$

Если определить матрицу присоединённых скаляров как в (2.2.5),

$$\Phi = \frac{1}{2} a + T^a a^a ,$$

то вакуумные средние присоединённых полей можно записать в виде

$$\langle \Phi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & m_N \end{pmatrix} . \quad (3.1.5)$$

Вакуум (3.1.4) приводит к спонтанному нарушению как калибровочной $U(N)$, так и флейворной $SU(N)$ групп. Однако в пределе равных масс $m_A \equiv m$, $A = 1, \dots, N_f$ все параметры ξ становятся одинаковыми, $\xi_P \equiv \xi$, $P = 1, \dots, N$ и выживает диагональная глобальная подгруппа $SU(N)_{C+F}$, или, выражаясь точнее (сравн. (2.2.21), (1.1.3)):

$$U(N)_{\text{gauge}} \times SU(N)_{\text{flavor}} \rightarrow SU(N)_{C+F} \times SU(\tilde{N})_F \times U(1) . \quad (3.1.6)$$

Таким образом, в этом вакууме происходит блокировка цвета с ароматом. Наличие глобальной цвет-ароматной симметрии $SU(N)_{C+F}$ является причиной появления неабелевых струн, см. обзор [11].

В особом случае, когда

$$\mu_2 = \mu_1 \sqrt{2/N} \equiv \mu ,$$

суперпотенциал (3.1.1) упрощается и становится односледовым оператором

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \mu \text{Tr}(\Phi^2) . \quad (3.1.7)$$

3.1.2 Спектр масс

В данном Разделе мы кратко рассмотрим спектр масс нашей четырёхмерной СКХД, когда массы всех кварков одинаковы, сравн. [11, 25, 52]. Из-за конденсации скварков калибровочные бозоны становятся массивными. Их массы равны²

$$\begin{aligned} m_{U(1)} &= g_1 \sqrt{\frac{N}{2}} \xi , \\ m_{SU(N)} &= g_2 \sqrt{\xi} . \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

²Для простоты мы предполагаем, что параметры ξ , μ_1 , μ_2 вещественны.

Массы скаляров могут быть извлечены из потенциала (3.1.3). Раскладывая и диагонализуя массовую матрицу, находим $N^2 - 1$ вещественных скаляров с массами $m_{\text{SU}(N)}$ и один с массой $m_{\text{U}(1)}$. Они являются $\mathcal{N} = 1$ суперпартнёрами калибровочных бозонов $\text{SU}(N)$ и $\text{U}(1)$. Ещё N^2 компонент съедены механизмом Хиггса. Другие $2 \times 2N^2$ вещественных скаляров (присоединённые скаляры a^a , a и половина скварков) становятся скалярными компонентами следующих киральных $\mathcal{N} = 1$ мультиплетов: один с массой

$$m_{\text{U}(1)}^+ = g_1 \sqrt{\frac{N}{2} \xi \lambda_1^+}, \quad (3.1.9)$$

и ещё один с массой

$$m_{\text{U}(1)}^- = g_1 \sqrt{\frac{N}{2} \xi \lambda_1^-}. \quad (3.1.10)$$

Оставшиеся $2(N^2 - 1)$ киральных мультиплетов имеют массы

$$m_{\text{SU}(N)}^+ = g_2 \sqrt{\xi \lambda_2^+}, \quad (3.1.11)$$

$$m_{\text{SU}(N)}^- = g_2 \sqrt{\xi \lambda_2^-}. \quad (3.1.12)$$

Здесь, λ_i^\pm — корни квадратного уравнения [11, 52]

$$\lambda_i^2 - \lambda_i(2 + \omega_i^2) + 1 = 0 \quad (3.1.13)$$

где

$$\omega_1 = \frac{g_1 \mu_1}{\sqrt{\xi}}, \quad \omega_2 = \frac{g_2 \mu_2}{\sqrt{\xi}}. \quad (3.1.14)$$

При $N_f > N$ кроме описанных выше массивных скаляров в теории появляются также $4N(N_f - N)$ скаляров, которые происходят от дополнительных ароматов скварков q^K и \tilde{q}_K , $K = (N + 1), \dots, N_f$. В пределе равных масс эти дополнительные скаляры оказываются безмассовыми, и в теории появляется хиггсовская ветка

$$\mathcal{H} = T^* \text{Gr}^{\mathbb{C}}(N_f, N) \quad (3.1.15)$$

вещественной размерности

$$\dim \mathcal{H} = 4N(N_f - N), \quad (3.1.16)$$

сравн. (1.1.4).

В пределе больших μ состояния с массами $m_{U(1)}^+$ и $m_{SU(N)}^+$ становятся тяжёлыми с массами $\sim g^2\mu$ и отщепляются. Они соответствуют мультиплетам присоединённой материи. Состояния с массами $m_{U(1)}^-$ и $m_{SU(N)}^-$ становятся лёгкими с массами $\sim \xi/\mu$. Скалярные компоненты этих мультиплетов являются скалярными частицами Хиггса. Они развивают вакуумные средние (3.1.4). В противоположном пределе малых μ их массы находятся по формулам

$$\begin{aligned} m_{U(1)}^- &= g_1 \sqrt{\frac{N}{2}} \xi \left(1 - \frac{g_1 \mu_1}{2\sqrt{\xi}} + \dots \right), \\ m_{SU(N)}^- &= g_2 \sqrt{\xi} \left(1 - \frac{g_2 \mu_2}{2\sqrt{\xi}} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Как уже было упомянуто, $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрия в нашей теории не нарушена в главном порядке при малых μ [52, 54]. В главном порядке параметры ω в (3.1.14) равны нулю, а ФИ параметр $\xi \sim \mu t$ постоянен и отличен от нуля. Можно видеть, что в пределе $\mathcal{N} = 2$ скалярные поля Хиггса вырождаются с калибровочными полями³, но становятся легче при включении μ -деформации.

Отношение квадратов масс частицы Хиггса и калибровочного бозоны β является важным параметром⁴ в теории сверхпроводимости. Сверхпроводник первого рода соответствует $\beta < 1$, а второго рода — $\beta > 1$. BPS-струна возникает на границе при $\beta = 1$. Мы видим, что в нашей теории оба параметра β ,

$$\beta_{U(1)} = \left(\frac{m_{U(1)}^-}{m_{U(1)}} \right)^2, \quad \beta_{SU(N)} = \left(\frac{m_{SU(N)}^-}{m_{SU(N)}} \right)^2, \quad (3.1.18)$$

меньше единицы, так что наша теория при ненулевых μ находится в фазе сверхпроводимости первого рода. Это окажется важным ниже.

3.2 Семилокальные неабелевы вихри

В данном разделе мы изучим решение для вихря-струны в случае одинаковых масс кварков. Сперва будут упомянуты уже известные результаты [62] для семилокальной неабелевой BPS струны, и затем мы перейдём к μ -деформации.

³Они входят в один и тот же длинный векторный $\mathcal{N} = 2$ супермультиплет [52]

⁴Дабы избежать путаницы, отметим, что в данной Главе двумерная обратная константа связи обозначается символом γ , а буква β обозначает отношение масс, указанное в тексте.

Мы выведем эффективную теорию на мировой поверхности для модулей струны в этом случае. Для простоты мы рассмотрим теорию с одним дополнительным ароматом, $N_f = N + 1$.

3.2.1 BPS семилокальная неабелева струна

Начнём с обсуждения семилокальных неабелевых струн в пределе $\mathcal{N} = 2$ [62]. Как только число ароматов превышает число цветов, у профильных функций вихря больше нет привычных экспоненциально затухающих хвостов. Наличие хиггсовской ветки и соответствующих безмассовых полей в четырёхмерии делает их семилокальными. Подробный обзор абелева случая может быть найден в [34]. Семилокальные струны на больших расстояниях от центральной оси спадают степенным образом. Например, семилокальные абелевы BPS струны интерполируют между АНО струной [14] и инстантоном двумерной $O(3)$ сигма модели, поднятому в четырёхмерии (в англоязычной литературе такая конфигурация известна также под термином «the lump»). В случае одного дополнительного аромата у семилокальной струны есть две дополнительные нулевые моды, параметризуемые комплексным модулем ρ . Поперечный размер струны связывается с $|\rho|$. В пределе $|\rho| \rightarrow 0$ в абелевом случае получается струна АНО, а при $|\rho| \gg 1/m_{U(1)}$ струна превращается в упомянутый выше поднятый в четырёхмерии инстантон.

Рассмотрим бесконечную статичную струну, растянутую вдоль оси x_3 . Можно начать с такого же анзаца как и (2.3.1), (2.3.2):

$$q^{kA} = \bar{q}^{kA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi^{kA}, \quad (3.2.1)$$

$$\varphi = \left(\phi_2(r) + n\bar{n}(\phi_1(r) - \phi_2(r)) \mid n \phi_3(r) e^{-i\alpha} \right) \quad (3.2.2)$$

для кварков, а для калибровочных полей

$$\begin{aligned} A_i^{\text{SU}(N)} &= \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f_G(r) \left(n\bar{n} - 1/N \right), \\ A_i^{\text{U}(1)} &= \frac{2}{N} \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f(r). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Индекс i пробегает значения $i = 1, 2$, все прочие компоненты зануляются; α , r — полярные угол и радиус в плоскости (x_1, x_2) . Комплексные параметры

$n^l, l = 1, \dots, N$ удовлетворяют $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ условию $\bar{n}n = 1$. Они параметризуют ориентационные нулевые моды неабелевой струны, возникающие из-за наличия цвет-ароматной глобальной группы (3.1.6), см. также обзор [11].

Профильные функции струны, входящие в (3.2.2) и (3.2.3), удовлетворяют BPS уравнениям первого порядка. В случае

$$\frac{g_1^2}{2} = \frac{g_2^2}{N} \equiv \frac{g^2}{N} \quad (3.2.4)$$

решение выглядит особенно просто [62]. Оно параметризуется комплексным модулем размера ρ :

$$\begin{aligned} \phi_1 &\approx \sqrt{\xi} \frac{r}{\sqrt{r^2 + |\rho|^2}}, \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi}, \\ \phi_3 &= \frac{\rho}{r} \phi_1 \approx \sqrt{\xi} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 + |\rho|^2}}, \\ f &= f_G \approx \frac{|\rho|^2}{r^2 + |\rho|^2}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Это решение справедливо в пределе $|\rho| \gg 1/(g_2\sqrt{\xi}|\rho|)$, то есть когда скалярные поля достигают вакуумного многообразия (хиггсовской ветки). Натяжение такой BPS струны определяется формулой

$$T_{BPS} = 2\pi\xi. \quad (3.2.6)$$

Чтобы получить низкоэнергетическую двумерную теорию, живущую на мировой поверхности струны, нужно предположить, что модули n^P и ρ являются медленно меняющимися функциями поперечных координат t, z , и подставить решение (3.2.5) в действие (3.1.2). Это даёт эффективное действие

$$S_{SUSY}^{2d} = \int d^2x \left\{ 2\pi\xi |\partial_k(\rho n_P)|^2 \ln \frac{L}{|\rho|} + \frac{4\pi}{g^2} [|\partial_k n_P|^2 + (\bar{n}_P \partial_k n_P)^2] \right\}, \quad (3.2.7)$$

где интегрирование ведётся по координатам x_0, x_3 ; подробный вывод представлен в работе [62]. Здесь $k = 0, 3$, а L — ИК обрезание, введённое для регуляризации логарифмических расходимостей ориентационных и нулевых мод струны. Точнее говоря, мы вводим струну большой, но конечной длины L . Таким образом регуляризуется распределение профильных функций струны в поперечной плоскости [59]. ИК расходимости возникают из-за медленного (степенного)

спада профильных функций струны, связанное с наличием хиггсовской ветки [59, 62].

3.2.2 Деформированная теория на мировой поверхности

Если учесть поправки по старшим степеням μ , суперсимметрия в четырёхмерии сокращается до $\mathcal{N} = 1$, и, как уже было объяснено выше, наша теория превращается в сверхпроводник первого рода, сравн. [52]. Струна перестаёт быть BPS-насыщенной. Чтобы имитировать это, рассмотрим упрощённую версию нашей теории с бозонным действием

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4g_2^2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4g_1^2} (F_{\mu\nu})^2 + |\nabla_\mu \varphi^A|^2 + \lambda_N (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A)^2 + \lambda_1 (|\varphi^A|^2 - N\xi)^2 \right\}. \quad (3.2.8)$$

Эта модель зависит от двух параметров — отношений квадратов масс $U(1)$ и $SU(N)$ хиггсовских и калибровочных бозонов:

$$\begin{aligned} \beta_{U(1)} &= \frac{8\lambda_1}{g_1^2}, \\ \beta_{SU(N)} &= \frac{2\lambda_N}{g_2^2}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

которые мы идентифицируем с параметрами β (3.1.18) нашей исходной теории. Эта модель — неабелево обобщение теории, рассмотренной в [63], где изучалась скалярная КЭД, см. также [34].

В $\mathcal{N} = 2$ СКХД параметры β в точности равны единице. В этом случае представление Богомольного даёт уравнения первого порядка для профильных функций струны. Теория на мировой поверхности в этом случае есть (3.2.7).

При включении поправок по μ , параметры β больше не равны единице.

Запишем представление Богомольного для натяжения струны

$$T_\beta = \int d^2x_\perp \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2}g_2} F_{12}^a + \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A) \right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}g_1} F_{12} + \frac{g_1}{2\sqrt{2}} (|\varphi^A|^2 - N\xi) \right]^2 + |\nabla_1 \varphi^A + i\nabla_2 \varphi^A|^2 + \frac{N}{2} \xi F_3^* + \frac{g_2^2}{2} (\beta_{SU(N)} - 1) (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A)^2 + \frac{g_1^2}{8} (\beta_{U(1)} - 1) (|\varphi^A|^2 - N\xi)^2 \right\}, \quad (3.2.10)$$

где \vec{x}_\perp представляет координаты в поперечной плоскости. Здесь появляются два дополнительных слагаемых (в последней строчке). Неравенство Богомольного больше не выполняется. Но если значения параметров $\beta_{U(1)}$ и $\beta_{SU(N)}$ только лишь немного отличаются от единицы, то можно использовать уравнения первого порядка для того, чтобы переписать выражения в этих дополнительных слагаемых как

$$g_2^2 (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A) = -F_{12}^a, \quad \frac{g_1^2}{8} (|\varphi^A|^2 - N\xi) = -F_{12}. \quad (3.2.11)$$

В случае (3.2.4) можно использовать (3.2.5) для вычисления эффективного действия. Подставляя (3.2.2), (3.2.3), (3.2.5) в (3.2.11), (3.2.10), получим деформированную теорию на мировой поверхности,

$$S_\beta^{2d} = \int d^2x \left\{ 2\pi\xi |\partial_k(\rho n_P)|^2 \ln \frac{L}{|\rho|} + \frac{4\pi}{g^2} [|\partial_k n_P|^2 + (\bar{n}_P \partial_k n_P)^2] + \frac{\beta - 1}{g^2} \frac{4\pi}{3|\rho|^2} + \dots \right\}, \quad (3.2.12)$$

где теперь $\beta \equiv \beta_{U(1)} = \beta_{SU(N)}$, а многоточие представляет поправки по степеням $1/g^2\xi|\rho|^2$.

Мы сразу же видим отсюда, что для не-BPS струны ρ больше не является модулем. Появляется потенциал, зависящий от ρ и пропорциональный отклонению β от единицы. В частности, для сверхпроводника первого рода ($\beta < 1$) размер ρ стремится уменьшиться, тогда как для сверхпроводника второго рода ($\beta > 1$) размер ρ стремится расшириться, приводя к нестабильности вихря, сравн. [34].

В нашем случае значение величины β меньше единицы и может быть вычислено по формуле (3.1.17) при малых μ ; при этом получается

$$\beta = 1 - \frac{g\mu}{\sqrt{\xi}} + \dots \quad (3.2.13)$$

Отсюда получается эффективное действие на мировой поверхности струны,

$$S_{\beta}^{2d} = \int d^2x \left\{ 2\pi\xi |\partial_k(\rho n_P)|^2 \ln \frac{L}{|\rho|} + \frac{4\pi}{g^2} \left[|\partial_k n_P|^2 + (\bar{n}_P \partial_k n_P)^2 \right] - 4\pi \frac{\mu}{3g\sqrt{\xi}} \frac{1}{|\rho|^2} + \dots \right\}. \quad (3.2.14)$$

Мы видим, что размер семилокальной струны стремится уменьшиться, и при больших μ мы ожидаем, что дальнедействующие хвосты струны не образуются. Струны становится локальной неабелевой струной только с ориентационными модулями n^l , чья динамика на мировой поверхности описывается $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ моделью.

На самом деле, из общих соображений можно привести доводы в пользу того, что при включении и увеличении μ семилокальная струна становится нестабильной. Решение для семилокальной струны (3.2.5) «сделано» из безмассовых полей, соответствующих хиггсовской ветке рассматриваемой теории. Как уже было упомянуто, скажем, в Абелевом случае это решение соответствует инстантону двумерной $O(3)$ сигма модели, поднятому в четырёхмерное пространство. По сути, этот инстантон является BPS солитоном, и естественно ожидать, что он становится нестабильным, когда мы увеличиваем μ и нарушаем суперсимметрию на мировой поверхности.

В частности, как видно из представления Богомольного (3.2.10), дополнительные слагаемые, возникающие при $\beta < 1$, уменьшают натяжение струны. Это запрещено для только что упомянутого поднятого BPS инстантона, так как его натяжение точно определяется центральным зарядом и равно $2\pi\xi$, см. (3.2.6). При увеличении μ струна перестаёт быть BPS, ρ становится нестабильным и уменьшается, приводя при больших μ к гораздо меньшему натяжению, см. (3.3.1) ниже.

3.3 Обсуждение результатов

В данной Главе был изучен вопрос о том, что происходит с неабелевыми семилокальными струнами в $\mathcal{N} = 2$ СКХД при включении μ -деформации и переходе к пределу больших μ . Было показано, что появляется потенциал, зависящий от (бывшего) модуля размера ρ , и этот модуль в конечном счёте отщепляется, когда теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД при больших μ . Отметим,

что хиггсовская ветка никуда не девается, но струна больше не «состоит» из безмассовых полей, так что дальнедействующие «хвосты» струны исчезают.

Таким образом, семилокальная струны вырождается в локальную. Неабелевы локальные струны в пределе больших μ , когда четырёхмерная теория — это $\mathcal{N} = 1$ СКХД, изучалась в Главе 2, и теперь мы видим, что результаты, полученные в той Главе, можно напрямую применить и в нашем случае $N_f > N$. Ниже мы кратко подытожим эти результаты.

В пределе больших μ натяжение струны логарифмически подавлено,

$$T_{local} = \frac{4\pi|\xi|}{\ln \frac{g^2|\mu|}{|m|}}. \quad (3.3.1)$$

Это можно противопоставить BPS формуле (3.2.6), справедливой в главном порядке при малых μ .

Как обычно, теория на мировой поверхности содержит трансляционные модули, но они отщепляются от ориентационного сектора. Ориентационный сектор описывается $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ моделью с действием (2.4.3),

$$S^{(1+1)} = \int dt dz \left\{ \gamma \left[(\partial_k \bar{n} \partial_k n) + (\bar{n} \partial_k n)^2 \right] + V_{1+1} \right\}.$$

Отметим, что все ориентационные фермионные нулевые моды поднимаются (см. Главу 2) и не входят в низкоэнергетическую эффективную теорию. Описанная выше теория на мировой поверхности является чисто бозонной теорией.

Здесь двумерная обратная константа связи γ большая⁵, и по формуле (2.4.11):

$$\gamma \sim \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2|\mu|}{|m|}}.$$

На квантовом уровне $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модель асимптотически свободна, так что константа связи γ является бегущей, и на масштабе энергии E она равна

$$2\pi\gamma(E) = N \log \left(\frac{E}{\Lambda_{CP}} \right), \quad (3.3.2)$$

где масштаб теории на мировой поверхности задаётся формулой (2.4.13),

$$\Lambda_{CP} \approx \sqrt{\xi} \exp \left\{ \left(-\text{const} \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2|\mu|}{|m|}} \right) \right\}.$$

⁵Лишь в этой главе двумерная константа связи обозначается как γ . В Главах 2 и 4 для константы связи используется обозначение 2β , а в Главах 1 и 5 — просто β .

Видно, что масштаб Λ_{CP} $CP(N-1)$ модели экспоненциально мал, так что теория на мировой поверхности находится в режиме слабой связи в широком диапазоне энергий $\gg \Lambda_{CP}$. Это можно противопоставить с неабелевыми струнами в $\mathcal{N} = 2$ СКХД, где масштаб теории на мировой поверхности Λ_{CP} равен масштабу четырёхмерной СКХД $\Lambda_{\mathcal{N}=2}$ [11].

В случае когда массы кварков, входящие в лагранжиан (3.1.2) не равны друг другу, возникает потенциал на n^P . В простейшем случае, когда массы всех кварков положительны, этот потенциал даётся формулой (2.4.19),

$$V_{1+1} \approx \frac{8\pi|\mu|}{\ln \frac{g^2|\mu|}{|m|}} \sum_{P=1}^N m_P |n^P|^2. \quad (3.3.3)$$

В случае общего положения по отношению к Δm_{AB} , у потенциала (3.3.3) есть только один минимум и один максимум. Другие $(N-2)$ точки экстремума являются седловыми точками. В случае одинаковых масс кварков этот потенциал сводится к константе, равной натяжению струны (3.3.1).

Так как наша четырёхмерная теория находится в Хиггсовской фазе по отношению к скваркам, монополи 'т Хоофта–Полякова, которые были в теории в $\mathcal{N} = 2$ пределе малых μ , являются невылетающими за счёт неабелевых струн, и служат соединениями двух различных струн [7, 8, 33]. В эффективной теории на мировой поверхности неабелевой струны они видны как кинки, интерполирующие между разными вакуумами $CP(N-1)$ модели, см. также обзор [11].

В пределе больших μ присоединённые поля отщепляются. Поэтому из квазиклассики можно было бы ожидать, что в этом пределе монополи пропадают. Это действительно так в случае неравных масс кварков. Если разности масс кварков не равны нулю, появляется потенциал (3.3.3). У него нет нескольких локальных минимумов, и поэтому кинки (невылетающие монополи четырёхмерной теории) становятся нестабильными и исчезают.

Однако, в случае с кварками одинаковых масс, потенциал (3.3.3) отсутствует, и в бозонной $CP(N-1)$ модели есть кинки. Таким образом, в этом случае невылетающие монополи всё же выживают в пределе больших μ , как следует из Главы 2. Эти монополи могут быть представлены как кинки в эффективной $CP(N-1)$ модели на неабелевой струне, см. детальный обзор [11].

Результаты данной Главы были опубликованы в статьях [20, 21].

ГЛАВА 4

Теория на мировой поверхности в пределе больших N

В данной Главе будет представлено решение при больших N теории на мировой поверхности неабелевой струны в μ -деформированной СКХД, которая была выведена в Главе 2. Приближение больших N было впервые использовано Виттеном для того, чтобы решить как несуперсимметричную, так и $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричную двумерные $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели [26]. В частности, решение Виттена при больших N показывает, что дополнительное $U(1)$ калибровочное поле A_μ , вводимое для формулировки $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели, становится физическим. В $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели с $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрией есть N вырожденных вакуумов, как продиктовано индексом Виттена. Параметром порядка, различающим эти вакуумы, является вакуумное среднее скалярного суперпартнёра σ к калибровочному полю A_μ [26].

В несуперсимметричной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели эти вакуумы расщеплены и являются на самом деле квазивакуумами, причём их расщепления пропорциональны $1/N$. В теории имеется единственный истинный вакуум¹. Параметром порядка, различающим эти квазивакуумы, является величина постоянного электрического поля от калибровочного поля A_μ , которое является безмассовым в несуперсимметричном случае [26], см. также [49] и обзор [11].

В данной Главе приближение больших N будет использовано для изучения фазовой структуры теории на мировой поверхности неабелевой струны в μ -деформированной СКХД по отношению к параметру деформации μ и разностям масс кварков Δm . Мы обнаружим богатую фазовую картину, включающую в себя две фазы сильной связи и две хиггсовских фазы.

¹Ниже мы принимаем, что θ -угол равен нулю.

Фазы сильной связи возникают при малых Δt . Первая фаза сильной связи наблюдается при малых μ . Она качественно похожа на фазу с $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрией при $\mu = 0$. Хотя N вакуумов расщепляются и становятся квазивакуумами, параметром порядка всё ещё является вакуумное среднее поля σ . Во второй фазе сильной связи при больших μ квазивакуумы различаются значением постоянного электрического поля. Эта фаза качественно похожа на несуперсимметричную $\mathbb{CP}(N - 1)$ модель.

При больших Δt мы видим две хиггсовских фазы слабой связи. При малых μ N вакуумов, которые были в $\mathcal{N} = (2, 2)$ случае, расщепляются и становятся квазивакуумами. Тем не менее, в теории всё ещё остаются кинки, интерполирующие между ними. Но при увеличении μ выше некоторого критического значения эти квазивакуумы пропадают по одному, так что наблюдается каскад фазовых переходов. В конце концов, остаётся только один вакуум и никаких кинков.

С точки зрения четырёхмерной СКХД это интерпретируется следующим образом. При больших Δt и малых μ в теории есть монополи, которые являются невылетающими на счёт соединяющих их неабелевых струн. Но при увеличении μ эти монополи пропадают.

4.1 $\mathbb{CP}(N - 1)$ сигма модели: обзор

В этом разделе вводятся различные $\mathbb{CP}(N - 1)$ модели, которые будут рассматриваться в следующих разделах. Сперва рассматриваются несуперсимметричная и $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричная модели, которые уже изучались ранее, см. например [26, 40, 64, 65]. После этого будет введена основная модель, изучению которой посвящена данная работа, а именно μ -деформированная $\mathbb{CP}(N - 1)$ модель, являющаяся низкоэнергетической теорией на мировом листе неабелевой струны в μ -деформированной СКХД, рассмотренной в Главе 2.

4.1.1 Несуперсимметричная модель

При рассмотрении $\mathbb{CP}(N - 1)$ моделей оказывается полезным так называемая калибровочная формулировка [26]. В этом формализме $\mathbb{CP}(N - 1)$ модель задаётся в терминах N комплексных скалярных полей n^i , $i = 1, \dots, N$, вза-

имодельствующих с дополнительным $U(1)$ калибровочным полем A_μ . Функция Лагранжа при этом даётся следующим выражением:

$$\mathcal{L} = |\nabla_\mu n^i|^2 + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta_0) + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2, \quad (4.1.1)$$

где $\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu$. У полей σ и D нет кинетического члена, так что они тоже являются дополнительными полями. Дополнительные поля могут быть исключены при помощи соответствующих уравнений движения. В частности, уравнение движения для поля D приводит к условию

$$\bar{n}_i n^i = 2\beta_0, \quad (4.1.2)$$

которое вместе с калибровочной инвариантностью уменьшает число степеней свободы полей n^i до $2(N - 1)$.

Данная несуперсимметричная $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модель возникает как теория на мировом листе неабелевой струны в несуперсимметричной КХД-подобной теории, см. [49] и обзор [11]. Массы m_i есть просто кварковые массы четырёхмерной теории.

В данной Главе будет рассмотрен случай, когда массы распределены равномерно по кругу в комплексной плоскости,

$$m_k = m - \Delta m \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (4.1.3)$$

Здесь $m \in \mathbb{R}$ – среднее арифметическое масс, а параметр $\Delta m > 0$ оказывается истинным масштабом масс в данной модели. Можно заметить, что сдвигом σ всегда можно добавить одинаковую постоянную ко всем массам m_i . Это позволяет сократить среднюю массу m .

Затравочная константа связи β_0 становится в квантовой теории бегущей константой связи β . Данная теория обладает асимптотической свободой и масштабом Λ_{CP} , который определяется как

$$\Lambda_{CP}^2 = M_{uv}^2 \exp\left(-\frac{8\pi\beta_0}{N}\right), \quad (4.1.4)$$

где M_{uv} – масштаб ультрафиолетового обрезания.

Данная теория может находиться в различных фазах. Известно, что в безмассовом случае $\Delta m = 0$ эта несуперсимметричная $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модель находится в

режиме сильной связи, и вакуумное среднее полей n^i равно нулю: $\langle n^i \rangle = 0$. Эта теория может быть решена при помощи $1/N$ разложения [26]. Оказывается, что на квантовом уровне спонтанное нарушение глобальной $SU(N)$ (флейворной) симметрии, наблюдающееся на классическом уровне, пропадает. В физическом спектре нет безмассовых голдстоуновских бозонов. У полей n^i появляется масса порядка Λ_{CP} .

Более того, у составной степени свободы – исходно дополнительного фотонного поля A_μ – появляется кинетический член за счёт однопетлевых поправок, и это поле становится динамическим. Присутствие безмассового фотона приводит к дальнодействию в несуперсимметричной $CP(N-1)$ модели. Кулоновский потенциал в двумерии является линейной функцией, а именно

$$V(r) \sim \frac{\Lambda_{CP}^2}{N} r, \quad (4.1.5)$$

где r – расстояние между электрическими зарядами. Это приводит к кулоновской фазе, или фазе конфайнмента [26]. Электрические заряды оказываются невылетающими. Легчайшие электрические заряды – кванты поля n^i , которые в сильной связи становятся кинками [26]. Конфайнмент кинков означает, что в физическом спектре нет уединённых кинков. Они образуют связанные состояния – «мезоны», образованные парами кинк-антикинк.

Кинки имеют массы порядка Λ_{CP} , в то время как линейный потенциал между ними слабый и пропорционален $1/N$. Таким образом, кинк и антикинк в «мезоне» разнесены на довольно большое расстояние, вследствие чего внутри «мезона» формируется квазивакуум. Вследствие этого, помимо единственного основного состояния, в теории также имеется целое семейство квазивакуумов, расщепление между которыми ведёт себя как $\sim \Lambda_{CP}^2/N$. Параметром порядка, различающим между различными квазивакуумами, является величина постоянного электрического поля, или плотность топологического заряда

$$Q = \frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu = \frac{1}{8\pi\beta} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \bar{n}_i \partial^\nu n^i \quad (4.1.6)$$

Рис. 4.1 иллюстрирует конфайнмент n -полей.

Кинки интерполируют между соседними квазивакуумами. Они интерпретируются как невылетающие монополи четырёхмерной теории. Так как натяжения возбуждённых струн больше натяжения легчайшей струны, эти монополи

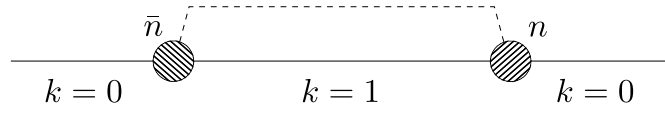


Рис. 4.1: Линейный конфайнмент n - \bar{n} пары. Сплошная линия представляет собой основное состояние (вакуум $k = 0$). Прерывистая линия показывает плотность энергии в первом квазивакууме.

испытывают, помимо конфайнмента в четырёхмерии, также и конфайнмент в двумерии: монополю всегда соединён с антимонополем, образуют конфигурацию, похожую на мезон [49, 66].

С другой стороны, на больших масштабах масс $\Delta m \gg \Lambda_{CP}$ константа связи мала и «заморожена» на масштабе Δm , так что применимо квазиклассическое рассмотрение. Вакуумное среднее одного из полей n^i становится ненулевым, и больше нет безмассового фотона с дальнодействием. Поэтому данную фазу называют обычно «хиггсовской», противопоставляя её кулоновской фазе (фазе конфайнмента) в сильной связи. Точнее можно сказать, что в этой фазе $CP(N-1)$ модель описывает хиггсовскую фазу при энергиях ниже массы фотона. По существу, эта хиггсовская фаза в слабой связи похожа на «классическую фазу», описываемую классическим лагранжианом (4.1.1).

В литературе показано, что при промежуточных масштабах масс $\Delta m \sim \Lambda_{CP}$ происходит фазовый переход между хиггсовской и кулоновской фазами, см. [49, 64, 67, 68].

4.1.2 $\mathcal{N} = (2, 2)$ модель

Суперсимметричное обобщение только что рассмотренной модели [26, 40] характеризуется наличием добавочных фермионных полей ξ^i , $i = 1, \dots, N$, являющихся суперпартнёрами скалярных полей n_i . Полный лагранжиан $\mathcal{N} = (2, 2)$

теории (в евклидовой формулировке) даётся выражением

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{e_0^2} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |\partial_\mu \sigma|^2 + \frac{1}{2} D^2 + \bar{\lambda} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda \right) + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta_0) \\
& + |\nabla_\mu n^i|^2 + \bar{\xi}_i i \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \xi^i + 2 \sum_i \left| \sigma - \frac{m_i}{\sqrt{2}} \right|^2 |n^i|^2 \\
& + i\sqrt{2} \sum_i \left(\sigma - \frac{m_i}{\sqrt{2}} \right) \bar{\xi}_{Ri} \xi_L^i - i\sqrt{2} \bar{n}_i (\lambda_R \xi_L^i - \lambda_L \xi_R^i) \\
& + i\sqrt{2} \sum_i \left(\bar{\sigma} - \frac{\bar{m}_i}{\sqrt{2}} \right) \bar{\xi}_{Li} \xi_R^i - i\sqrt{2} n^i (\bar{\lambda}_L \bar{\xi}_{Ri} - \bar{\lambda}_R \bar{\xi}_{Li}),
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

где m_i – т.н. «твистованные массы» (черта над \bar{m}_i , $\bar{\sigma}$ обозначают комплексное сопряжение). При этом подразумевается предел $e_0^2 \rightarrow \infty$. Кроме того, $\bar{\sigma}^\mu = \{1, i\sigma_3\}$. Фермионы ξ_L, ξ_R есть, соответственно, левые и правые компоненты поля ξ . В данной модели снова есть возможность добавить одинаковую постоянную ко всем массам m_i , сдвинув поле σ .

Калибровочное поле A_μ , комплексный скаляр σ , вещественный скаляр D и двухкомпонентный комплексный фермион λ образуют нединамический векторный супермультиплет. В частности, исключая дополнительные поля D и λ , приходим к условиям

$$\bar{n}_i n^i = 2\beta_0, \tag{4.1.8}$$

$$\bar{n}_i \xi^i = 0, \quad \bar{\xi}_i n^i = 0 \tag{4.1.9}$$

в пределе $e_0 \rightarrow \infty$.

Эта модель была получена как теория на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 2$ СКХД. Поля n_i параметризуют ориентационные модули неабелевой струны [5, 6, 7, 8]. Параметры m_i оказываются просто массами кварков четырёхмерной теории. Затравочная константа связи β_0 соотносится с калибровочной константой связи g^2 , взятой на масштабе массы калибровочного бозона $m_G \sim g\sqrt{\mu t}$ при помощи соотношения (см. например [11])

$$2\beta_0 = \frac{4\pi}{g^2(m_G)} = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{CP}}, \tag{4.1.10}$$

Для того, чтобы четырёхмерная теория находилась в слабой связи, предполагается, что $m_G \gg \Lambda_{CP}$.

Эта модель была решена Виттеном в приближении больших N в безмассовом случае [26]. Решение в пределе больших N и ненулевых массах показало, что данная модель может находиться в двух различных режимах в слабой и сильной связи [69]. При малых масштабах масс $\Delta m < \Lambda_{CP}$ теория находится в фазе сильной связи с нулевым вакуумным средним $\langle n^i \rangle = 0$ и динамическим фотонным полем (Виттеновская фаза). Однако теперь фотон обладает массой вследствие киральной аномалии. Дальнодействие отсутствует, равно как и отсутствует конфайнмент кинков.

Как в сильной, так и в слабой связи в теории есть N вырожденных вакуумных состояний, в соответствии с индексом Виттена. Они нумеруются вакуумным средним поля σ [69]. При $\Delta m < \Lambda_{CP}$ вакуумные средние даются формулой

$$\sqrt{2}\sigma = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \times \Lambda_{CP} \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (4.1.11)$$

Этот результат можно понять следующим образом. Киральная аномалия нарушает $U(1)$ R -симметрию, которая была в теории при нулевых массах, до Z_{2N} , которая затем спонтанно нарушается до Z_2 вакуумным средним поля σ (R заряд которого равен двум). В частности, из решения при больших N следует вакуумное среднее $\sqrt{2}|\sigma| = \Lambda_{CP}$. Z_{2N} симметрия гарантирует наличие N вакуумов, как показано на Рис. (4.2).

В пределе больших масс, расположенных на окружности (см. (4.1.3)), Z_{2N} симметрия остаётся ненарушенной. Это приводит к похожей структуре вакуумных средних поля σ при $\Delta m > \Lambda_{CP}$, а именно

$$\sqrt{2}\sigma = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \times \Delta m, \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (4.1.12)$$

Эти формулы демонстрируют фазовый переход при $\Delta m = \Lambda_{CP}$. Как следует из решения при больших N , выше этой точки модель находится в хиггсовской фазе. При этом одна из компонент поля n , например, нулевая компонента, развивает вакуумное среднее $\langle n^0 \rangle \neq 0$. Конфайнмент отсутствует в обеих фазах, в отличие от несуперсимметричного случая.

На самом деле, фазовый переход, обсуждавшийся выше, является следствием приближения больших N . При конечных N переход между двумя режимами теории гладкий. Это следует из точного суперпотенциала, который известен для $\mathcal{N} = (2, 2)$ $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели [40].

4.1.3 μ -деформированная $\mathbb{CP}(N - 1)$ модель

В этом разделе введена основная модель, рассматриваемая в данной работе – μ -деформированная $\mathbb{CP}(N - 1)$ модель. Эта модель возникает как теория на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 2$ СКХД, деформированной массой μ присоединённого поля. Она была выведена в Главе 2 в двух различных пределах – при малых и при больших значениях параметра деформации μ . Здесь и далее рассматривается случай, когда массы лежат на окружности (4.1.3), а параметр деформации принимает вещественные положительные значения, $\mu > 0$.

Первый эффект, описанный в Главе 2, заключается в том, что поля n_i , входящие в $\mathcal{N} = (2, 2)$ $\mathbb{CP}(N - 1)$ модель (4.1.7), после μ -деформации приобретают дополнительный потенциал, зависящий от разностей масс. Этот потенциал был найден в пределе малых μ в работе [50]. Вторым эффектом является то, что суперориентационные моды неабелевой струны приобретают массу. Другими словами, двумерные фермионы ξ^i (фермионные суперпартнёры полей n^i), безмассовые в суперсимметричной версии при $\mu = 0$, в случае малых μ приобретают массу $\lambda(\mu) \sim \mu$ [19]. При больших значениях параметра деформации они становятся тяжёлыми и отщепляются.

Можно составить лагранжиан деформированной $\mathbb{CP}(N - 1)$ модели, который бы описывал все эти эффекты:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \left| \nabla_\mu n^i \right|^2 + \bar{\xi}_i i \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \xi^i + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta) \\
& + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i0} |n^i|^2 \\
& + i \sum_i \left(\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu) \right) \bar{\xi}_{Ri} \xi_L^i - i\sqrt{2} \bar{n}_i (\lambda_R \xi_L^i - \lambda_L \xi_R^i) \\
& + i \sum_i \left(\sqrt{2}\bar{\sigma} - \bar{m}_i - \overline{\lambda(\mu)} \right) \bar{\xi}_{Li} \xi_R^i - i\sqrt{2} n^i (\bar{\lambda}_L \bar{\xi}_{Ri} - \bar{\lambda}_R \bar{\xi}_{Li}),
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

где $\Delta m_{i0} = m_i - m_0$; m_i , $i = 0, \dots, N$ – массы, причём масса m_0 имеет наименьшую вещественную часть.

Коэффициентные функции $v(\mu)$ и $\lambda(\mu)$ были выведены в Главе 2 на клас-

сическом уровне в пределах малых и больших значений μ :

$$v(\mu) = \begin{cases} \frac{4\pi\mu}{2\beta}, & \mu \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\beta} \frac{8\pi\mu}{\ln \frac{g^2\mu}{m}}, & \mu \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.1.14)$$

$$\lambda(\mu) = \begin{cases} \lambda_0 \frac{\mu}{2\beta}, & \mu \rightarrow 0, \\ \text{const } g\sqrt{\mu t} \sim m_G, & \mu \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.1.15)$$

Здесь g^2 – константа связи четырёхмерной теории. Численное значение константы λ_0 есть $\lambda_0 \approx 3.7$ [19]. Можно заметить, что хотя и возможно избавиться от средней массы t в выражении (4.1.13), сделав соответствующий сдвиг поля σ , параметр t всё равно входит неявно через параметры μ -деформированной $\text{CP}(N-1)$ модели (4.1.13), которые выражаются в терминах параметров четырёхмерной СКХД.

Эта модель интерполирует между суперсимметричной и несуперсимметричной моделями, которые были кратко описаны выше. В пределе $\mu \rightarrow 0$ суперсимметрия восстанавливается до $\mathcal{N} = (2, 2)$, и модель переходит в (4.1.7). При больших значениях параметра деформации фермионы можно исключить из действия, и теория переходит в чисто бозонную модель (4.1.1).

Основным подходом, применяющимся в данной работе для изучения этой модели на квантовом уровне, является $1/N$ разложение. Для гладкого предела больших N параметры модели должны варьироваться как

$$\begin{aligned} g^2 &\sim 1/N, & \beta &\sim N, & \mu &\sim N, \\ t &\sim 1, & v(\mu) &\sim 1, & \lambda(\mu) &\sim 1 \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Далее в данной Главе для описания четырёхмерной теории будут использоваться три независимых физических параметра. Первым из них является масса калибровочного бозона в четырёхмерии,

$$m_G^2 = 2g^2\mu t, \quad (4.1.17)$$

которая играет роль физического ультрафиолетового (УФ) масштаба обрезания $\text{CP}(N-1)$ модели на мировой поверхности неабелевой струны, см. [11]. Вторым параметром является вышеупомянутый масштаб разностей масс кварков

$(m_i - m_j) \sim \Delta m$. Третий параметр характеризует степень нарушения суперсимметрии: это физическая масса присоединённой материи

$$m_{\text{adj}} = g^2 \mu = \frac{\mu}{\frac{N}{8\pi^2} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}}} \equiv \tilde{\mu}. \quad (4.1.18)$$

Этот параметр будет использоваться как настоящий (физический) параметр деформации. Все эти величины ведут себя в пределе больших N как N^0 . Здесь, Λ_{4d} есть масштаб четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД.

Из этого следует, что средняя масса m не является независимой величиной. Она может быть выражена через другие как

$$m = \frac{m_G^2}{2\tilde{\mu}}. \quad (4.1.19)$$

На масштабе массы калибровочного бозона (4.1.17) двумерная константа связи при малых μ даётся формулой ([6, 7], ср. (4.1.10))

$$2\beta = \frac{4\pi}{g^2} = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}}. \quad (4.1.20)$$

При больших μ константа связи на мировой поверхности, нормированная на масштабе m_G , становится [19]

$$2\beta = \text{const} \frac{\mu}{m} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2 \mu}{m}}. \quad (4.1.21)$$

Будучи выраженной в терминах инвариантных параметров, эта формула приобретает вид

$$2\beta = \text{const} \frac{N}{\pi} \frac{\tilde{\mu}^2 \ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}^{N=1}}}{m_G^2 \ln^2 \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}}, \quad (4.1.22)$$

где учтено, что при больших $\tilde{\mu}$ четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД со своим масштабом $(\Lambda_{4d}^{N=1})^{2N} = \tilde{\mu}^N \Lambda_{4d}^N$.

В терминах независимых параметров, коэффициентные функции v и λ даются формулами

$$v(\tilde{\mu}) = \begin{cases} \tilde{\mu}, & \tilde{\mu} \rightarrow 0, \\ \frac{m_G^2}{\tilde{\mu}} \ln \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}, & \mu \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.1.23)$$

$$\lambda(\tilde{\mu}) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_0 \tilde{\mu}, & \tilde{\mu} \rightarrow 0, \\ m_G, & \tilde{\mu} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.1.24)$$

где $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0/4\pi \approx 0.3$.

Как уже было отмечено ранее, масса калибровочного бозона в четырёхмерии m_G играет роль УФ обрезания для теории на мировой поверхности. На масштабах ниже m_G рассматриваемая двумерная модель асимптотически свободна (ср. (4.1.4)) с

$$2\beta(E) = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{E}{\Lambda_{2d}} \quad (4.1.25)$$

на масштабе E . Это соотношение фиксирует значение масштаба двумерной теории Λ_{2d} в терминах параметров четырёхмерной теории. При малых $\tilde{\mu}$,

$$\Lambda_{2d}(\tilde{\mu} \rightarrow 0) = \Lambda_{4d}, \quad (4.1.26)$$

в то время как при больших значениях $\tilde{\mu}$

$$\Lambda_{2d} = \Lambda_{4d}^{\mathcal{N}=1} \exp\left(-\text{const} \frac{\tilde{\mu}^2}{m_G^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}}\right) \quad (4.1.27)$$

Можно заметить, что в пределе $\tilde{\mu} \rightarrow \infty$ масштаб (4.1.27) становится экспоненциально мал, и двумерная теория может находиться в режиме сильной связи только на чрезвычайно маленьких масштабах энергий. Ниже будет показано, что фазовый переход по параметру $\tilde{\mu}$ происходит при маленьких значениях $\tilde{\mu}$, когда масштаб Λ_{2d} близок к суперсимметричному значению Λ_{4d} . Так как отщепление фермионов происходит при очень больших $\tilde{\mu} \gg m_G$, для изучения этого фазового перехода можно пользоваться приближением малых $\tilde{\mu}$ в формулах (4.1.23) и (4.1.24).

В последующих разделах будут исследованы различные фазы и структура вакуума теории на мировой поверхности. Есть два основных параметра, которые можно варьировать – параметр нарушения суперсимметрии $\tilde{\mu}$ и масштаб масс Δm . Как уже было отмечено выше, рассматриваемая модель (4.1.13) обладает богатой картиной фаз на плоскости $(\Delta m, \tilde{\mu})$.

4.2 Эффективный потенциал в однопетлевом приближении

В этом разделе продолжено изучение модели (4.1.13). Строится решение в виде $1/N$ разложения. Как уже было отмечено ранее, $\mathcal{N} = (2, 2)$ и несуперсимметричная $\text{CP}(N-1)$ модели (в безмассовом случае) были решены Витте-ном в статье [26]. Этот метод был позднее обобщён на случай гетеротической

$\mathcal{N} = (0, 2)$ модели [24], а также на случай ненулевых масс [64, 69]. Анализ, представленный в данном разделе, по большей части повторяет и обобщает методы, использовавшиеся в перечисленных статьях.

4.2.1 Вывод эффективного потенциала

Начнём с вывода однопетлевого эффективного потенциала. Лагранжиан (4.1.13) хорошо подходит для этой цели, так как он квадратичен по динамическим полям n_i и ξ_i . Однако, не следует интегрировать по всем из них. Для этого имеются следующие причины.

Как было сказано в предыдущем разделе, модель (4.1.13) является, в определённом смысле, промежуточной между $\mathcal{N} = (2, 2)$ и несуперсимметричной $CP(N - 1)$ моделями, которые уже были изучены в литературе ранее. Поэтому можно использовать идеи и результаты, полученные при изучении этих моделей, для того чтобы лучше понять физику рассматриваемой здесь теории. Во-первых, можно ожидать, что эта теория может находиться по крайней мере в двух различных фазах – фазах сильной и слабой связи. Параметром порядка, различающим эти фазы, является вакуумное среднее полей n_i . В слабой связи (в т.н. хиггсовской фазе [64]) одно из полей n_i развивает ненулевое вакуумное среднее, $\langle n_{i_0} \rangle = 2\beta$. В режиме сильной связи (в т.н. кулоновской фазе) вакуумные средние полей n_i равны нулю.

Таким образом, разумно поступить следующим образом. Следует проинтегрировать по $N - 1$ полям n^i с $i \neq 0$ (и по соответствующим фермионам ξ_i). В итоге получится эффективное действие, являющееся функционалом от $n^0 \equiv n$, D и σ . Для отыскания вакуумных конфигураций следует минимизировать эффективное действие по отношению к n , D и σ .

Следует заметить, что хотя получающийся функционал зависит также от A_μ и фермионов $\xi_{L,R}^0$, $\lambda_{L,R}$, лоренц-инвариантность подразумевает что вакуумные средние этих полей равны нулю. Также, среди n^i в качестве поля с возможно ненулевым вакуумным средним мы выбираем именно компоненту n^0 потому, что соответствующая масса m_0 имеет минимальную вещественную часть (см. (4.1.3)). Как будет установлено ниже, $\langle n^0 \rangle \neq 0$ соответствует истинному вакуумному состоянию в хиггсовской фазе.

При интегрировании по полям n^i и ξ^i получаются следующие определители:

$$\frac{\prod_{i=1}^{N-1} \det \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right)}{\prod_{i=1}^{N-1} \det \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right)}, \quad (4.2.1)$$

откуда следует эффективный потенциал

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Следующий шаг – вычисление следов, входящих в эту формулу. При $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ суперсимметрия восстанавливается, и это выражение является хорошо определённым. Однако при ненулевых деформациях в нём появляются квадратичные расходимости, и требуется регуляризация. В данном случае удобнее всего воспользоваться регуляризацией Паули-Вилларса (схожая процедура была проведена в [70]). Для этого нужно ввести поля-регуляторы с массами b_a , f_a , $a = 1, 2$, тогда регуляризованный потенциал принимает вид

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\ & + \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} B_a \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + b_a^2 \right) \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right) \\ & - \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} F_a \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + f_a^2 \right) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

где коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{a=0}^2 B_a = -1, \quad \sum_{a=0}^2 B_a b_a^2 = -m_{\text{bos}}^2 \quad (4.2.4)$$

Из этих уравнений следует, что

$$B_1 = \frac{b_2^2 - m_{\text{bos}}^2}{b_1^2 - b_2^2}, \quad B_2 = -\frac{b_1^2 - m_{\text{bos}}^2}{b_1^2 - b_2^2} \quad (4.2.5)$$

Массы полей-регуляторов играют роль УФ обрезания. Схожие соотношения можно записать и для коэффициентов фермионных регуляторов.

Кроме того, следует должным образом отнормировать следы, вычтя вклад от тривиального фона $\text{Tr} \ln(-\partial_k^2)$ из бозонных и фермионных следов. При этом мы приходим к

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left[\left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \right. \\ & \quad \times \ln \left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\ & \quad \left. - \left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \frac{b_1^2 \ln b_1^2 - b_2^2 \ln b_2^2}{b_1^2 - b_2^2} \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left[|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \ln |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right. \\ & \quad \left. - |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \frac{f_1^2 \ln f_1^2 - f_2^2 \ln f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \right] \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Полученная формула является несколько сложной для анализа. Чтобы её упростить, можно рассмотреть предел [70]

$$b_1^2 = xM_{\text{uv}}^2, \quad b_2^2 = M_{\text{uv}}^2, \quad f_1^2 = xM_{\text{uv}}^2, \quad f_2^2 = M_{\text{uv}}^2, \quad x \rightarrow 1, \quad (4.2.7)$$

где M_{uv} – УФ обрезание. Далее, в разделе 4.1.3 была написана формула для затравочной константы связи

$$2\beta(M_{\text{uv}}) = \frac{N}{4\pi} \ln \frac{M_{\text{uv}}^2}{\Lambda^2}, \quad (4.2.8)$$

Здесь, $\Lambda \equiv \Lambda_{2d}$ есть масштаб рассматриваемой двумерной модели. С учётом этого соотношения получается итоговая формула для эффективного потенциа-

ла,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\text{eff}} = & (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} iD \left[1 - \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \right] \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left(v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\
& \quad \times \left[1 - \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{M_{\text{uv}}^2} \right] \\
& - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \left[1 - \ln \frac{|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2}{M_{\text{uv}}^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Можно заметить, что регуляризованный эффективный потенциал зависит от масштаба УФ обрезания M_{uv} . При этом нельзя произвести никакое вычитание, которое бы сократило эту зависимость. Для этого имеются свои причины. Во-первых, рассматриваемая $\tilde{\mu}$ -деформированная $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модель (4.1.13) является лишь низкоэнергетической теорией на мировой поверхности неабелевой струны, и УФ масштаб имеет чёткий физический смысл, а именно

$$M_{\text{uv}} = m_G, \tag{4.2.10}$$

где m_G – масса калибровочного бозона четырёхмерной теории. Кроме того, масса фермионов $\lambda(\mu)$ в (4.2.9) изменяется от нуля при $\tilde{\mu} = 0$ до $m_G = M_{\text{uv}}$ в пределе $\tilde{\mu} \rightarrow \infty$, см. (4.1.24). Поэтому M_{uv} на самом деле является физическим параметром данной модели, избавляться от которого вовсе не следует.

Ренормированная константа связи даётся формулой

$$2\beta_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \tag{4.2.11}$$

4.2.2 Вакуумные уравнения

Для того, чтобы найти вакуумные конфигурации, следует минимизировать эффективный потенциал (4.2.9). При варьировании по D получается уравнение

$$|n|^2 = 2\beta_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \tag{4.2.12}$$

Вариация по \bar{n} приводит к

$$(iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)n = 0 \quad (4.2.13)$$

Наконец, третье уравнение получается при минимизации по отношению к σ ,

$$\begin{aligned} -(\sqrt{2}\sigma - m_0)|n|^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} (\sqrt{2}\sigma - m_i) \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{m_G^2} \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} (\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)) \ln \frac{|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2}{m_G^2}, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

причём здесь и ниже УФ масштаб M_{uv} заменен на соответствующее физическое значение m_G .

Эти три уравнения составляют основной набор уравнений, которые предстоит исследовать. Кроме того, на вакуумных состояниях должно быть выполнено условие

$$\beta_{\text{ren}} \geq 0, \quad (4.2.15)$$

которое следует из очевидного соотношения $2\beta_{\text{ren}} = |n|^2 \geq 0$.

Из (4.2.12) и (4.2.13) непосредственно следует, обязательно выполнено одно из условий: или

$$n = \beta_{\text{ren}} = 0 \quad (4.2.16)$$

или же

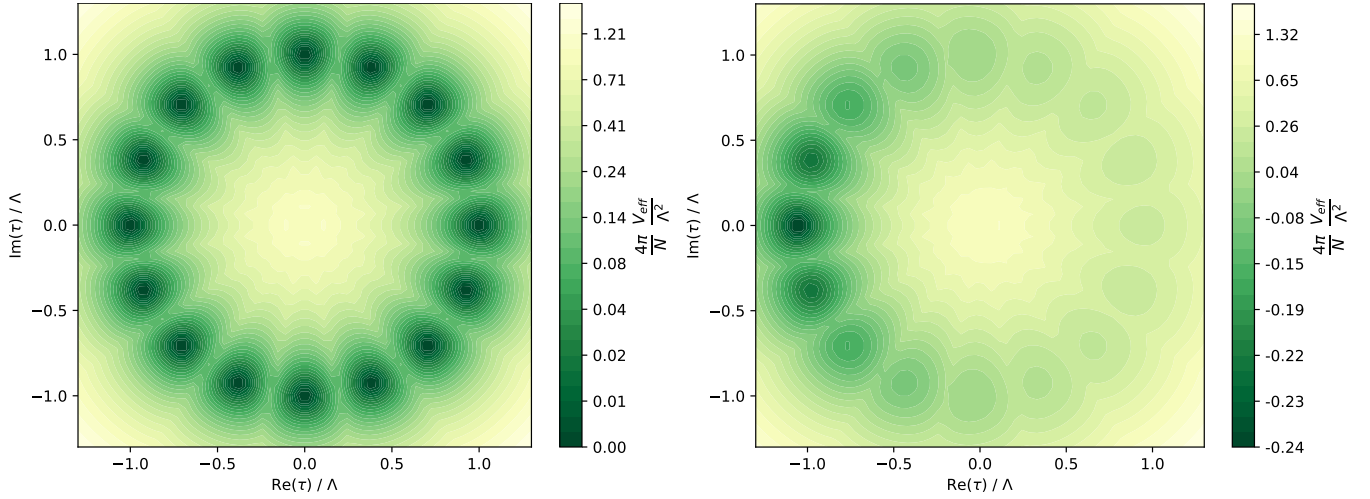
$$iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2 = 0. \quad (4.2.17)$$

Первый вариант соответствует режиму сильной связи, в котором вакуумные средние поля n вместе с ренормированной константой связи равны нулю. Вторая возможность реализуется в хиггсовском режиме, в котором n поле развивает ненулевое вакуумное среднее. Каждый из этих режимов будет подробно исследован в последующих разделах.

4.3 Режим сильной связи

В данном разделе будет продолжено изучение рассматриваемой модели в режиме сильной связи, который определён условием (4.2.16). Эта фаза возникает при масштабах масс $\Delta m \lesssim \Lambda$, см. например [22, 64, 69].

Раздел начинается с рассмотрения более простого случая $\Delta m = 0$. Поведение рассматриваемой модели различно при разных значениях параметра деформации: при промежуточных $\tilde{\mu}$ возникает фазовый переход, тогда как в пределе большой массы фермиона $\lambda \rightarrow m_G$ рассматриваемая теория (4.1.13) действительно переходит в несуперсимметричную $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модель (4.1.1), как и ожидалось априори. Эти результаты также будут обобщены на случай различных масс m_i , когда параметр Δm отличен от нуля.



(а) $\lambda = 0$, суперсимметричный случай, вы- (б) $\lambda > 0$, нарушенная суперсимметрия, рас-
рожденные вакуумы щепление квазивакуумов

Рис. 4.2: Эффективный потенциал (4.3.3) на комплексной плоскости $\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0$. Поле D исключено при помощи вакуумных уравнений.

4.3.1 Малые деформации

Начнём с рассмотрения простейшего случая одинаковых масс,

$$m_0 = m_1 = \dots = m_{N-1} \equiv m \quad (4.3.1)$$

При таком выборе слагаемые в потенциале, пропорциональные $v(\mu)$, обращаются в нуль, и единственной деформацией действия остаётся дополнительная масса фермиона λ . В этом разделе мы не будем явно выписывать зависимость этого параметра от $\tilde{\mu}$.

Чтобы сделать дальнейшие формулы менее громоздкими, обозначим

$$\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0 \quad (4.3.2)$$

Тогда эффективный потенциал можно записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{eff}} = & \frac{N}{4\pi} iD \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{N}{4\pi} |\tau|^2 \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{m_G^2} \right] \\ & - \frac{N}{4\pi} |\tau - \lambda(\mu)|^2 \left[1 - \ln \frac{|\tau - \lambda(\mu)|^2}{m_G^2} \right] + \Delta V(\arg \tau), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

где $\tau = |\tau| e^{i \arg \tau}$. В этом выражении было добавлено новое слагаемое $\Delta V(\arg \tau)$, отсутствовавшее в (4.2.9). Оно учитывает киральную аномалию, и возникает уже в $\mathcal{N} = (2, 2)$ $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели при $\tilde{\mu} = 0$. Как было показано Виттенем [26], из-за киральной аномалии фотон становится массивным, с массой равной 2Λ . Комплексный скаляр σ является суперпартнёром фотонного поля, и тоже приобретает массу 2Λ . В частности, фаза этого скаляра $\arg \tau$ становится массивной.

Этот эффект может быть учтён введением в (4.3.3) дополнительного потенциального слагаемого $\Delta V(\arg \tau)$. Оно строится следующим образом. При малых $\tilde{\mu}$ возможные вакуумные средние поля τ приблизительно равны соответствующим суперсимметричным значениям,

$$\tau_k^{\text{SUSY}} = -\Lambda \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N - 1, \quad (4.3.4)$$

ср. (4.1.11). Следует разделить полный угол 2π на N одинаковых интервалов с центрами в вакуумных значениях, $\arg \tau_k^{\text{SUSY}} = 2\pi k/N + \pi$, $k = 0, \dots, (N - 1)$, и определить потенциал $\Delta V(\arg \tau)$ как квадратичную функцию на каждом интервале. А именно,

$$\Delta V(\arg \tau) = \frac{N}{4\pi} \frac{m_{\arg \tau}^2}{2} (\arg \tau - \arg \tau_k^{\text{SUSY}})^2, \quad \frac{2\pi(k - \frac{1}{2})}{N} < \arg \tau - \pi < \frac{2\pi(k + \frac{1}{2})}{N}, \quad (4.3.5)$$

где $m_{\arg \tau}$ – масса поля $\arg \tau$. Вычисление этой массы приведено ниже, см. (4.3.33). При малых деформациях, она лишь немного отличается от Виттеновского результата [26]

$$m_{\arg \tau}^{\text{SUSY}} = 2\Lambda. \quad (4.3.6)$$

Без дополнительного слагаемого $\Delta V(\arg \tau)$ N дискретных вакуумов исчезают мгновенно с включением параметра $\tilde{\mu}$. Это происходит благодаря расщеплению квазивакуумов. Ниже будет показано, что с учётом $\Delta V(\arg \tau)$ квазивакуумы всё ещё остаются при малых $\tilde{\mu}$ и исчезают только при некотором конечном

критическом значении параметра деформации $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$, которое может быть отождествлено с точкой фазового перехода. Возможные поправки высших степеней к квадратичному потенциалу (4.3.5) подавлены в пределе больших N , т.к. ширина каждого интервала является малой величиной, пропорциональной $1/N$.

Энергия вакуума

При включении параметра деформации $\tilde{\mu}$ масса фермиона ξ^i , равная $\lambda(\tilde{\mu})$, становится отличной от нуля. Тем самым, как киральная симметрия, так и двумерная суперсимметрия оказываются нарушенными явным образом. В результате Z_N симметрия также нарушается, и вакуумные средние полей σ больше не лежат на одной окружности. Более того, при $\tilde{\mu} = 0$ в нашей модели имеются N вырожденных вакуумов (4.3.4). Когда параметр $\tilde{\mu}$ становится ненулевым, энергии соответствующих вакуумов расщепляются, и все они (кроме одного при $k = 0$) превращаются в квазивакуумы. Единственное настоящее вакуумное состояние соответствует $k = 0$, см. Рис. 4.2. Как уже обсуждалось в разделе 4.1.1, это приводит к конфайнменту кинков.

Оказывается, что существует два механизма, ответственных за расщепление вакуумных энергий. Один из них происходит из эффективного потенциала (4.3.3) и доминирует при малых $\tilde{\mu}$. Другой характерен для несуперсимметричной $\mathbb{CP}(N - 1)$ модели, см. раздел 4.1.1. Он происходит за счёт постоянного электрического поля кинков, интерполирующих между соседними квазивакуумами, и доминирует при больших $\tilde{\mu}$. В данном разделе будет изучен первый механизм, тогда как второй будет рассмотрен ниже.

Расщепление энергий при малых $\tilde{\mu}$ может быть выведено из разложения эффективного потенциала (4.3.3) по малой величине $\lambda(\mu)$:

$$\mathcal{V}_{\text{eff}} = \mathcal{V}_{\text{SUSY}} + \delta\mathcal{V}, \quad (4.3.7)$$

где $\mathcal{V}_{\text{SUSY}}$ – суперсимметричный эффективный потенциал, соответствующий $\lambda = 0$, тогда как

$$\delta\mathcal{V} \approx \frac{N}{4\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \tau \cdot \lambda \ln \frac{m_G^2}{|\tau|^2} \quad (4.3.8)$$

представляет собой $O(\lambda)$ деформацию. Подставляя невозмущённые вакуумные средние (4.3.4) в (4.3.8), можно получить энергии квазивакуумов. Как уже было

отмечено ранее, основное состояние (истинный вакуум) располагается в точке

$$\tau_0 = -\Lambda = \Lambda e^{i\pi}, \quad (4.3.9)$$

в то время как положение первого квазивакуума даётся формулой

$$\tau_1 = -\Lambda \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \approx -\Lambda - \Lambda \frac{2\pi i}{N} + \Lambda \frac{2\pi^2}{N^2} \quad (4.3.10)$$

Подставляя эти выражения в (4.3.8), получим искомое расщепление²

$$E_1 - E_0 = \frac{2\pi}{N} \lambda \Lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda} \quad (4.3.11)$$

Эта формула показывает, что теперь кинки, интерполирующие между этими двумя вакуумами, испытывают конфайнмент, в отличие от суперсимметричного случая.

Поправки к вакуумным средним

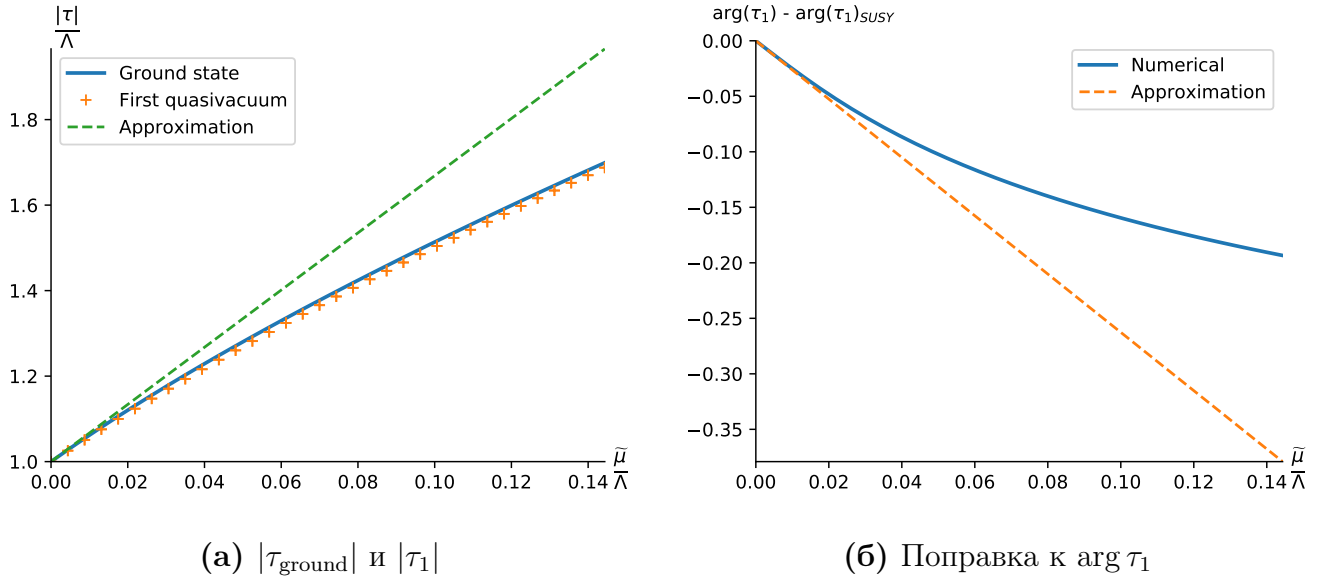


Рис. 4.3: Результаты численного расчёта минимумов τ_{ground} и τ_1 , полученных непосредственной минимизацией (4.3.3). На Рис. а, зелёной прерывистой линией показано приближённое значение (4.3.17), сплошной синей линией – численное значение $|\tau_{\text{ground}}|$, а $|\tau_1|$ показано красными знаками «+». На Рис. б изображен график приближённой формулы для поправки к $\arg \tau_1$ ((4.3.18), последнее слагаемое), а также численное значение этой величины.

²Формула (4.3.11) не учитывает поправки от аномалии следа тензора энергии-импульса, однако эта поправка является величиной следующего порядка малости по малому параметру $\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{M_{\text{UV}}}{\Lambda}$.

Выведем поправки к невозмущённым вакуумным средним (4.3.4). Минимизируя потенциал (4.3.3), получим:

$$2\beta_{\text{ren}} = \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} = 0 \Rightarrow iD + |\tau|^2 = \Lambda^2 \quad (4.3.12)$$

$$|\tau| \ln \frac{|\tau - \lambda(\tilde{\mu})|^2}{\Lambda^2} + \cos(\arg \tau) \lambda(\tilde{\mu}) \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} = 0 \quad (4.3.13)$$

$$- \sin(\arg \tau) \lambda |\tau| \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} + \frac{m_{\arg \tau}^2}{2} (\arg \tau - \arg \tau_k^{\text{SUSY}}) = 0 \quad (4.3.14)$$

В приближении малых $\tilde{\mu}$ легко найти приближённое решение:

$$|\tau| \approx \Lambda - \cos(\arg \tau_k^{\text{SUSY}}) \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.15)$$

$$\arg \tau \approx \arg \tau_k^{\text{SUSY}} + \sin(\arg \tau_k^{\text{SUSY}}) \frac{2\lambda\Lambda}{m_{\arg \tau}^2} \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.16)$$

В частности, вместо $\tau_0 = -\Lambda$ получим подправленное значение

$$\tau_{\text{ground}} \approx -\Lambda - \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.17)$$

тогда как для первого квазивакуума (4.3.10)

$$\begin{aligned} |\tau_1| &\approx |\tau_{\text{ground}}| \approx \Lambda + \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \\ \arg \tau_1 &\approx \underbrace{\left(\pi + \frac{2\pi}{N} \right)}_{\text{unperturbed}} - \frac{2\pi}{N} \frac{\lambda}{2\Lambda} \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

где была использована формула (4.3.6) для невозмущённой массы поля σ . Эти результаты согласуются с численным расчётом, см. Рис. 4.3.

Заметим, что при

$$\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} = 1 \quad (4.3.19)$$

из этих приближённых формул следует $\arg \tau_1 = \tau_{\text{ground}} = \pi$, и квазивакуум, соответствующий τ_1 , исчезает (сливается с основным состоянием). Это свидетельствует о том, что в окрестности точки (4.3.19) может произойти фазовый переход. Впоследствии мы увидим, что это действительно так, см. Раздел 4.3.3 ниже.

Квазивакуум с наибольшей энергией расположен в точке

$$\tau_{\text{high}} \approx \Lambda - \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.20)$$

Дальнейший анализ уравнения (4.3.13) показывает, что это решение пропадает при

$$\lambda = \frac{2\Lambda}{e \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}} \quad (4.3.21)$$

что согласуется с (4.3.22). Это свидетельствует о том, что в окрестности критического значения

$$\lambda_{\text{crit}} \sim \frac{\Lambda}{\ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}} \quad (4.3.22)$$

распадаются все квазивакуумы (ср. (4.3.19)).

4.3.2 Эффективное действие

Как уже было упомянуто, существует два механизма расщепления энергий квазивакуумов при ненулевых $\tilde{\mu}$, причём оба ведут к конфайнменту кинков. Один из них – появление поправок по $\tilde{\mu}$ в эффективном потенциале (4.3.3). За счёт этих поправок расщепляются значения эффективного потенциала в точках минимумов, что описывается формулой (4.3.11). Во втором механизме участвует постоянное электрическое поле кинков, интерполирующих между квазивакуумами. Фотон A_μ становится динамическим на квантовом уровне [26]. Ниже мы увидим, что при ненулевых значениях параметра деформации $\tilde{\mu}$ у фотона появляется безмассовая компонента. Вследствие этого возникает линейный кулоновский потенциал, хотя вклад электрического поля в энергию вакуума гораздо меньше чем (4.3.11). Однако при достаточно больших $\tilde{\mu}$ все $N - 1$ σ -квазивакуумы распадаются, и расщепление обуславливается исключительно электрическим полем. Это изменение характера расщепления идентифицируется здесь как фазовый переход. В соответствующей точке производная от $(E_1 - E_0)$ терпит разрыв.

Вывод эффективного действия

Рассмотрим эффективное действие для $\tilde{\mu}$ -деформированной $\text{CP}(N - 1)$ модели (4.1.13), которое может быть получено функциональным интегриро-

ванием по полям n^i и ξ^i в приближении больших N . Ослабляя условие того, что σ и D являются постоянными полями (это условие было использовано в Разделе 4.2), рассмотрим однопетлевое эффективное действие как функционал, зависящий от полей векторного супермультиплетта.

Рассмотрим окрестность истинного вакуума, для которой $\text{Im}\langle\sigma\rangle = 0$. Бозонная часть действия может быть записана в виде (в пространстве Минковского³)

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Im}\sigma|^2 + \frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Re}\sigma|^2 - V(\sigma) - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \text{Im}\sigma F^* \right\}, \quad (4.3.23)$$

где F^* – дуальный тензор (скаляр) напряжённости электрического поля,

$$F^* = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.3.24)$$

Такое эффективное действие впервые было представлено для $\mathcal{N} = (2, 2)$ и $\mathcal{N} = (0, 2)$ суперсимметричных $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ моделей в [24]. В представленной здесь работе это действие обобщено на $\tilde{\mu}$ -деформированную $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ модель (4.1.13). Потенциал $V(\sigma)$ может быть получен из (4.2.9) исключением поля D через соответствующие вакуумные уравнения.

Коэффициенты перед кинчленами для полей A_μ и σ конечны после учёта петлевых поправок, что отражает наблюдение Виттена о том, что эти поля становятся физическими [26]. Последнее слагаемое в (4.3.23) отвечает за $A_\mu - \sigma$ смешивание и является следствием киральной аномалии. Из-за этого смешивания, казалось бы безмассовые фотон и фаза поля σ приобретают массу (4.3.6) уже в невозмущённой теории при $\tilde{\mu} = 0$. Это слагаемое есть в действие также и после введения деформации.

Коэффициенты этого эффективного действия происходят из петлевых поправок. Рассмотрим низкие энергии, когда внешние импульсы малы. Всего имеем несколько вкладов. Перенормировка фотонной волновой функции происходит из диаграммы на Рис. 4.4а, а также из такой же диаграммы с бозонной

³В данном разделе теория рассматривается в пространстве-времени Минковского с метрикой $g^{\mu\nu} = \text{diag}\{+, -\}$ и тензором Леви-Чивиты с $\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{01} = +1$. В Приложении А более подробно обсуждаются обозначения и связь евклидовой формулировки и теории поля в пространстве Минковского.

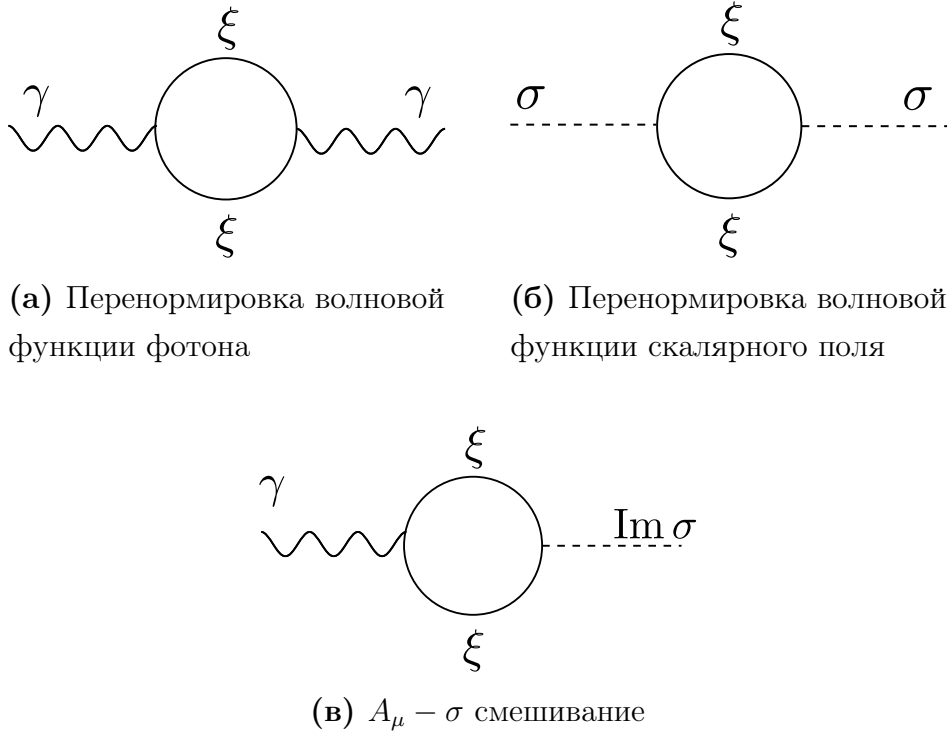


Рис. 4.4: Вклады в эффективное действие

петлѐй. Перенормировки волновых функций $\text{Re } \sigma$ и $\text{Im } \sigma$ даются диаграммами на Рис. 4.4б и соответствующей бозонной диаграммой. Наконец, смешивающее слагаемое происходит из диаграммы на Рис. 4.4в. Для масс (4.1.3) и вакуума с $\text{Im}\langle\sigma\rangle = 0$ нормировочные множители даются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{M_{\xi_k}^2 + 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} + \frac{2}{3} \frac{(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_k)^2}{m_{n_k}^4} \right], \\
 \frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3M_{\xi_k}^2 - 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} + \frac{2}{3} \frac{(\text{Im } m_k)^2}{m_{n_k}^4} \right], \\
 \frac{1}{e_\gamma^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{m_{n_k}^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{M_{\xi_k}^2} \right], \\
 b_{\gamma, \text{Im } \sigma} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\tilde{\mu})}{M_{\xi_k}^2}.
 \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Здесь, $M_{\xi_k}^2$ и $m_{n_k}^2$ – массы полей ξ_k и n_k соответственно:

$$\begin{aligned}
 M_{\xi_k}^2 &= |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\tilde{\mu})|^2 \\
 m_{n_k}^2 &= i\langle D \rangle + v(\tilde{\mu})\Delta m_k + |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k|^2
 \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

Детали этого расчёта приведены в Приложении В.

Следующий шаг – диагонализация массовой матрицы фотона и σ -поля в действии (4.3.23), см. следующий подраздел. Как уже было упомянуто, из такой диагонализации следует, что при введении деформации фотон приобретает безмассовую компоненту. Эта компонента ответственна за постоянное электрическое поле в квазивакуумах. Данное электрическое поле приводит ко второму механизму расщепления квазивакуумов; соответствующий вклад даётся формулой (4.3.36). Этот эффект мал при небольших $\tilde{\mu}$ и становится доминирующим, когда $\tilde{\mu}$ выше точки фазового перехода. В следующем разделе этот результат также будет получен из других соображений.

Масса фотона

Теперь диагоналируем массовую матрицу поля фотона и σ -поля в (4.3.23). Это даст нам массу фотона⁴. Для этого, запишем голые пропагаторы для полей $\text{Im } \sigma$ и A_μ , которые следуют непосредственно из (4.3.23) (в пространстве Минковского):

$$\begin{aligned} G_\gamma^0 &= -i e_\gamma^2 \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2} \\ G_{\text{Im } \sigma}^0 &= -\frac{i}{2} e_{\text{Im } \sigma}^2 \frac{1}{k^2 - \delta m_{\text{Im } \sigma}^2} \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

где принята калибровка Ландау, и $\delta m_{\text{Im } \sigma}^2$ – вклад в массу поля $\text{Im } \sigma$ из потенциала $V(\sigma)$ в (4.3.23). В окрестности истинного вакуума (4.3.17) имеем:

$$\delta m_{\text{Im } \sigma}^2 \approx 4\lambda\Lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda}. \quad (4.3.28)$$

При больших $\tilde{\mu}$, $\delta m_{\text{Im } \sigma}^2 \sim \lambda^2 \ln m_G/\Lambda$, см. раздел 4.3.4.

Рассмотрим пропагатор фотона. Итерируя вставки скаляра $\text{Im } \sigma$, как пока-

⁴Заметьте, что механизм возникновения массы в настоящей модели не является механизмом Хиггса. В частности, нет никакого безмассового голдстоуновского поля. Тем не менее, теория калибровочно инвариантна. Подробное объяснение этого обстоятельства приводится в Приложении Г.

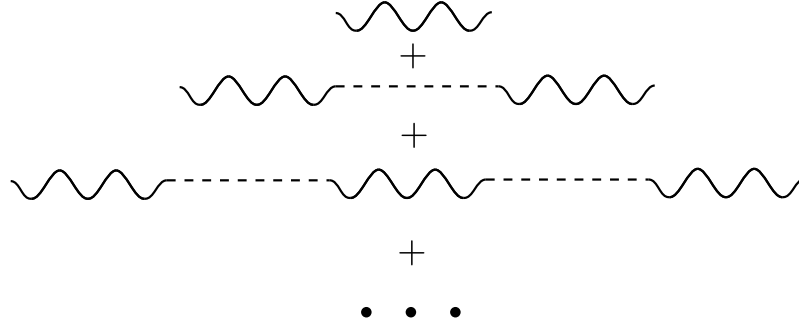


Рис. 4.5: Вклады в фотонный пропагатор

зано на Рис. 4.5, получим полный фотонный пропагатор,

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_\gamma &= G_\gamma^0 \frac{1}{1 - \frac{e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2}} \\
&= -i e_\gamma^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \frac{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2}{k^2 \left(k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2 - e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2 \right)} \\
&= -i e_\gamma^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \left(A \frac{1}{k^2} + (1 - A) \frac{1}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2 - e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

где коэффициент

$$A = \frac{\delta m_{\text{Im}\sigma}^2}{\delta m_{\text{Im}\sigma}^2 + e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2} \tag{4.3.30}$$

возрастает от 0 до 1 когда $\tilde{\mu}$ изменяется от нуля до бесконечности. Мы видим, что при ненулевых $\tilde{\mu}$ у фотона появляется безмассовая компонента. В суперсимметричном случае (при $\tilde{\mu}$ близких к нулю) коэффициент A зануляется, и остаётся только массивная компонента. Заметим, что число физических степеней свободы не меняется, т.к. у безмассового фотона в двумерии нет физических степеней свободы. При больших $\tilde{\mu}$ массивная компонента становится тяжёлой и отщепляется ($A \rightarrow 1$). При этом фотон полностью становится безмассовым, как в несуперсимметричной $\mathbb{CP}(N - 1)$ модели.

Подобное вычисление для пропагатора $\text{Im}\sigma$ даёт

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{\text{Im}\sigma} &= G_{\text{Im}\sigma}^0 \frac{1}{1 - \frac{e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2}} \\
&= -i e_{\text{Im}\sigma}^2 \frac{1}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2 - e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2}
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

Как и в работе [26], мы видим, что казалось бы безмассовая фаза поля σ при-

обретает массу

$$m_{\text{arg } \tau}^2 = \delta m_{\text{Im } \sigma}^2 + e_\gamma^2 e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma}^2. \quad (4.3.32)$$

Этот эффект учитывается дополнительным слагаемым (4.3.5) в эффективном потенциале (4.3.3). При $\tilde{\mu} = 0$ $\delta m_{\text{Im } \sigma}^2 = 0$ и масса фазы σ сводится к (4.3.6). Рассмотрим главную поправку при больших λ . Для основного состояния (4.3.17) при $\Delta m = 0$ имеем

$$\frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} \approx \frac{N}{4\pi\Lambda^2} \left(1 - 2\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right), \quad \frac{1}{e_\gamma^2} \approx \frac{N}{4\pi\Lambda^2} \left(1 - \frac{4}{3}\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right),$$

$$b_{\gamma, \text{Im } \sigma} \approx -\frac{N}{2\pi\Lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right),$$

и, поэтому,

$$m_{\text{arg } \tau}^2 \approx 4\Lambda^2 \left(1 + \frac{7}{3}\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right). \quad (4.3.33)$$

Рассмотрим подробнее пропагатор фотона (4.3.29) в пределе малых $\tilde{\mu}$. Имеем

$$A \approx \frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{M}{\Lambda}, \quad (4.3.34)$$

и для безмассовой части фотонного пропагатора:

$$\hat{G}_{\gamma, \text{massless}} = -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2} \frac{4\pi}{N} \lambda \Lambda \ln \frac{M}{\Lambda} \quad (4.3.35)$$

Из данной функции Грина можно рассчитать электрическое поле, которое испускается кинком с электрическим зарядом $+1$, и тем самым вычислить расщепление уровней энергий вакуумов как

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2e_\gamma^2} F_{01}^2 = \frac{2\pi}{N} \left(\lambda \ln \frac{M}{\Lambda} \right)^2 \quad (4.3.36)$$

Кулоновский потенциал и энергия вакуума

В этом разделе рассматривается формирование постоянного электрического поля в квазивакуумах. Это рассмотрение обобщает метод, разработанный Виттенем в [26] для $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричной $\text{CP}(N-1)$ модели.

Рассмотрим эффективное действие (4.3.23) с учётом пробных материальных зарядов,

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} \text{Im } \sigma F^* + j_\mu A^\mu \right\}, \quad (4.3.37)$$

Пусть ток материи представлен кинком, локализованным около точки $x = x_0$ с электрическим зарядом $+1$, тогда $j_\mu = (\delta(x - x_0), 0)$. Кроме того, $F^* = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа для фотонного поля может быть записано как

$$-\frac{1}{e_\gamma^2}\partial_x \mathcal{E} - \sqrt{2}b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \partial_x \text{Im}\sigma = -j_0, \quad (4.3.38)$$

где

$$\mathcal{E} = F_{01} \quad (4.3.39)$$

есть напряжённость электрического поля. Производя интегрирование по пространственной координате, получим

$$\frac{1}{e_\gamma^2}(\mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(-\infty)) + \sqrt{2}b_{\gamma, \text{Im}\sigma} (\text{Im}\sigma(\infty) - \text{Im}\sigma(-\infty)) = 1 \quad (4.3.40)$$

В суперсимметричном случае $\tilde{\mu} = 0$ фотон имеет массу, так что постоянное электрическое поле отсутствует: $\mathcal{E}(\infty) = \mathcal{E}(-\infty) = 0$. Поэтому

$$\sqrt{2}b_{\gamma, \text{Im}\sigma} (\text{Im}\sigma(\infty) - \text{Im}\sigma(-\infty)) = 1 \quad (4.3.41)$$

Так как

$$b_{\gamma, \text{Im}\sigma} = \frac{1}{2\pi} \frac{N}{\Lambda}, \quad (4.3.42)$$

(см. (4.3.25) для $\tilde{\mu} = 0$), имеем

$$\sqrt{2}(\text{Im}\sigma(\infty) - \text{Im}\sigma(-\infty)) = 2\pi \frac{\Lambda}{N}. \quad (4.3.43)$$

Если подставить сюда положение истинного вакуума $\tau(-\infty) = -\Lambda$, становится очевидно, что эта формула – лишь приближение для

$$\tau(\infty) = -\Lambda e^{\frac{2\pi i}{N}}, \quad (4.3.44)$$

т.е. для вакуумного среднего σ в первом квазивакууме, см. (4.3.10). Этот результат для случая $\mathcal{N} = (2, 2)$, давно полученный Виттенем [26], показывает наличие N вакуумов, а также кинков, интерполирующих между ними.

Обобщим этот результат на случай небольших деформаций. Рассмотрим уравнение (4.3.40) для кинка, интерполирующего между основным состоянием (4.3.17) на $x = -\infty$ и первым квазивакуумом (4.3.18) при $x = +\infty$. Полагая $\mathcal{E}(-\infty) = 0$, из (4.3.40) получим

$$\frac{1}{e_\gamma^2}\mathcal{E}(\infty) + \sqrt{2}b_{\gamma, \text{Im}\sigma} (\text{Im}\sigma(\infty) - \pi) = 1 \quad (4.3.45)$$

Используя (4.3.18) и (4.3.42) получим для напряжённости электрического поля

$$\mathcal{E}(\infty) = e_\gamma^2 \frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda}. \quad (4.3.46)$$

Отсюда видно, что теперь кинк всё-таки является источником постоянного электрического поля. Из этого получается вклад в расщепление между первым квазивакуумом и истинным вакуумом,

$$(E_1 - E_0)|_\varepsilon = \frac{1}{2e_\gamma^2} \mathcal{E}^2 = \frac{2\pi}{N} \left(\lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right)^2 \quad (4.3.47)$$

Этот результат совпадает с (4.3.36), полученным из диагонализации члена фотон- σ . При малых $\tilde{\mu}$, соответствующий вклад мал по сравнению с σ -расщеплением из (4.3.11).

4.3.3 Фазовый переход второго рода

Из всего вышесказанного следует, что вакуумная энергия (а точнее, расщепление между основным состоянием и первым квазивакуумом) происходит от двух вкладов, зависящих от параметра

$$\omega = \frac{\lambda(\tilde{\mu})}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \quad (4.3.48)$$

Первый вклад происходит от разницы значений эффективного потенциала между разными точками минимумов σ_i , см. (4.3.11). При включении параметра ω (т.е. для ненулевых значений параметра деформации $\tilde{\mu}$), этот вклад растёт сперва линейно по ω , а затем обрывается до нуля, когда соседний локальный минимум по σ пропадает.

Второй вклад обусловлен электрическим полем заряженных кинков, интерполирующих между квазивакуумами, см. (4.3.36) и (4.3.47). Этот вклад вначале растёт как ω^2 , а в точке, где ближайший квазимиимум по σ исчезает, электрическое поле «подпрыгивает»⁵ до значения, насыщающего (4.3.40).

Эти два вклада терпят разрыв при одном и том же значении параметра деформации, и это критическое значение и есть точка фазового перехода. Оно

⁵Это «подпрыгивание» не видно из рассмотрения пропагатора (4.3.36), т.к. это рассмотрение справедливо только пертурбативно вблизи истинного вакуума, и не учитывает наличие других квазивакуумов по σ .

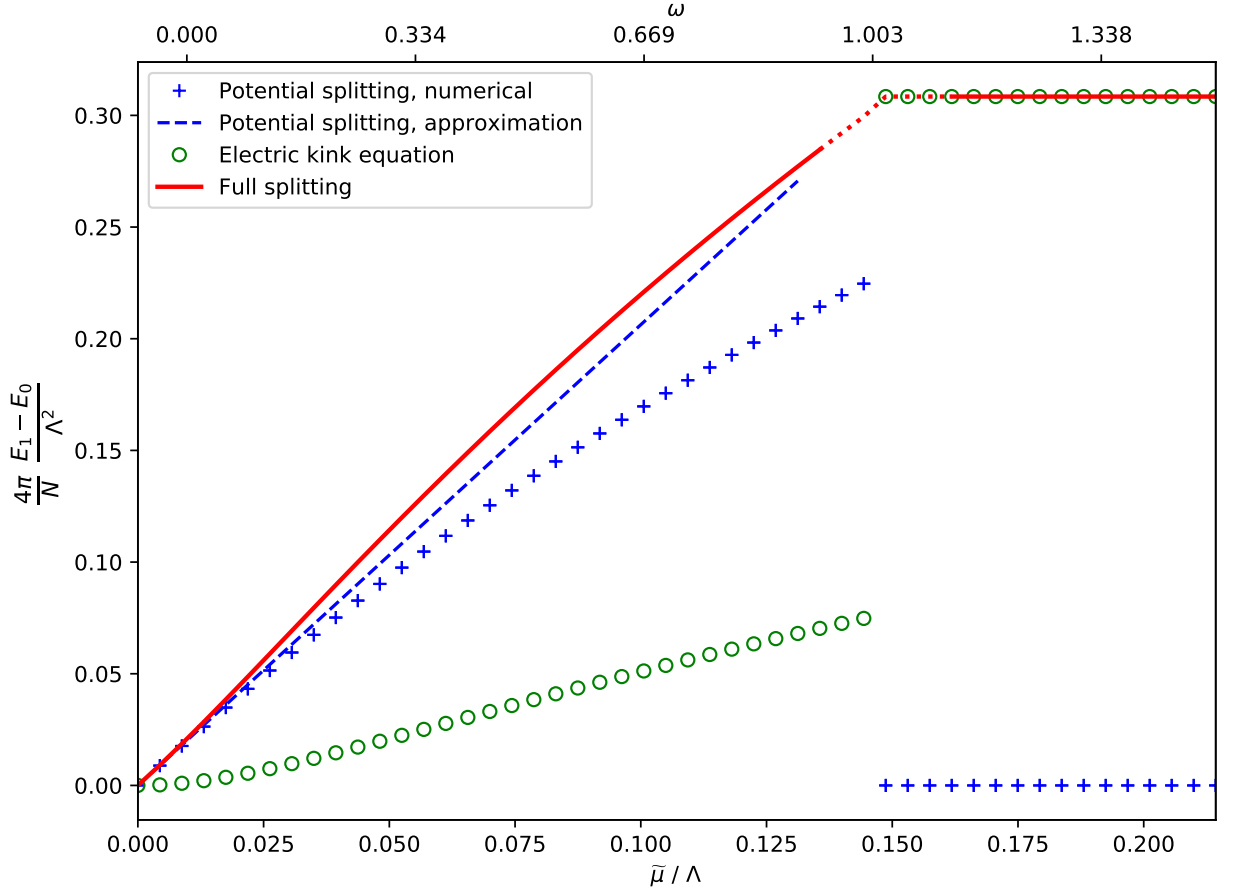


Рис. 4.6: Различные вклады в энергию вакуума. По вертикальной оси отложена величина расщепления $E_1 - E_0$. Значения параметра деформации $\tilde{\mu}$ отложены на нижней горизонтальной оси (в единицах Λ), а на верхней – параметр ω (4.3.48). Зелёными кружочками показан вклад от электрического поля (решение уравнения (4.3.40), которое ниже точки фазового перехода даётся формулой (4.3.47)), значками «+» показано расщепление от потенциала (4.3.3) (прерывистой синей линией показано приближение (4.3.11)). Сплошная красная линия обозначает сумму этих двух вкладов. Фазовый переход возникает при $\omega \approx 1$, где график полной энергии терпит излом. Данная модель не даёт точных результатов в окрестности точки фазового перехода, поэтому к этой приходится экстраполировать с двух сторон (красная прерывистая линия).

соответствует $\omega_c \sim 1$, т.е. (см. (4.3.22) и (4.3.19))

$$\lambda_{\text{crit}} = \lambda(\tilde{\mu}_{\text{crit}}) \sim \frac{\Lambda}{\ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}}. \quad (4.3.49)$$

Полная энергия вакуума даётся суммой этих двух вкладов, и из общих соображений можно ожидать, что она меняется непрерывно. Скорее, разрывной является её первая производная, и фазовый переход – второго рода. Численный расчёт это подтверждает, см. Рис. 4.6. В точке, где квазивакуум пропадает, эти

два вклада терпят разрывы, величины которых в точности компенсируют друг друга, так что полная энергия остаётся непрерывной. Однако, следует отметить, что точность используемого здесь метода недостаточна для изучения близкой окрестности фазового перехода. Дело в том, что формула для потенциала на $\arg \tau$ (4.3.5) справедлива только в окрестностях минимумов (4.3.4), и точная форма этого потенциала между двумя соседними минимумами неизвестна.

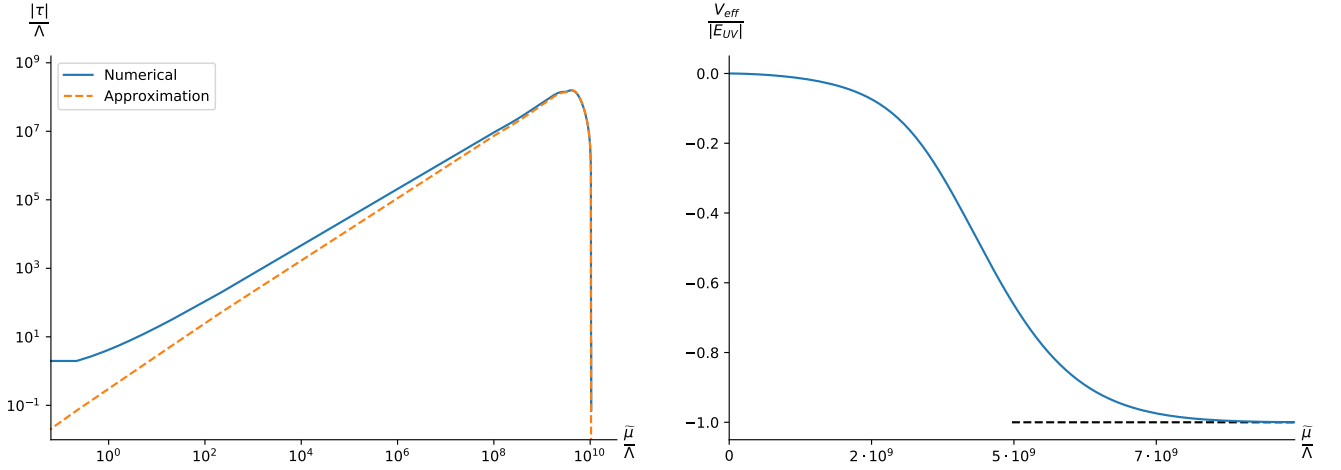
При малых деформациях, главным вкладом в энергию вакуума является расщепление по σ (4.3.11). После фазового перехода вакуумная энергия определяется исключительно электрическим полем кинка. Как обсуждалось в Разделе 4.1.1, именно электрическое поле ответственно за расщепление уровней энергий квазивакуумов в несуперсимметричной $CP(N-1)$ модели. Это согласуется с предыдущими результатами, т.к. при больших $\tilde{\mu}$ выше точки фазового перехода рассматриваемая теория становится несуперсимметричной $CP(N-1)$ моделью.

В заключение отметим, что параметр ω , имеющий значение для расщепления квазивакуумов, усилен большим логарифмом $\ln m_G/\Lambda \gg 1$. Поэтому фазовый переход происходит при $\tilde{\mu}_c \sim \lambda_c$ в соответствии с (4.3.49), что намного меньше $\tilde{\mu} \sim \Lambda$. Это – очень маленькие величины в сравнении с m_G , т.к. мы предполагаем, что $m_G \gg \Lambda$ для того, чтобы четырёхмерная теория находилась в режиме слабой связи. При таких значениях параметра деформации $\tilde{\mu}$ теория находится гораздо ниже масштаба, на котором отщепляются поля присоединённого представления в четырёхмерной теории, а именно $\tilde{\mu} \gg m_G$. В частности, масштаб Λ теории на мировой поверхности ближе к Λ_{4d} , а не к асимптотическому значению (4.1.27) для больших $\tilde{\mu}$.

4.3.4 Большие деформации

При увеличении параметра деформации $\tilde{\mu}$, масса фермиона λ приближается к УФ масштабу обрезания m_G , и можно ожидать, что фермионы становятся очень тяжёлыми и отщепляются, тем самым выходя из динамики. Таким образом, рассматриваемая теория должна перейти в несуперсимметричную $CP(N-1)$ модель (4.1.1). Вакуумное среднее поля τ должно стать равным нулю.

Это может быть проверено явно при помощи эффективного потенциала (4.3.3). Действительно, предположим, что $\tau \ll \lambda \sim m_G$. Раскладывая (4.3.3),



(а) Вакуумное среднее поля τ как функция параметра $\tilde{\mu}$, двойной логарифмический масштаб **(б)** Энергия вакуума как функция параметра $\tilde{\mu}$, логарифмический масштаб

Рис. 4.7: Результаты численного расчёта вакуумного среднего поля τ и энергии вакуума при больших деформациях $\lambda \gg \Lambda_{2d}$. На Рис. а изображено вакуумное среднее τ . Прерывистой линией показано приближённое значение (4.3.51), сплошной – точное значение. Из графика видно, что значение τ действительно равно нулю при $\lambda(\tilde{\mu}) = m_G$. На Рис. б изображена E_{vac} . Прерывистой линией показано асимптотическое значение E_{UV} (4.3.52). При расчёте было принято, что $m_G/\Lambda = 10^{10}$

получим

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{eff}} = & \frac{N}{4\pi} iD \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{N}{4\pi} |\tau|^2 \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{m_G^2} \right] \\ & - \frac{N}{4\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \tau \cdot \lambda \ln \frac{\lambda^2}{m_G^2} - \frac{N}{4\pi} \lambda^2 \left(1 - \ln \frac{\lambda^2}{m_G^2} \right) \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

Минимизируя этот потенциал, получим

$$\tau \approx -\lambda \frac{\ln(m_G/\lambda)}{\ln(m_G/\Lambda)}. \quad (4.3.51)$$

Это приближение оказывается довольно точным, см. Рис. 4.7а. Когда λ приближается к масштабу УФ обрезания m_G , вакуумное среднее τ стремится к нулю. Первое слагаемое в (4.3.50) превращается в эффективный потенциал несуперсимметричной $CP(N-1)$ модели, в то время как последнее слагаемое приводит к сдвигу вакуумной энергии. При $\lambda = m_G$, энергия вакуума становится равной

$$E_{\text{vac, UV}} = \frac{N}{4\pi} (\Lambda^2 - m_G^2). \quad (4.3.52)$$

Эти результаты находятся в согласии с теоремой Аппельквиста-Караццоне [71], согласно которой эффекты тяжёлых полей ограничиваются некоторой перенормировкой физических величин. Заметим, что т.к. суперсимметрия на мировой поверхности явно нарушена массой фермионов, значение вакуумной энергии не обязано быть неотрицательным.

Значение энергии вакуума, приведённое выше, является квантовой поправкой к классической формуле для натяжения неабелевой струны. Последнее было выведено в Главе 2 см. (2.3.17). С учётом (4.3.52) натяжение может быть записано как

$$T = \frac{2\pi}{\ln \frac{m_G^2}{m^2}} \frac{m_G^2}{g^2} + \frac{N}{4\pi} (\Lambda^2 - m_G^2), \quad (4.3.53)$$

Видно, что второе слагаемое здесь – лишь $O(g^2)$ поправка к классической формуле.

При промежуточных значениях массы λ данную модель удалось исследовать лишь численно. Результаты представлены на Рис. (4.7), где показана зависимость $\langle \sigma \rangle$ и E_{vac} от массы тяжёлых фермионов λ . Из них видно, что действительно, вакуумное среднее поля τ равно нулю при очень больших λ . Заметим также, что $\langle iD \rangle < 0$ в большом интервале значений λ , но это не ведёт к неустойчивостям, т.к. в соответствии с (4.3.12), масса поля n всегда положительна.

4.3.5 Случай ненулевых разностей масс

Результаты, полученные в предыдущих разделах, обобщаются на случай $\Delta m_{i0} \neq 0$. Рассмотрим массы на окружности (4.1.3), тогда радиус Δm будет играть роль масштаба масс рассматриваемой модели.

Если зафиксировать некоторое значение Δm и начать увеличивать $\tilde{\mu}$ (и, тем самым, $\lambda(\tilde{\mu})$), в рассматриваемой модели наблюдается схожее со случаем $\Delta m = 0$ поведение. При $\tilde{\mu} = 0$ суперсимметрия не нарушена, и имеются N вырожденных вакуумов. При ненулевых деформациях вырождение снимается, и в конечном итоге все квазивакуумы распадаются, что говорит о фазовом переходе. Набор точек фазового перехода представляет собой кривую на плоскости $(\mu, \Delta m)$, см. Рис. 4.8.

Качественно, ничего нового мы здесь не видим. Однако, если масштаб масс Δm достаточно велик, происходит фазовый переход из сильной связи в слабую

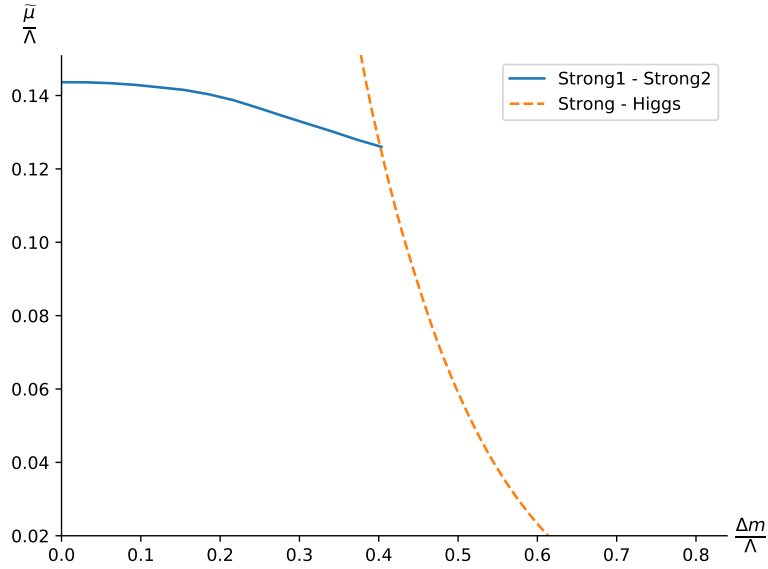


Рис. 4.8: Линия фазового перехода между двумя режимами сильной связи (сплошная линия). Прерывистая линия соответствует фазовому переходу между режимом сильной связи и хиггсовской фазой, см. Раздел 4.4.2. Результат численного расчёта при $N = 16$.

– т.н. «хиггсовскую» фазу. Это послужит предметом исследования следующего раздела.

4.4 Хиггсовская фаза

Когда масштаб масс Δm превышает некоторое критическое значение, рассматриваемая в данной работе теория находится в Хиггсовской фазе. Эта фаза характеризуется ненулевым вакуумным средним поля n . В режиме очень слабой связи для нахождения вакуумных конфигураций можно использовать классический лагранжиан (4.1.13),

$$n_0^2 = 2\beta, \quad \sqrt{2}\sigma = m_0, \quad iD = 0. \quad (4.4.1)$$

Классическая энергия вакуума равна нулю.

В суперсимметричном случае $\tilde{\mu} = 0$ эта формула для σ является точной (в пределе больших N). Более того, при очень больших Δm константа связи $1/\beta$ мала (заморожена на масштабе Δm), и квантовые поправки к классическому решению (4.4.1) малы.

Однако, при ненулевых $\tilde{\mu}$ и для $\Delta m \gtrsim \Lambda$, ситуация становится несколько более сложной, так как классическое приближение уже не является надёжным. Вообще говоря, у решения (4.4.1) есть поправки порядка $\Lambda/\Delta m$ и $\tilde{\mu}/\Lambda$. Для

исследования модели следует работать с квантовыми уравнениями (4.2.12) - (4.2.14), и большинство результатов, представленных в данном разделе, были получены из численного расчёта

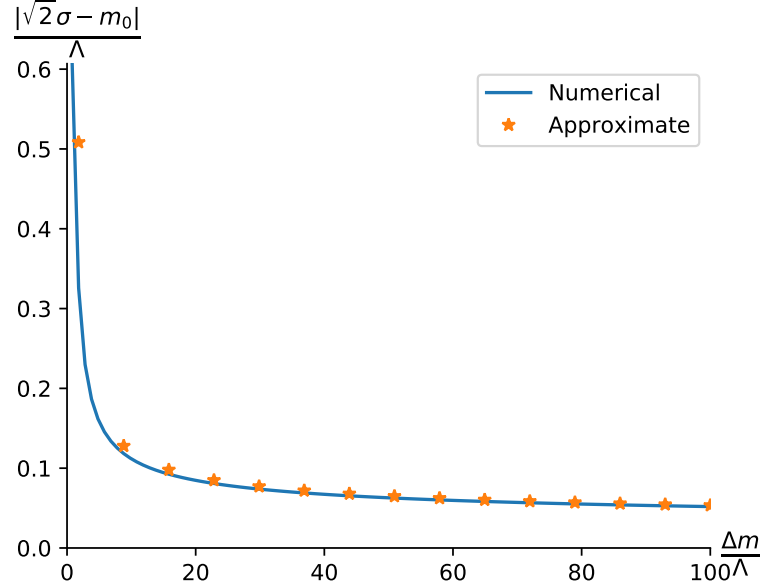


Рис. 4.9: Вакуумное среднее поля $\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0$ как функция масштаба масс Δm . Сплошной линией показано точное значение, звёздочками – приближённое (4.4.2). Здесь, $\tilde{\mu} = \Lambda$, $N = 16$. Можно видеть, что при увеличении Δm вакуумное среднее поля $\sqrt{2}\sigma$ приближается к классическому значению m_0 .

Во-первых, следует проверить, что однопетлевой потенциал (4.2.9) согласуется с классическим пределом. Рассмотрим предел больших $\Delta m \gg \Lambda$ при некотором фиксированном значении $\tilde{\mu}$. Раскладывая вакуумные уравнения (4.2.12) - (4.2.14) по степеням $\Lambda/\Delta m$, получим приближённое значение вакуумного среднего

$$\sqrt{2}\sigma - m_0 \approx -\lambda(\tilde{\mu}) \frac{\ln \frac{m_G}{\Delta m}}{\ln \frac{\Delta m}{\Lambda}}. \quad (4.4.2)$$

На Рис. 4.9 представлены результаты расчёта вакуумного среднего поля σ . Видно, что формула (4.4.2) является хорошим приближением (см. также Рис. 4.11a). При больших Δm действительно $\sqrt{2}\sigma \approx m_0$.

4.4.1 Квазивакуумы

Решение (4.4.1) описывает лишь одно из возможных вакуумных состояний хиггсовской фазы. В суперсимметричном случае $\tilde{\mu} = 0$ есть N вырожденных

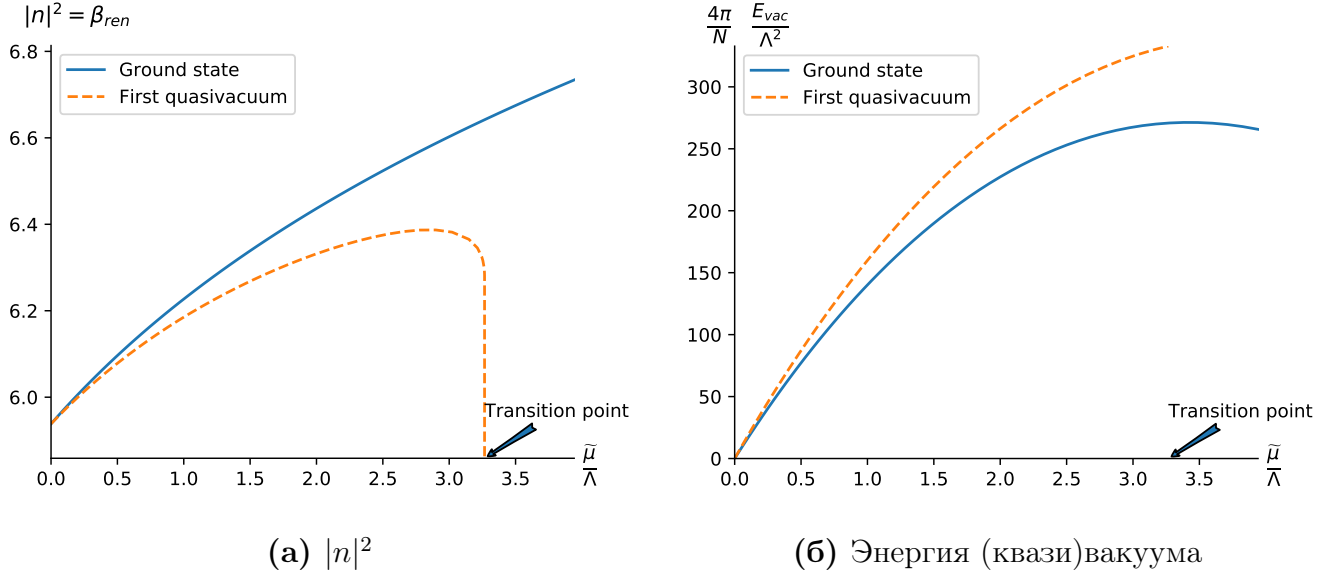


Рис. 4.10: Пример фазового перехода с исчезновением кинков. Сплошная синяя линия относится к истинному основному состоянию $i_0 = 0$, прерывистая оранжевая линия представляет первый квазивакуум $i_0 = 1$. Значение параметра деформации $\tilde{\mu}$ отложено на горизонтальной оси (в единицах Λ), положение точки фазового перехода показано стрелкой. Оба графика получены численным расчётом при $\Delta m/\Lambda = 10$, $N = 16$

вакуумов, как диктуется индексом Виттена. В [69] было показано, что при больших Δm теория находится в хиггсовской фазе, и вакуумное среднее одной из компонент N -плета n_i отлично от нуля. Соответствующие вакуумные средние равны

$$\langle \sqrt{2}\sigma \rangle = m_{i_0}, \quad \langle |n_{i_0}|^2 \rangle = 2\beta, \quad i_0 = 0, \dots, N-1 \quad (4.4.3)$$

Кроме того, между этими вакуумами интерполируют кинки.

При введении деформации $\tilde{\mu}$ эти вакуумы расщепляются, и при малых $\tilde{\mu}$ имеется одно истинное основное состояние (4.4.1) и $N-1$ квазивакуумов. Для начала, рассмотрим эту картину с точки зрения классического лагранжиана (4.1.13). Классический потенциал равняется

$$\mathcal{V}_{cl}(n, \sigma, D) = iD(\bar{n}_i n^i - 2\beta) + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i_0} |n^i|^2 \quad (4.4.4)$$

Выведем спектр масс в окрестности (квази)вакуума $\sqrt{2}\sigma = m_{i_0}$ для некоторого i_0 . В такой окрестности величины n^i , $i \neq i_0$ малы, в то время как

$$n_{i_0} = \sqrt{2\beta} + \delta n_{i_0} \quad (4.4.5)$$

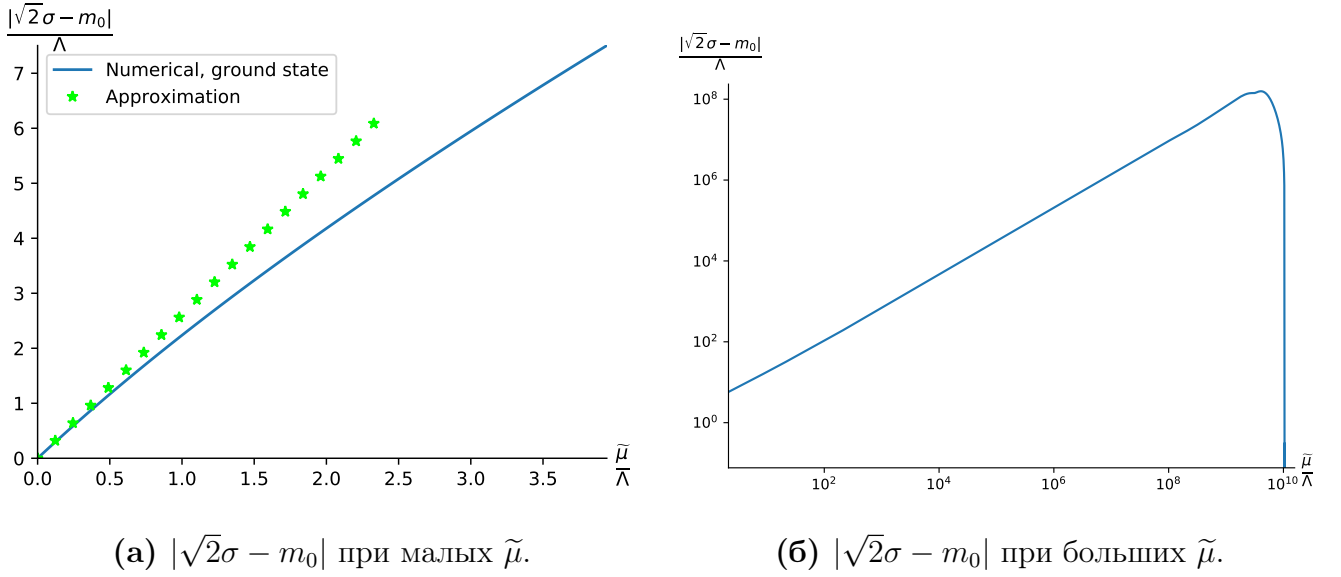


Рис. 4.11: Вакуумное среднее поля $\sqrt{2}\sigma - m_0$ на разных масштабах. На рис. а показаны малые $\tilde{\mu}$. Сплошная синяя линия представляет численный расчёт, зелёные звёздочки – приближённое значение (4.4.2). На Рис. б показано поведение при больших $\tilde{\mu}$ (в двойном логарифмическом масштабе). Можно видеть, что при $\tilde{\mu} \rightarrow m_G$ действительно выполняется $\sqrt{2}\langle\sigma\rangle \rightarrow m_0$. Фиксировано $\Delta m/\Lambda = 10$, $m_G/\Lambda = 10^{10}$, $N = 16$

Из D -условия получим

$$\delta n_{i_0} \approx -\frac{1}{2 \cdot 2\beta} \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 \quad (4.4.6)$$

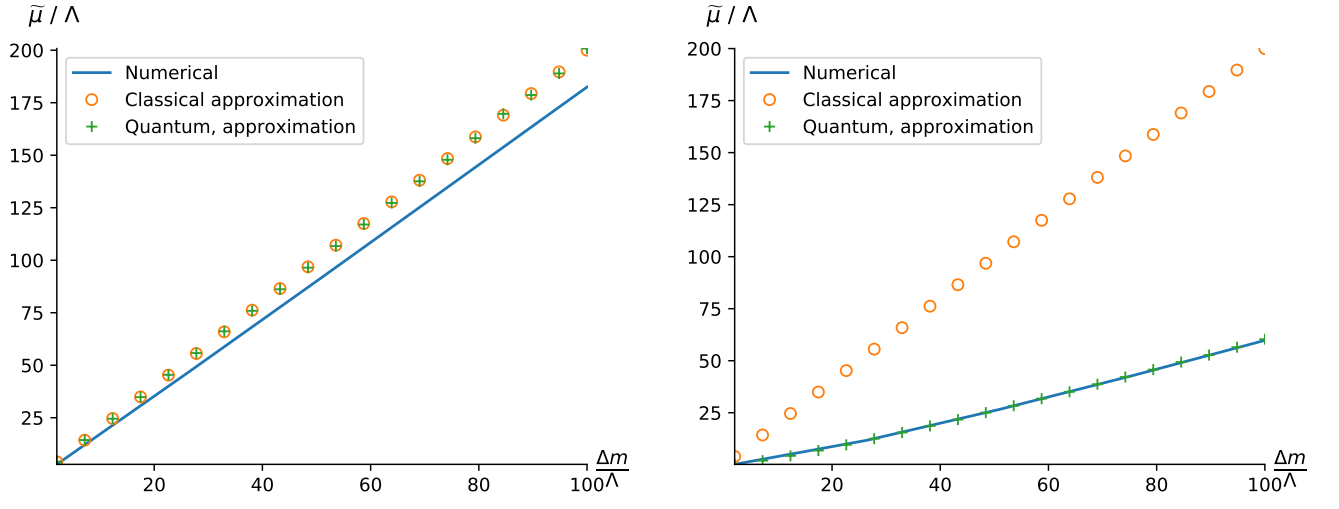
и потенциал (4.4.4) становится

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{cl}} &\approx \sum_{i \neq i_0} |m_i - m_{i_0}|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_{i \neq i_0} \text{Re}(m_i - m_0) |n^i|^2 \\ &\quad - v(\mu) \text{Re}(m_{i_0} - m_0) \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 \\ &= \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 [|m_i - m_{i_0}|^2 + v(\mu) \text{Re}(m_i - m_{i_0})] \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

так что масса возбуждения n^i равняется

$$M_i^2 = |m_i - m_{i_0}|^2 + v(\mu) \text{Re}(m_i - m_{i_0}) \quad (4.4.8)$$

Если бы M_i^2 обратился в ноль для некоторого i , это бы означало что рассматриваемый вакуум становится нестабильным. Это происходит для каждого $i_0 \neq 0$ при достаточно сильной деформации, т.к. в этом случае найдётся такой i что $\text{Re}(m_i - m_{i_0}) < 0$.



(а) Согласие с классической формулой (4.4.9), если положить $\lambda = 0$

(б) Наличие λ усиливает эффект

Рис. 4.12: Линия фазового перехода с исчезновением кинков. Δm по горизонтальной оси, $\tilde{\mu}$ по вертикальной. Сплошной синей линией показан результат численного расчёта кривой, на которой распадается последний квазивакуум, и выше которой остаётся только одно вакуумное состояние. Оранжевые кружки соответствуют классической формуле (4.4.9), зелёные знаки «+» – квантовому приближению (4.4.11). Рис. а показывает, что если искусственно «выключить» деформацию фермионной массы, $\tilde{\lambda}_0 = 0$, получается хорошее согласие с классической формулой (4.4.9). Однако, в действительности мы находимся в ситуации Рис. б, что лучше описывается формулой (4.4.11)

Для определённости, рассмотрим массы на окружности (4.1.3). Тогда при выборе вакуума $i_0 = 0$ имеем $\text{Re}(m_i - m_0) > 0$ для всех $i \neq 0$, и этот вакуум оказывается стабильным (что и ожидалось). Однако можно показать, что все квазивакуумы $0 < i_0 < N/2$ становятся абсолютно нестабильными, когда параметр деформации достигает критического значения

$$v(\mu_{\text{crit}, i_0}) = 2\Delta m \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi(i_0-1)}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi i_0}{N}\right)} \approx \frac{4\pi}{N} \frac{\Delta m}{\sin\left(\frac{2\pi i_0}{N}\right)} \quad (4.4.9)$$

На последнем шаге было использовано приближение больших N . Подобное утверждение справедливо и для квазивакуумов $N/2 < i_0 < N$, тогда как квазивакуум с номером $i_0 = N/2$ (для чётных N) распадается при $v(\mu_{\text{crit}, N/2}) = 2\Delta m$. Когда $\tilde{\mu}$ превосходит это критическое значение, все квазивакуумы уже распались. В теории остаётся единственное вакуумное состояние и никаких кинков.

Эти квазивакуумы можно увидеть и из однопетлевого потенциала. Следуя [69], вспомним, что при выводе эффективного потенциала (4.2.9) в качестве n^i -

поля с ненулевым вакуумным средним была выбрана компонента $n \equiv n_0$. Вместо этого, для изучения квазивакуумов в качестве поля с ненулевым вакуумным средним можно взять n_{i_0} , проинтегрировав по всем остальным компонентам n^i . Численный расчёт показывает, что в итоге получается эффективный потенциал, у которого есть минимум при небольших деформациях, но эти минимумы пропадают при больших $\tilde{\mu}$, см. Рис. 4.10. На графике 4.10а это соответствует тому, что $|n|^2$ резко спадает до нуля вблизи точки фазового перехода. Из Рис. 4.10б видно, что квазивакуумы вырождены при ненарушенной суперсимметрии, а также что энергия квазивакуума (с учётом квантовых поправок) действительно больше чем энергия основного состояния.

На Рис. 4.12 показана соответствующая кривая раздела фаз. Из графика видно, что классическая формула (4.4.9) работает только если искусственно положить $\lambda = 0$ в (4.1.13), но она совершенно не работает, когда масса фермиона получает добавку. Как видно из Рис. 4.12б, тяжёлые фермионы усиливают эффект распада квазивакуумов.

Можно вывести приближённую формулу, лучше описывающую кривую раздела фаз. Рассмотрим, к примеру, первый квазивакуум $i_0 = 1$. Тогда в выражении для β_{ren} (4.2.12) вместо Δm_{i_0} следует подставить $\Delta m_{i_1} = m_i - m_1$. Тогда $\text{Re } \Delta m_{01} < 0$, и в качестве точки фазового перехода можно приближённо принять точку, в которой $\beta_{\text{ren}} \rightarrow -\infty$, т.е.

$$iD + v(\tilde{\mu}) \text{Re } \Delta m_{01} + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2 = 0. \quad (4.4.10)$$

С помощью (4.1.23), (4.1.24), (4.4.2) и аналога (4.2.13) можно показать, что фазовый переход происходит при значении параметра деформации

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} \approx \frac{2 \Delta m}{1 + \tilde{\lambda}_0 \frac{\ln m_G / \Delta m}{\ln \Delta m / \Lambda}}. \quad (4.4.11)$$

При очень больших значениях $\tilde{\mu}$ не остаётся ни одного квазивакуума, кроме единственного основного состояния, и теория на мировой поверхности переходит в несуперсимметричную модель. В этом пределе вакуумное среднее поля $\sqrt{2}\sigma$ снова стремится к m_0 . Действительно, при больших $\tilde{\mu}$ мы можем найти приближённое решение вакуумных уравнений (4.2.12) - (4.2.14), и, используя

выражение для Λ (4.1.27), находим

$$\sqrt{2}\sigma - m_0 \sim \frac{\Delta m m_G^2}{\tilde{\mu}^2} \ln \frac{\tilde{\mu}}{\Delta m} \ln \frac{\tilde{\mu}}{m_G}. \quad (4.4.12)$$

Эта величина обращается в ноль при больших $\tilde{\mu}$. Численный расчёт подтверждает данный вывод, см. Рис. 4.11б.

4.4.2 Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи

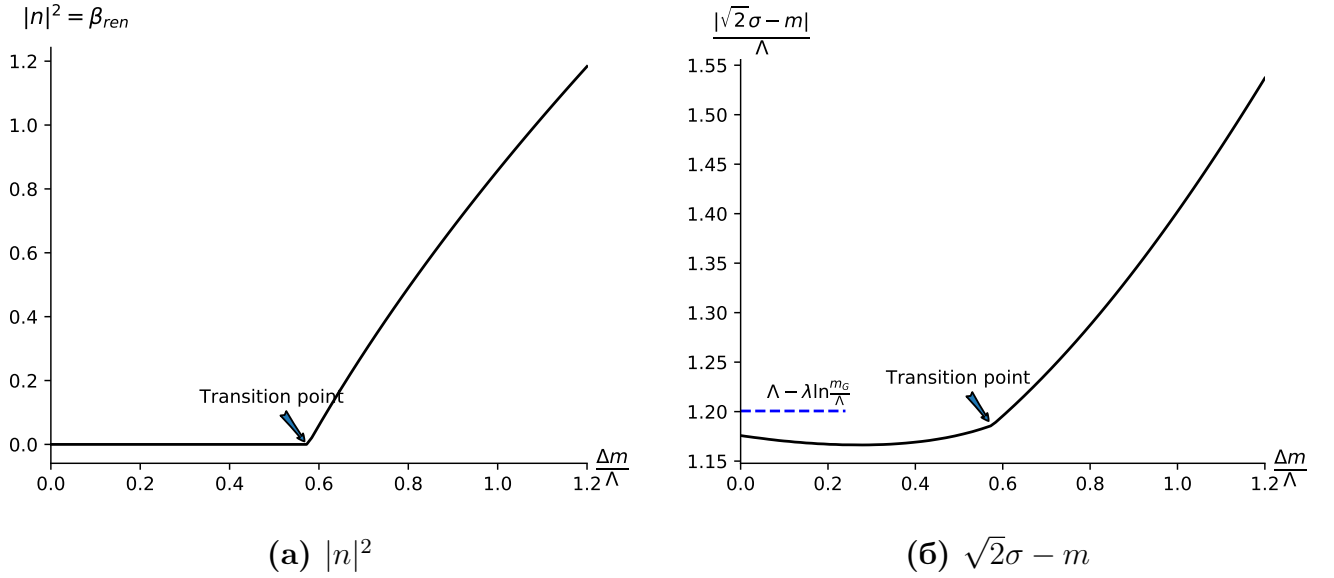


Рис. 4.13: Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи: вакуумные средние. На графиках показан пример фазового перехода при фиксированных $\tilde{\mu}/\Lambda = 0.03$, $N = 16$. Масштаб масс Δm отложен по горизонтальной оси. Положение точки фазового перехода отмечено стрелкой. На Рис. б, пунктирная линия показывает приближённое значение вакуумного среднего (4.3.17). Можно видеть, что характер фазового перехода качественно такой же, как и в чисто бозонной (4.1.1) и в суперсимметричной (4.1.7) моделях, см. [64, 69].

В работах [64, 69] было обнаружено, что как в несуперсимметричной $\mathcal{CP}(N-1)$ модели (4.1.1), так и в её суперсимметричной версии (4.1.7) фазовый переход между режимами сильной и слабой связи происходит при $\Delta m = \Lambda$. При больших Δm теория находится в области слабой связи (хиггсовская фаза), тогда как при малых Δm – в области сильной связи. Поэтому можно ожидать похожего поведения в рассматриваемой здесь деформированной модели (4.1.13).

Следуя [64, 69], отождествим кривую этого фазового перехода с кривой, на которой $|n_0^2| = 2\beta_{\text{ren}}$ становится отрицательным. Таким образом, мы ищем

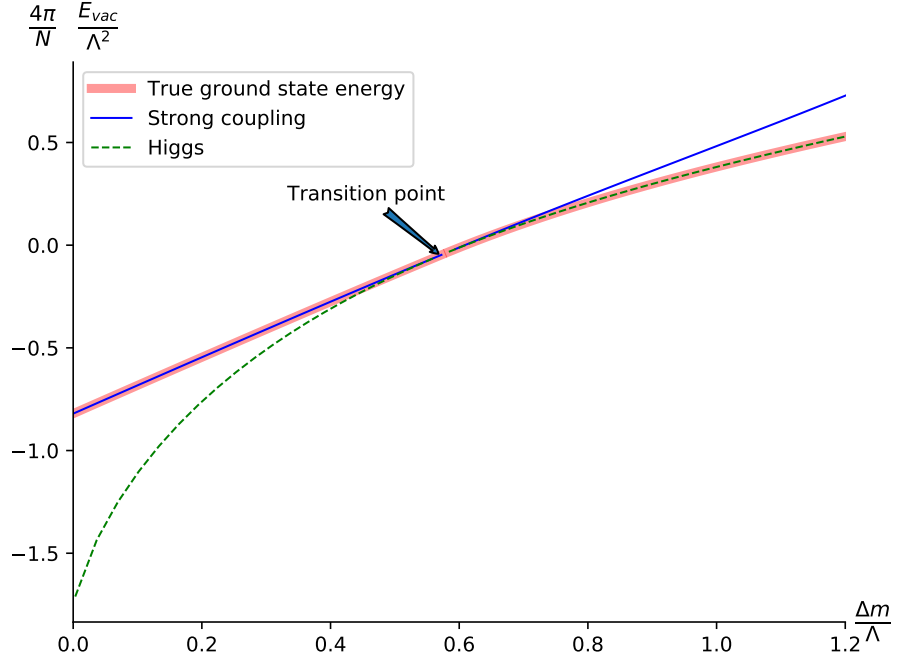


Рис. 4.14: Фазовый переход между режимами сильной и слабой связи: энергия вакуума. Жирной толстой линией показана величина вакуумной энергии основного состояния. Сплошная синяя линия справа от точки фазового перехода отвечает аналитическому продолжению вакуумной энергии сильной связи в хиггсовскую фазу. Обратно, прерывистая зелёная линия ниже точки фазового перехода показывает есть аналитическое продолжение вакуумной энергии хиггсовской фазы в режим сильной связи (и соответствует нефизическому «состоянию» с $|n|^2 < 0$). В точке фазового перехода эти кривые касаются друг друга, и $|n|^2 = 0$. Этот график качественно такой же, как и в чисто бозонной (4.1.1) и суперсимметричной (гетеротической) (4.1.7) моделях, см. [64, 69]. Фиксированы $\tilde{\mu}/\Lambda = 0.03$, $N = 16$

решение уравнения

$$\beta_{\text{ren}} = 0, \quad (4.4.13)$$

где β_{ren} находится по формуле (4.2.12).

В модели с $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрией при $\tilde{\mu} = 0$ фазовый переход происходит при $\Delta m = \Lambda$ [69]. Случай $\tilde{\mu} \neq 0$ несколько сложнее. Автору не удалось получить явное решение уравнений (4.2.12) - (4.2.14), но можно получить приближённые решения в областях малых и очень больших $\tilde{\mu}$.

Начнём с области $\tilde{\mu} \lesssim \Lambda$, и предположим что вакуумное среднее поля σ принимает только вещественные значения (это предположение верно для основного состояния). Тогда, используя (4.2.13) и тождество

$$\prod_{k=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) = \frac{N}{2^{N-1}}, \quad (4.4.14)$$

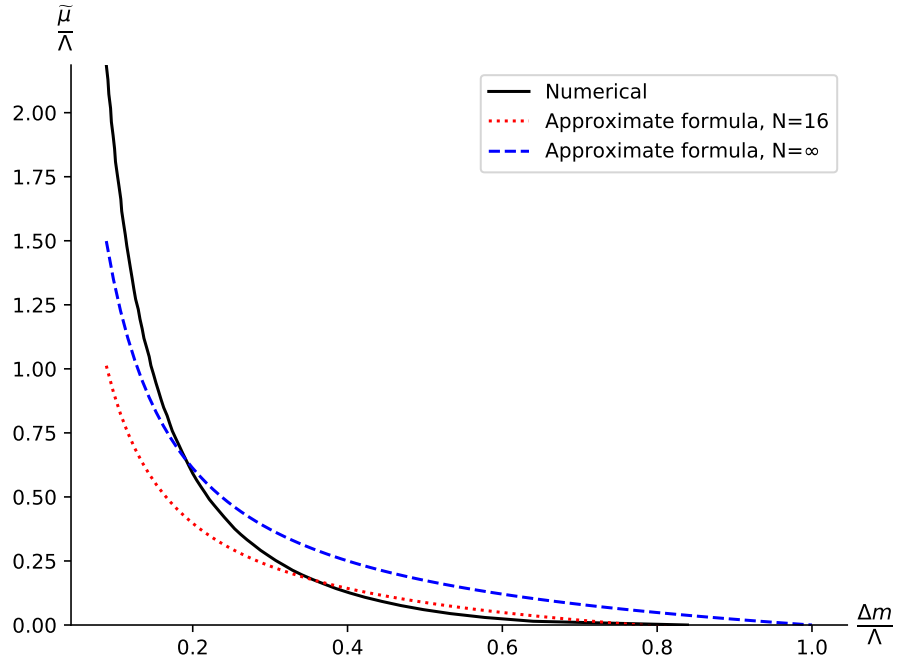


Рис. 4.15: Линия раздела фаз сильной и слабой связи. Δm по горизонтальной, $\tilde{\mu}$ по вертикальной оси. Сплошной чёрной линией показан результат численного расчёта при $N = 16$. Точечная красная линия соответствует приближённой формуле (4.4.17) с $N = 16$. Прерывистая синяя линия соответствует приближённой формуле (4.4.18) при $N \rightarrow \infty$

можно переписать (4.2.12) как

$$2\beta_{\text{ren}} = \frac{2(N-1)}{4\pi} \left(\ln \frac{\Delta m}{\Lambda} + \frac{1}{N-1} \ln N + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{v(\tilde{\mu}) - 2(\sqrt{2}\sigma - m_0)}{2\Delta m} \right) \right) \quad (4.4.15)$$

Приравнивая это выражение к нулю, получим

$$v(\tilde{\mu}) - 2(\sqrt{2}\sigma - m_0) = 2\Delta m \left(\left(\frac{\Lambda}{\Delta m} \right)^2 N^{-\frac{2}{N-1}} - 1 \right) \quad (4.4.16)$$

При малых деформациях можно пользоваться приближённой формулой $v(\tilde{\mu}) \approx \tilde{\mu}$, см. (4.1.23). Кроме того, в режиме сильной связи при фиксированном $\tilde{\mu}$ вакуумное среднее поля σ почти не зависит от Δm (это точно выполняется в суперсимметричной и в чисто бозонной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ моделях), так что для этого вакуумного среднего можно пользоваться формулой, выведенной для $\Delta m = 0$ (4.3.17), причём вплоть до точки фазового перехода. Тогда, из (4.4.16) можно

вывести уравнение линии раздела фаз:

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \frac{2 \frac{\Lambda^2}{\Delta m} N^{-\frac{2}{N-1}} - \Lambda - \Delta m}{1 + 2 \tilde{\lambda}_0 \ln \frac{m_G}{\Lambda}}, \quad (4.4.17)$$

или, устремляя $N \rightarrow \infty$,

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \frac{(2\Lambda + \Delta m)(\Lambda - \Delta m)}{\Delta m \left(1 + 2 \tilde{\lambda}_0 \ln \frac{m_G}{\Lambda}\right)} \quad (4.4.18)$$

Эти формулы являются хорошим приближением линии раздела фаз, см. Рис. 4.15. Можно видеть, что с ростом $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$ соответствующее значение Δm_{crit} монотонно убывает. Более того, сравнивая (4.4.17) и (4.4.18), можно проверить справедливость численного расчёта применительно к описанию предела больших N , т.к. численный расчёт проводится, разумеется, при конечном значении N ⁶.

В пределе больших деформаций $\tilde{\mu} \gg m_G$. Имеем:

$$2\beta_{\text{ren}} \sim \frac{N}{4\pi} \ln \frac{v(\mu_{\text{crit}}) \Delta m_{\text{crit}} + \Delta m_{\text{crit}}^2}{\Lambda_{2d}^2} = 0, \quad (4.4.19)$$

где величина Λ_{2d} экспоненциально мала, как следует из (4.1.22). Из (4.1.23) и (4.1.27) получаем, с точностью до логарифмического множителя,

$$\Delta m_{\text{crit}} \sim \frac{(\Lambda_{4d}^{N=1})^2 \tilde{\mu}_{\text{crit}}}{m_G^2} \exp\left(-\text{const} \frac{\tilde{\mu}_{\text{crit}}^2}{m_G^2}\right), \quad (4.4.20)$$

где было использовано, что $\Delta m \ll m$. Здесь мы снова видим, что Δm_{crit} монотонно убывает с ростом $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$.

4.5 Фазовая диаграмма двумерной теории

В данной Главе была изучена динамика μ -деформированной $\text{CP}(N-1)$ модели (4.1.13). Она возникает как теория на мировой поверхности неабелевой струны в $\mathcal{N} = 2$ СКХД, деформированной массовым членом μ материи в присоединённом представлении. Когда параметр $\tilde{\mu}$ мал, двумерная теория

⁶ В численных расчётах для данной Главы было взято значение $N = 16$. Грубая оценка точности из (4.4.17) и (4.4.18) даёт $1 - N^{-1/(N-1)} \approx 0.17$, т.е. качественно полученные здесь результаты справедливы.

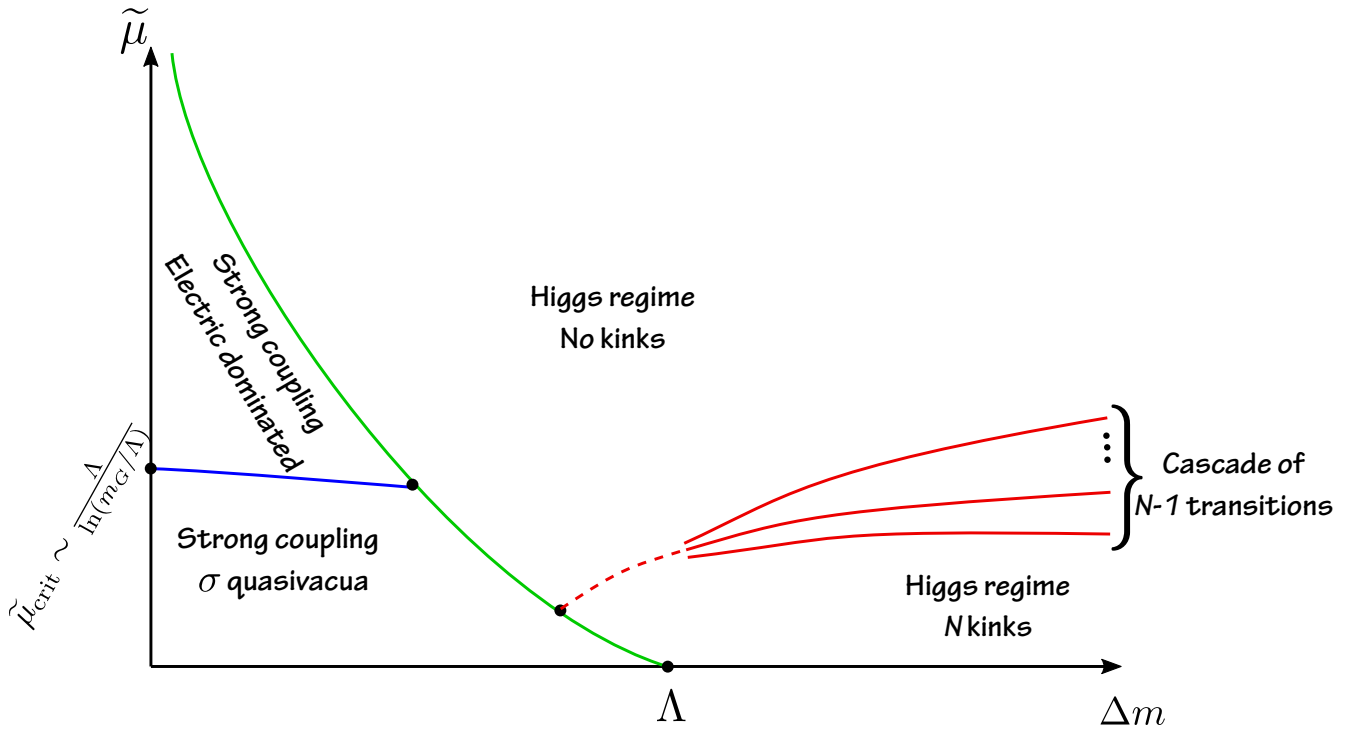


Рис. 4.16: Полная фазовая диаграмма (схематично). Δm по горизонтальной оси, $\tilde{\mu}$ по вертикальной. Каскад $N - 1$ кривых соответствует исчезновению кинков, интерполирующих между основным состоянием и квазивакуумами. Прерывистые линии проведены из общих соображений, т.к. $1/N$ разложение плохо работает в этой области.

есть $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметричная $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модель. При увеличении параметра деформации четырёхмерная теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД, в то время как теория на мировой поверхности становится несуперсимметричной μ -деформированной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ моделью. Это происходит из-за того, что фермионные нулевые моды $\mathcal{N} = 2$ четырёхмерной теории становятся массивными при включении $\tilde{\mu}$. Как следствие, при больших $\tilde{\mu}$ фермионы на мировой поверхности становятся массивными и отщепляются, оставляя за собой чисто бозонную $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модель. В данной Главе этот переход был изучен в приближении больших N .

В рассматриваемой μ -деформированной $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ модели есть два параметра, не зависящих от N . Таковыми являются параметр деформации $\tilde{\mu}$ (см. (4.1.18)) и масштаб масс Δm , причём последний есть не что иное как масштаб разностей масс кварков четырёхмерной теории. В данной работе была найдена нетривиальная фазовая диаграмма на плоскости параметров $(\Delta m, \tilde{\mu})$, с двумя фазами сильной связи и двумя хиггсовскими фазами, которые отделены друг от друга тремя кривыми раздела фаз с двумя трикритическими точками. Эта

фазовая диаграмма изображена на Рис. 4.16.

Когда параметр $\tilde{\mu}$ стремится к нулю, суперсимметрия не нарушена, и теория может находиться или в режиме сильной связи (при небольших Δm), или в хиггсовской фазе (большие Δm , слабая связь). В обеих фазах в теории имеется N вырожденных вакуумов, так что кинки, интерполирующие между этими вакуумами, не являются невылетающими. В фазе сильной связи при малых Δm поле фотона становится динамическим, и вследствие киральной аномалии приобретает массу.

При введении деформации бывшие вырожденные вакуумы расщепляются. В сильной связи остаётся одно истинное основное состояние, а также $N - 1$ квазивакуумов. У фотона появляется безмассовая компонента. Кинки становятся невылетающими. Когда параметр деформации $\tilde{\mu}$ мал, конфайнмент обусловлен разницей энергий σ -квазивакуумов. При увеличении $\tilde{\mu}$ в конечном счёте теория пересекает критическую линию, на которой исходные σ -квазивакуумы распадаются. После этого расщепление квазивакуумов и невылетание кинков возникают только из-за постоянного электрического поля.

В хиггсовской фазе при больших Δm теория находится в режиме слабой связи. Вакуумное среднее поля n становится ненулевым, поле фотона становится нефизическим и тяжёлым вследствие механизма Хиггса. Если параметр $\tilde{\mu}$ достаточно мал, то в теории имеются N квазивакуумов с разными энергиями, и кинки, интерполирующие между соседними квазивакуумами, являются невылетающими. Однако при увеличении параметра $\tilde{\mu}$ мы пересекаем критическую кривую, где (см. например (4.4.9)) квазивакуумы распадаются по одному, и в итоге в теории остаётся лишь одно основное состояние и никаких кинков.

В настоящей Главе было показано, что результаты, полученные в Главе 2 для μ -деформированной четырёхмерной теории, согласуются с рассмотрением низкоэнергетической теории на мировой поверхности. Можно перейти на мировой лист в $\mathcal{N} = 2$ теории и затем взять предел больших $\tilde{\mu}$, или же сперва ввести большую деформацию в четырёхмерном пространстве и только потом перейти к теории на мировой поверхности.

Другими словами, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 4d \mathcal{N} = 2 \text{ SQCD} & \xrightarrow{\text{worldsheet}} & 2d \mathcal{N} = (2, 2) \mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1) \\
 \text{large } \tilde{\mu} \downarrow & & \text{large } \tilde{\mu} \downarrow \\
 4d \mathcal{N} = 1 \text{ SQCD} & \xrightarrow{\text{worldsheet}} & 2d \mathcal{N} = 0 \mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)
 \end{array} \tag{4.5.1}$$

Однако стоит отметить, что при промежуточных значениях параметра деформации $\tilde{\mu}$ строгого вывода теории на мировой поверхности до сих пор нет.

Как уже обсуждалось ранее, кинки теории на мировой поверхности интерпретируются как невылетающие монополи четырёхмерной СКХД. Результаты, полученные в данной работе, показывают в частности, что при больших $\tilde{\mu}$, когда четырёхмерная теория в принципе становится $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной КХД, монополи остаются только в сильной связи при очень маленьких разностях масс, меньше критического значения (4.4.20). В хиггсовской фазе квазивакуумы распадаются при больших $\tilde{\mu}$, что означает следующее: невылетающие монополь и антимонаполь, образующие «мезон» на струне (см. Рис. 4.1), аннигилируют друг с другом и исчезают. Это подтверждает похожие выводы, сделанные в Главе 2.

Результаты данной Главы были опубликованы в статье [22] и в выпускной квалификационной работе [72].

ГЛАВА 5

Струнный «барион» в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной
КХД

В предыдущих Главах упор был сделан на $\mathcal{N} = 1$ предел в суперсимметричной КХД. В данной Главе будет сделан шаг в «поперечном» направлении. Мы рассмотрим $\mathcal{N} = 2$ теорию в другом специальном случае, когда β -функция четырёхмерной теории равна нулю, и теория становится суперконформной¹. Такая симметричная постановка задачи позволяет далеко продвинуться и даже рассчитать спектр адронов (или, по меньшей мере, часть спектра).

5.1 Краткий обзор

В 2015 году в работе [29] была обнаружена неабелев семилокальный вихрь-струна, теория на мировой поверхности которого является суперконформной и критической. Такая струна появляется в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД с калибровочной группой $U(N = 2)$, $N_f = 4$ флейворами кварков, и ФИ слагаемым [28]. Как следствие расширенной симметрии, калибровочная константа связи в четырёхмерии перенормируется только на уровне одной петли. При нашем подборе сектора материи ($N_f = 2N$) однопетлевая перенормировка сокращается. В теории не появляется никакого динамического масштаба² Λ .

Примерно то же происходит и в теории на мировой поверхности, которая описывается взвешенной $\mathbb{C}\mathbb{P}$ моделью ($\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(2, 2)$), см. Раздел 1.2 и ниже в данной главе. В этой теории β -функция зануляется, а полный центральный заряд Вирасоро является критическим [29]. Это происходит из-за того, что кроме четырёх трансляционных модулей, у рассматриваемой здесь неабелевой

¹На самом деле, она не совсем конформна; это будет объяснено ниже.

²Однако, конформная инвариантность четырёхмерной СКХД нарушена из-за слагаемого Файе-Илиополуса.

струны есть также шесть ориентационных и размерных модулей, описываемых $\mathbb{WCP}(2, 2)$ моделью. Вместе они образуют десятимерное таргет-пространство, необходимое для критичности суперструны. таргет-пространство такой сигма-модели есть $\mathbb{R}_4 \times Y_6$, то есть прямое произведение плоского четырёхмерного пространства и некомпактного многообразия Калаби-Яу Y_6 — конифолда.

Это позволяет применять теорию струн для рассмотрения спектра замкнутой струны и его интерпретации как спектра адронов в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД. Рассматриваемая здесь вихревая струна была отождествлена с теорией струн типа IIA [30].

Исследование такого вихря-струны с позиций теории струн, с упором на безмассовые состояния в четырёхмерии, было начато в работах [30, 31]. Позднее, низко лежащие массивные состояния струны были найдены при помощи «маленькой теории струн»³[73]. Вообще говоря, большинство безмассовых мод имеют ненормируемые волновые функции на конифолде Y_6 , то есть они не локализованы в четырёхмерии и, как следствие, не могут быть проинтерпретированы как динамические состояния в четырёхмерной СКХД. В частности, в физическом спектре не было найдено никаких безмассовых гравитонов или безмассовых векторных полей в четырёхмерии [30]. Однако, в самодуальной точке (в сильной связи) был найден один безмассовый BPS гипермультиплет в четырёхмерии. Он ассоциирован с деформацией комплексной структуры конифолда. Этот гипермультиплет был проинтерпретирован как составной «барион»⁴ в четырёхмерии.

Общая стратегия исследования такова. Мы рассмотрим BPS защищённый сектор модели на мировой поверхности — двумерной $\mathbb{WCP}(2, 2)$, начав со слабой связи $\beta \gg 1$, где β — обратная константа связи⁵. Такая процедура требует инфракрасной регуляризации. Для этого мы вводим массы кварков в четырёхмерной СКХД. Они соответствуют четырём твистованным массам в теории на мировой поверхности $\mathbb{WCP}(2, 2)$ (две для n^P и две для ρ^K), которые мы распо-

³Англ. Little String Theory.

⁴Если калибровочной группой является, как в нашем случае, группа $U(2)$, то в теории нет настоящих барионов. Тем не менее мы используем термин «барион» из-за конкретной величины заряда $Q_B(\text{барион}) = 2$ по отношению к глобальной ненарушенной группе $U(1)_B$, см. Раздел 5.2.

⁵Заметьте, что в Главах 2 и 4 двумерная константа связи обозначалась как 2β , а в данной главе она обозначается просто как β .

лагаем в некотором иерархическом порядке. Мы находим оба вакуума теории и изучаем различные кинки (в зеркальном представлении). Таким образом можно точно определить структуру вакуумов и спектр кинков, а значит, и кривые (стенки) нейтральной устойчивости (CMS)⁶. Затем мы переходим к сильной связи $\beta \sim 0$, внимательно исследуя CMS на комплексной плоскости константы связи β . На каждом шаге мы определяем, какие кинки распадаются на CMS и какие стабильны при пересечении кривых нейтральной устойчивости, и устанавливаем их связь с четырёхмерными монополями, используя так называемое 2D-4D соответствие, т.е. совпадение BPS спектров в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД и в двумерной теории на мировой поверхности струны, см. Раздел 1.3 и работы [7, 8, 32].

В области сильной связи мы используем 2D-4D соответствие для того, чтобы подтвердить, что наша четырёхмерная СКХД входит в так называемую фазу «вместо конфайнмента», которая уже была обнаружена ранее в асимптотически свободных версиях СКХД [74], см. также обзор [13]. Эта фаза качественно напоминает обычный конфайнмент в КХД: кварки и калибровочные бозоны, заэкранированные в слабой связи, при переходе в сильную связь превращаются в монополь-антимонопольные пары, сдерживаемые неабелевыми струнами. Они образуют монопольные мезоны и барионы, показанные на Рис. 1.1 (на стр. 20). Роль конститuentных кварков в этой фазе играют невылетающие монополи.

Разумеется, массы кварков нарушают глобальную симметрию

$$\mathrm{SU}(N)_{C+F} \times \mathrm{SU}(\tilde{N}) \times \mathrm{U}(1)_B, \quad (5.1.1)$$

сравн. (1.1.3). В самом конце мы устремим их к нулю, восстановив глобальные симметрии, а также конформную инвариантность теории на мировой поверхности струны. Более того, при введении ненулевых масс кварков хиггсовская ветка (1.1.4)

$$\dim \mathcal{H} = 4N\tilde{N}. \quad (5.1.2)$$

поднимается, и бифундаментальные кварки становятся массивными. Их массы равны $(m_P - m_K)$, $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. Отметим, что бифундаментальные кварки образуют короткие BPS мультиплеты, и их массы не подвержены квантовым поправкам, подробности см. в обзоре [11].

⁶От англ. *curves of the marginal stability*.

Основной результат, полученный в данной Главе — возникновение (при $\beta = 0$) короткого безмассового BPS «барионного» супермультиплетта с $U(1)_B$ -зарядом $Q_B = 2$. Таким образом мы демонстрируем, что безмассовое «барионное» состояние, которое было обнаружено ранее при помощи теории струн [30], наблюдается также в подходе теории струн. Судя по всему, это является первым примером такого рода.

Чтобы вывести этот результат, мы используем следующий подход. Известно, что $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модель при $\beta = 0$ имеет маргинальную деформацию, связанную с деформацией комплексной структуры конифолда. Так как $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модель является теорией на мировой поверхности неабелевой струны, естественно задать вопрос: каково происхождение этой деформации в четырёхмерной СКХД? Из общих соображений можно ожидать, что это мог бы быть какой-нибудь параметр четырёхмерной теории, например, константа связи. Другая возможность — некий модуль, вакуумное среднее некоторого динамического поля. Из 2D-4D соответствия (см. Раздел 1.3) можно показать, что в нашем случае реализуется вторая опция. При $\beta = 0$ в четырёхмерной СКХД открывается новая непертурбативная хиггсовская ветка. Модулем (параметром) на этой ветке является вакуумное среднее безмассового BPS бариона, образованного четырьмя монополями, соединёнными удерживающими струнами, как показано на Рис. 1.1b.

Таким образом, теорией, с которой мы будем работать в данной Главе, является $\mathbb{WCP}(2, 2)$ сигма-модель, см. Раздел 1.2. Она может быть определена как низкоэнергетический предел $U(1)$ калибровочной теории [40]. Бозонная часть действия записывается следующим образом⁷:

$$S = \int d^2x \left\{ |\nabla_\alpha n^P|^2 + |\tilde{\nabla}_\alpha \rho^K|^2 + \frac{1}{4e^2} F_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{e^2} |\partial_\alpha \sigma|^2 + 2 \left| \sigma + \frac{m_P}{\sqrt{2}} \right|^2 |n^P|^2 + 2 \left| \sigma + \frac{m_K}{\sqrt{2}} \right|^2 |\rho^K|^2 + \frac{e^2}{2} (|n^P|^2 - |\rho^K|^2 - r)^2 \right\}, \quad (5.1.3)$$

$$P = 1, 2, \quad K = 3, 4.$$

Здесь, m_A ($A = 1, \dots, 4$) — так называемые твистованные массы (они происходят из масс кварков в четырёхмерии), а r — обратная константа связи (ФИ

⁷Формула (5.1.3) и похожие ниже записаны в евклидовой формулировке.

слагаемое в двумерии). Отметим, что r — вещественная часть комплексифицированной константы связи введённой в формуле (1.2.5),

$$r = \operatorname{Re} \beta.$$

Из действия (5.1.3) для $\mathbb{WCP}(2, 2)$ очевидно, что эта модель самодуальна. Преобразование дуальности

$$\begin{aligned} \beta &\rightarrow \tilde{\beta} = -\beta \\ m_{1,2} &\rightarrow \tilde{m}_{1,2} = -m_{3,4} \\ m_{3,4} &\rightarrow \tilde{m}_{3,4} = -m_{1,2} \\ \sigma &\rightarrow \tilde{\sigma} = -\sigma \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

меняет ролями ориентационные модели n^P и модули размера струны ρ^K . Точка $\beta = 0$ является *самодуальной* точкой.

5.2 Безмассовый барион из теории струн

Теория $\mathbb{WCP}(2, 2)$ на мировой поверхности струны (5.1.3) является конформной, и благодаря $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрии метрика на её таргет-пространстве кэлерова. Конформная инвариантность модели также гарантирует, что эта метрика является риччи-плоской. Таким образом, таргет-пространство модели (5.1.3) является многообразием Калаби-Яу.

Более того, как уже рассказывалось в предыдущем разделе, в теории на мировой поверхности $\mathbb{WCP}(2, 2)$ имеется шесть вещественных бозонных степеней свободы. Её таргет-пространство, определяемое условием D -члена

$$|n^P|^2 - |\rho^K|^2 = \beta \tag{5.2.1}$$

и калибровочной инвариантностью, является шестимерным многообразием Калаби-Яу Y_6 , известным как конифолд, см. обзор [75]. Вместе с четырьмя трансляционными модулями неабелевой струны оно образует десятимерное таргет-пространство $\mathbb{R}^4 \times Y_6$, необходимое для критичности суперструны [29].

В данном Разделе мы кратко обсудим единственное безмассовое состояние в четырёхмерии, найденное при помощи теории струн, применённой к критическому неабелеву вихрю [30]. Это состояние соответствует деформации комплексной структуры конифолда. Как уже было упомянуто, волновые функции

всех остальных безмассовых мод струны ненормируемы на конифолде. В частности, четырёхмерный гравитон, связанный с постоянной волновой функцией на конифолде Y_6 , на самом деле отсутствует [30]. Этот результат совпадает с ожидаемым, так как мы начали с $\mathcal{N} = 2$ СКХД в плоском четырёхмерном пространстве без гравитации.

Можно построить $U(1)$ калибровочно инвариантные «мезонные» переменные

$$w^{PK} = n^P \rho^K. \quad (5.2.2)$$

Эти переменные подчиняются условию

$$\det w^{PK} = 0. \quad (5.2.3)$$

Уравнение (5.2.3) определяет конифолд Y_6 . Это многообразие обладает кэлеровой риччи-плоской метрикой и представляет собой некомпактное многообразие Калаби-Яу [40, 75, 76]. Оно представляет из себя конус, который может быть параметризован некомпактной радиальной координатой

$$\tilde{r}^2 = \text{Tr } \bar{w}w \quad (5.2.4)$$

и пятью углами, см. [76]. Его сечение при фиксированном \tilde{r} есть $S_2 \times S_3$.

При $\beta = 0$ у конифолда появляется коническая сингулярность, и обе сферы S_2 и S_3 могут сжиматься в точку. Эта сингулярность может быть сглажена двумя разными способами: деформацией кэлеровой формы или деформацией комплексной структуры. Первая возможность называется *разрешённым конифолдом*⁸ и сводится к введению ненулевого значения β в (5.2.1). Такое разрешение сохраняет кэлеровость и риччи-плоскость метрики. Если положить $\rho^K = 0$ в (5.1.3), получится $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ с таргет-пространством S_2 (радиуса $\sqrt{\beta}$). Разрешённый конифолд не имеет нормируемых нулевых мод. В частности, модуль β , который становится скалярным полем в четырёхмерном пространстве, характеризуется ненормируемой волновой функцией на Y_6 , и как следствие становится нединамическим [30].

При $\beta = 0$ есть другая возможность, а именно деформация комплексной структуры [75]. Эта деформация сохраняет кэлерову структуру и риччи-плос-

⁸Англ. resolved conifold.

кость конифолда, и обычно называется *деформированным конифолдом*⁹. Она определяется как деформация формулы (5.2.3), а именно

$$\det w^{PK} = b, \quad (5.2.5)$$

где b — комплексное число. Теперь S_3 не может сжиматься в точку, минимальный размер этой сферы определяется параметром b .

Модуль b становится комплексным скалярным полем в четырёхмерном пространстве. Эффективное действие для этого поля было вычислено в [30] с использованием явного вида метрики на деформированном конифолде [76, 77, 78],

$$S(b) = T \int d^4x |\partial_\mu b|^2 \log \frac{T^2 L^4}{|b|}, \quad (5.2.6)$$

где L — размер пространства \mathbb{R}^4 , введённый для ИК регуляризации логарифмически расходящейся нормы¹⁰ поля b .

Мы видим, что норма модуля b оказывается логарифмически расходящейся в ИК. Моды с логарифмически расходящейся нормой находятся на границе между нормируемыми и ненормируемыми модами. Обычно такие состояния рассматриваются как «локализованные». Мы тоже следуем этому правилу. Такая скалярная мода локализована около сингулярности конифолда в таком же смысле, как ориентационные и размерные нулевые моды локализованы на решении вихря-струны.

Безмассовое поле b может развивать вакуумное среднее. Таким образом, мы имеем новую хиггсовскую ветку в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД, которая развивается только при критическом значении четырёхмерной константы связи¹¹, соответствующем в двумерии $\beta = 0$.

В работе [30] безмассовое состояние b было проинтерпретировано как барион четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД. Проясним этот момент. Из формулы (5.2.5) видно, что комплексный параметр b (который становится четырёхмерным скалярным полем) является синглетом по отношению к обеим $SU(2)$ подгруппам

⁹Англ. deformed conifold.

¹⁰Инфракрасная регуляризация на конифолде \tilde{r}_{\max} переводится в размер L четырёхмерного пространства, так как переменные ρ в (5.2.4) интерпретируются как размеры вихря-струны, $\tilde{r}_{\max} \sim TL^2$.

¹¹Комплексифицированная константа связи в четырёхмерном пространстве в этой точке равна $\tau = 1$, см. Раздел 5.9.

глобальной группы на мировой поверхности¹²

$$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)_B, \quad (5.2.7)$$

сравн. (1.2.3). Из (1.2.4) следует, что поля n и ρ преобразуются по следующим представлениям:

$$n : (\mathbf{2}, \mathbf{1}, 0), \quad \rho : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1). \quad (5.2.8)$$

Что насчёт барионного заряда поля b ? Из (5.2.8) и (5.2.5) можно увидеть, что состояние b преобразуется как

$$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2). \quad (5.2.9)$$

В частности, его барионный заряд равен $Q_B(b) = 2$.

В заключение этого Раздела отметим, что в случае суперструны типа IIA комплексный скаляр, соответствующий деформациям комплексной структуры многообразия Калаби-Яу, входит в четырёхмерной теории в $\mathcal{N} = 2$ BPS гипермультиплет. Другие компоненты этого гипермультиплета могут быть восстановлены при помощи $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрии. В частности, в четырёхмерном $\mathcal{N} = 2$ гипермультиплете есть ещё один комплексный скаляр \tilde{b} с барионным зарядом $Q_B(\tilde{b}) = -2$. В струнном описании этот скаляр получается из десятимерной три-формы, см. обзор [79].

Далее в этой Главе мы будем изучать спектр BPS кинков в теории на мировой поверхности (5.1.3), используя при этом исключительно методы теории поля. Помимо других результатов, мы используем 2D-4D соответствие и подтвердим возникновение четырёхмерного бариона с квантовыми числами (5.2.9), а также наличие связанной с ним непертурбативной хиггсовской ветки при $\beta = 0$.

5.3 Масса кинка из точного суперпотенциала

Как было упомянуто выше, в $\mathrm{WCP}(2, 2)$ модели (5.1.3) есть BPS-насыщенные кинки, интерполирующие между разными вакуумами. В данном Разделе мы получим центральные заряды этих кинков и, соответственно, их массы.

¹²Которая изоморфна глобальной группе четырёхмерной теории (5.1.1).

5.3.1 Точный центральный заряд

Для рассматриваемой здесь модели можно получить точную формулу для центрального заряда BPS кинка. Это возможно потому, что для данной модели известен точный твистованный суперпотенциал, который получается после того, как супермультиплеты n и ρ отынтегрированы из действия. Этот суперпотенциал является обобщением [44, 45] суперпотенциала для $\mathbb{CP}(N-1)$ модели [32, 40, 42, 43] типа Венециано-Янkelовича [80]. В рассматриваемом случае $N_f = 2N = 4$ формула для суперпотенциала такая:

$$\mathcal{W}_{\text{WCP}}(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{P=1,2} (\sqrt{2}\sigma + m_P) \ln (\sqrt{2}\sigma + m_P) - \sum_{K=3,4} (\sqrt{2}\sigma + m_K) \ln (\sqrt{2}\sigma + m_K) + 2\pi \sqrt{2}\sigma \beta + \text{const} \right\}, \quad (5.3.1)$$

где одно и то же обозначение σ используется как для твистованного суперполя [40], так и для его низшей компоненты. Для изучения вакуумной структуры теории минимизируем этот суперпотенциал по отношению к σ , чтобы получить вакуумное уравнение двумерной теории

$$\prod_{P=1,2} (\sqrt{2}\sigma + m_P) = e^{-2\pi\beta} \cdot \prod_{K=3,4} (\sqrt{2}\sigma + m_K). \quad (5.3.2)$$

Инвариантность уравнения (5.3.2) при преобразовании дуальности (5.1.4) очевидна.

У вакуумного уравнения (5.3.2) есть два корня (вакуумные средние) $\sigma_{1,2}$, что означает наличие вообще говоря двух вырожденных вакуумов в нашей теории. Поэтому есть и BPS кинки, интерполирующие между этими двумя вакуумами. Их массы равны абсолютной величине центрального заряда,

$$M_{\text{BPS}} = |Z|. \quad (5.3.3)$$

Центральный заряд равен подходящей разности значений суперпотенциала (5.3.1), вычисленных на разных корнях [32, 44, 45]. Скажем, для кинка, интерполирующего между вакуумами σ_2 и σ_1 , центральный заряд может быть

вычислен по формуле

$$\begin{aligned} Z_{\text{BPS}} &= 2 [\mathcal{W}_{\text{WCP}}(\sigma_1) - \mathcal{W}_{\text{WCP}}(\sigma_2)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{P=1}^{N_c} m_P \ln \frac{\sqrt{2}\sigma_1 + m_P}{\sqrt{2}\sigma_2 + m_P} - \sum_{K=N_c+1}^{N_f} m_K \ln \frac{\sqrt{2}\sigma_1 + m_K}{\sqrt{2}\sigma_2 + m_K} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Заметьте, что для того, чтобы это выражение хорошо преобразовывалось при преобразовании S -дуальности, необходимо предположить, что массы преобразуются как $m_P \rightarrow -m_K$, $m_K \rightarrow -m_P$.

Формула для центрального заряда (5.3.4) содержит логарифмы, которые являются многозначными функциями. Различные выборы отличаются вкладами типа $im_A \times \text{integer}$. Кроме топологического заряда, у кинков могут быть нётеровские заряды по отношению к глобальной группе (1.2.3), нарушенной разностями масс кварков до $U(1)^3$. Отсюда получается целое семейство дионных кинков. Стоит подчеркнуть, что все эти кинки интерполируют между одними и теми же двумя вакуумами σ_1 и σ_2 . В формуле (5.3.4) мы не конкретизируем эти дионные вклады. Ниже в данной Главе будет представлено подробное исследование спектра BPS кинков в различных областях значений константы связи β .

Вакуумы σ находятся как решения уравнения (5.3.2),

$$\sqrt{2}\sigma_{\pm} = -\frac{\Delta m}{2} \frac{1 + e^{-2\pi\beta}}{1 - e^{-2\pi\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\delta m_{12})^2 - e^{-2\pi\beta} (\delta m_{34})^2}{4(1 - e^{-2\pi\beta})} + \Delta m^2 \frac{e^{-2\pi\beta}}{(1 - e^{-2\pi\beta})^2}}. \quad (5.3.5)$$

При написании этой формулы была использована следующая параметризация для масс:

$$\begin{aligned} \Delta m &= \bar{m} - \tilde{m}, & \Delta m^2 &= (\bar{m} - \tilde{m})^2, \\ \delta m_{12} &= m_1 - m_2, \\ \delta m_{34} &= m_3 - m_4, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

где \bar{m} и \tilde{m} — средние голые массы полей n^P и ρ^K соответственно:

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2}{2}, \quad \tilde{m} = \frac{m_3 + m_4}{2}. \quad (5.3.7)$$

Из (5.3.5) сразу же можно заметить, что в ситуации общего положения один из корней неограниченно растёт при приближении к самодуальной точке $\beta = 0$,

тогда как другой остаётся конечным. Это окажется важным при рассмотрении кинков в сильной связи.

Точки Аргиреса-Дугласа (АД) [81] соответствуют сливанию двух вакуумов. В этих точках некоторые кинки становятся безмассовыми. В случае с решением (5.3.5) точки АД возникают, когда выражение под знаком квадратного корня зануляется. Формула для положения точек АД на плоскости β может быть записана как

$$e^{-2\pi\beta_{AD}} = (2P - 1 \pm 2\sqrt{P(P-1)}) \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_4}, \quad (5.3.8)$$

где P — конформное отношение,

$$P[m_1, m_4, m_3, m_2] = \frac{(m_1 - m_4)(m_3 - m_2)}{(m_1 - m_2)(m_3 - m_4)}. \quad (5.3.9)$$

В формуле (5.3.8) могут появляться сингулярности. Значения $P = 0, 1$ соответствуют открыванию хиггсовской ветки, а при $P \rightarrow \pm\infty$ одна из точек АД уходит на бесконечность $\beta \rightarrow \pm\infty$. В этих особых точках нет ничего особенно интересного, и в ситуации общего положения формула (5.3.8) ведёт себя хорошо. Поэтому мы не будем здесь рассматривать эти особенности.

5.3.2 Предел $\mathbb{CP}(1)$

Для того, чтобы связать нашу задачу с хорошо изученным спектром $\mathbb{CP}(1)$ модели, мы будем рассматривать следующий предел¹³:

$$\Delta m \gg \delta m_{12}, \delta m_{34}; \quad \beta \gg 1. \quad (5.3.10)$$

Большинство общих особенностей (за исключением связанных состояний в слабой связи, см. Раздел 5.4) модели $\mathbb{WCP}(2, 2)$ остаются в этом пределе, но вычисления при этом сильно упрощаются. Кроме того, результаты данного Раздела легко обобщаются на случай $\beta \ll -1$.

Переопределяя поле σ подходящим образом, можно сдвинуть массы так, чтобы

$$\begin{aligned} m_1 &= \delta m_{12}/2, & m_2 &= -\delta m_{12}/2, \\ m_3 &= -\Delta m + \delta m_{34}/2, & m_4 &= -\Delta m - \delta m_{34}/2. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

¹³В данном разделе и ниже при написании схожих неравенств, вовлекающих \gg или \ll , мы будем на самом деле предполагать, что слева взяты абсолютные величины масс и вещественная часть β , то есть (5.3.10) на самом деле означает $|\Delta m| \gg |\delta m_{12}|, |\delta m_{34}|; \text{Re } \beta \gg 1$.

В таком представлении очевидно, что в пределе (5.3.10) поля ρ^K станут тяжёлыми и отщепляются при энергиях ниже Δm , и теория на низких энергиях сводится к обычной $\mathbb{CP}(1)$ модели с масштабом масс δm_{12} . Эффективная константа связи больше не будет постоянной. Ниже Δm она будет бегущей и остановится на масштабе δm_{12} ,

$$2\pi\beta_{CP(1)} = 2\pi\beta - 2\ln \frac{\Delta m}{\delta m_{12}} = 2\log \left\{ \frac{\delta m_{12}}{\Lambda_{CP(1)}} \right\}, \quad (5.3.12)$$

где множитель 2 справа — первый коэффициент β -функции (в $\mathbb{CP}(N-1)$ модели этот коэффициент равен N), а $\Lambda_{CP(1)}$ — динамический масштаб низкоэнергетической $\mathbb{CP}(1)$ модели,

$$\Lambda_{CP(1)} = \Delta m e^{-\pi\beta}. \quad (5.3.13)$$

Вакуумное уравнение (5.3.2) превращается в

$$(\sqrt{2}\sigma - \delta m_{12}/2)(\sqrt{2}\sigma + \delta m_{12}/2) \approx e^{-2\pi\beta}(-\Delta m)^2 = \Lambda_{CP(1)}^2. \quad (5.3.14)$$

В пределе (5.3.10), уравнение (5.3.14) согласуется с вакуумным уравнением $\mathbb{CP}(N-1)$ модели

$$\prod_{P=1}^N (\sqrt{2}\sigma + m_P) = (\Lambda_{CP(N-1)})^N \quad (5.3.15)$$

(при $N=2$). В пределе (5.3.10) точки АД (5.3.8) есть $\pm\beta_{AD}$:

$$\beta_{AD} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{2\Delta m}{\delta m_{12}} \pm \frac{i}{2}. \quad (5.3.16)$$

Мы видим, что условие слабой связи в модели $\mathbb{CP}(1)$, а именно $\Lambda_{CP(1)} \ll \delta m_{12}$, может быть напрямую переписано как $\beta \gg \beta_{AD}$, см. (5.3.13). Подчеркнём, что это — более строгое условие, нежели просто $\beta \gg 1$. При $\beta \rightarrow \beta_{AD}$ эффективная константа связи (5.3.12) претерпевает ИК полюс.

Далее. Так как мы работаем теперь в $\mathbb{CP}(1)$ пределе, центральный заряд BPS кинка должен определяться хорошо известной формулой [32]. И действительно, рассмотрим вакуумы в двумерии,

$$\sqrt{2}\sigma_{\pm} \approx \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2}. \quad (5.3.17)$$

Подставляя их и (5.3.11) в формулу для центрального заряда $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели (5.3.4) и пренебрегая членами порядка $\delta m_{12}/\Delta m$ и $\Lambda_{CP(1)}/\Delta m$, получаем центральный заряд

$$Z_{\text{kink}} = \frac{1}{2\pi} \left[2\sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2} - \delta m_{12} \ln \frac{\delta m_{12} + \sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2}}{\delta m_{12} - \sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2}} \right]. \quad (5.3.18)$$

Это — в точности формула Дори [32] для $\mathbb{CP}(1)$.

Такой центральный заряд (5.3.18) обращается в нуль в точке АД (5.3.16). Поэтому BPS кинк становится безмассовым в этой точке. Ниже мы увидим, что в двух АД точках $\beta = \beta_{AD}$ с $\text{Re } \beta > 0$ безмассовыми становятся два кинка и различными дионными зарядами.

Кроме того, центральный заряд (5.3.18) сингулярен в точке АД. Действительно, вблизи этой точки $\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2 \approx 0$. Раскладывая (5.3.18), получим

$$\begin{aligned} Z_{\text{kink}} &\approx -\frac{1}{3\pi \delta m_{12}^2} \left(\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2 \right)^{3/2} \\ &\approx -\frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \delta m_{12} \cdot (\beta - \beta_{AD1})^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

Это показывает, что локально центральный заряд имеет корневую особенность вблизи точки АД.

В квазиклассическом пределе $\Lambda_{CP(1)} \ll \delta m_{12}$ (или, что то же самое, $\beta \gg \beta_{AD}$) центральный заряд (5.3.18) становится

$$\begin{aligned} Z_{\text{kink}} &\approx -\frac{\delta m_{12}}{\pi} \ln \frac{\delta m_{12}}{\Lambda_{CP(1)}} + i \frac{\delta m_{12}}{2} + \frac{\delta m_{12}}{\pi} \\ &\approx -\beta_{CP(1)} \cdot (m_1 - m_2) + i(m_1 - \bar{m}) + \frac{m_1 - m_2}{\pi} \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

где \bar{m} — среднее первых двух масс, см. (5.3.7). Второе слагаемое представляет собой дробный $U(1)$ заряд солитона [82]. Действительно, можно сравнить (5.3.20) с квазиклассической формулой Дори [32] для центрального заряда

$$Z_{\text{kink}} = -(\beta_{CP(1)} T - i q) \delta m_{12} \quad (5.3.21)$$

где $T = +1$ — топологический заряд, а q — глобальный (или «дионный») заряд кинка. Сравнивая (5.3.20) и (5.3.21), можно увидеть, что дионный заряд кинка

равен $q = 1/2$. Последнее слагаемой в формуле (5.3.20) есть аномалия центрального заряда [82]. Подробности могут быть найдены, например, в работах [11, 83].

В пределе, когда мы находимся далеко от точек АД, $\beta \gg \beta_{AD}$, выражение во второй строчке формулы (5.3.20) на самом деле справедливо при любых значениях масс, не только в $\mathbb{CP}(1)$ пределе (5.3.10).

5.4 Спектр в слабой связи

Теперь рассмотрим спектр в слабой связи. В $\mathbb{CP}(1)$ пределе (5.3.10) в слабой связи, $\Lambda_{\mathbb{CP}(1)} \ll \delta m_{12}$, часть спектра совпадает с обычным спектром $\mathbb{CP}(1)$ модели, который происходит из полей n^P .

Спектр теории $\mathbb{CP}(1)$ [32] состоит из элементарных пертурбативных возмущений и башни BPS дионных кинков. Масса пертурбативных состояний равна $|i(m_1 - m_2)|$. Это можно установить на классическом уровне из действия (5.1.3). Предположим, что поле n^1 классически развивает вакуумное среднее, равное $\sqrt{\beta}$. Тогда, из-за первого слагаемого с $P = 1$ во второй строчке формулы (5.1.3) поле σ будет равно (классически) $\sqrt{2}\sigma = -m_1$, а от слагаемого с $P = 2$ получится масса $|m_1 - m_2|$ поля n^2 . Отметим, что этот результат, полученный в квазиклассическом пределе, на самом деле является точным из-за BPS природы этого пертурбативного состояния.

Масса кинка, интерполирующего между двумя вакуумами, равна $M_{\text{kinck}} = |Z_{\text{kinck}}|$, где центральный заряд находится по формуле (5.3.20). Этот кинк на самом деле является частью дионной башни с центральными зарядами

$$D^{(n)} = Z_{\text{kinck}} + n \cdot i(m_1 - m_2), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.4.1)$$

которые можно интерпретировать как связанное состояние кинка и n квантов пертурбативных состояний с центральным зарядом $i(m_1 - m_2)$. Число n в (5.4.1) есть воплощение многолистности логарифмов в формуле (5.3.4). Оно даёт вклад в дионный заряд кинка q , см. квазиклассическое выражение (5.3.21). В полный дионный заряд $q = n + 1/2$ входит также и вклад от Z_{kinck} , что делает заряд нецелым. Наличие башни (5.4.1) в области слабой связи в $\mathbb{CP}(1)$ модели было обнаружено в [32] с использованием квазиклассических методов.

В нашей $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели есть также дополнительные состояния, происходящие от полей ρ^K . Они включают в себя пертурбативные BPS состояния с массами $|i(m_P - m_K)|$, $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. Эти состояния видны уже квазиклассически из действия (5.1.3). Скажем, в классическом вакууме $n^1 = \sqrt{\beta}$, $\sqrt{2}\sigma = -m_1$, у полей ρ^K появляются массы $|m_1 - m_3|$ и $|m_1 - m_4|$, см. второе слагаемое второй строчки в (5.1.3). Мы называем эти состояния «бифундаменталы.» Они являются двумерными «отражениями» бифундаментальных кварков четырёхмерной СКХД при 2D-4D соответствии, см. Раздел 1.

Если ослабить $\mathbb{CP}(1)$ условия (5.3.10), описанный выше спектр остаётся, но появляются новые состояния. Состояния из дионной башни (5.4.1) могут образовывать связанные состояния с «бифундаментальными» фермионами $\tilde{\psi}_K^P$. Центральный заряд получающегося состояния есть [45]

$$Z_{\text{bound}}^{(n)} = Z_{\text{kink}} + n \cdot i(m_1 - m_2) + i(m_1 - m_K). \quad (5.4.2)$$

Эти состояния образуются, если условие

$$0 < \text{Re} \left\{ \frac{m_1 - m_K}{m_1 - m_2} \right\} \equiv 1 - \text{Re} \left\{ \frac{m_2 - m_K}{m_2 - m_1} \right\} < 1 \quad (5.4.3)$$

выполнено для некоторого $K \in \{3, 4\}$ (и произвольного P) [45]. Из условия стабильности (5.4.3) очевидно, что при нашем выборе масс кварков $\Delta m \gg \delta m_{12}, \delta m_{34}$ (см. первое условие в (5.3.10)) связанные состояния отсутствуют. Мы не будем рассматривать такие связанные состояния.

Итак, мы только что описали спектр в слабой связи $\beta \gg \beta_{AD}$. Эти результаты буквально переносятся на спектр в дуальной области слабой связи при $\beta \ll -\beta_{AD}$, нужно только поменять индексы $P = 1, 2 \leftrightarrow K = 3, 4$.

5.5 Зеркальное описание и спектр в сильной связи

В данном Разделе будет изучен спектр BPS кинков в области сильной связи, где константа связи β мала, $\beta \ll \beta_{AD}$. (Для сравнения массы кинка в различных пределах см. Рис. 5.1.) Мы обобщим анализ [84], проведённый для асимптотически свободных $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ моделей, к нашему случаю конформной $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели.

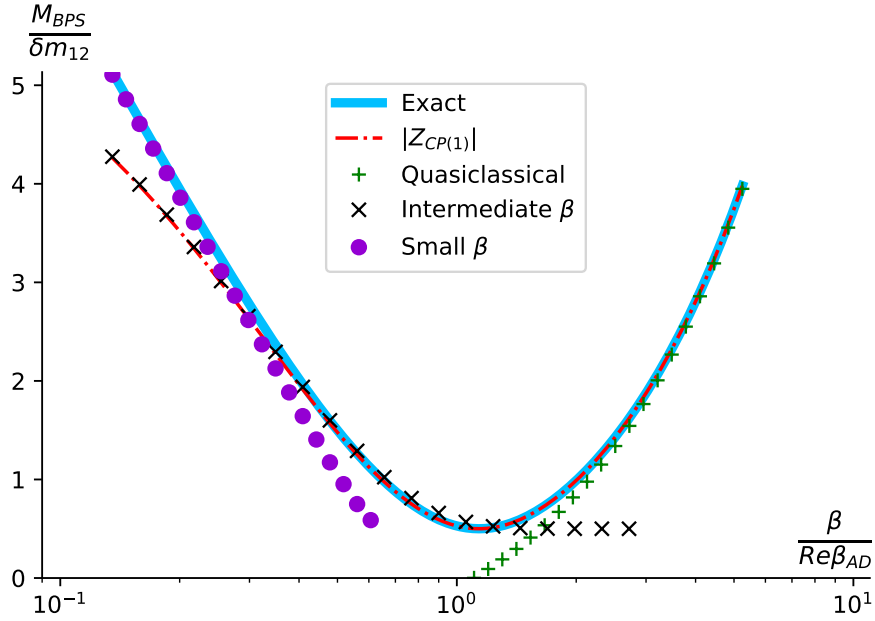


Рис. 5.1: Различные приближения к массе кинка M_1 (абсолютной величине соответствующего центрального заряда): $\mathbb{CP}(1)$ предел (5.3.18), квазиклассика (5.3.20), промежуточные β (5.5.6), малые β (5.5.13). Отношение $\Delta m / \delta m_{12} = 10$.

5.5.1 Зеркальный суперпотенциал

Для этого мы будем использовать зеркальное описание кинков [85, 86] в $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели (5.1.3). Запишем формулу для зеркального суперпотенциала:

$$\mathcal{W}_{\text{mirror}}(X_P, Y_K) = -\frac{\Lambda}{4\pi} \left[\sum_P X_P - \sum_K Y_K - \sum_P \frac{m_P}{\Lambda} \ln X_P + \sum_K \frac{m_K}{\Lambda} \ln Y_K \right]. \quad (5.5.1)$$

Здесь, индексы пробегает значения $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. Параметр Λ — дополнительный параметр размерности массы, который сократится в конце.

Поля X_P, Y_K подчиняются условию

$$\prod_P X_P = e^{-2\pi\beta} \prod_K Y_K. \quad (5.5.2)$$

Вакуумные средние полей X_P, Y_K могут быть получены из минимизации суперпотенциала (5.5.1) с учётом условия (5.5.2) [84, 86]. Ниже мы будем пользоваться упрощённым подходом, в котором используется связь вакуумных средних X_P, Y_K с σ -корнями вакуумного уравнения (5.3.2) [84, 86],

$$X_P = \frac{\sqrt{2}\sigma + m_P}{\Lambda}, \quad Y_K = \frac{\sqrt{2}\sigma + m_K}{\Lambda}. \quad (5.5.3)$$

Центральный заряд кинка, интерполирующего между двумя вакуумами Vac_1 и Vac_2 , может быть вычислен по формуле

$$Z_{\text{kink}} = 2 [\mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_2) - \mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_1)] , \quad (5.5.4)$$

а его масса равна $M_{\text{kink}} = |Z_{\text{kink}}|$, см. (5.3.3).

5.5.2 Кинки при промежуточных β

Для начала рассмотрим предел $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ (5.3.10). В промежуточной области $\delta m_{12} \ll \Lambda_{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)} \ll \Delta m$ (или, что то же самое, $1 \ll \beta \ll \beta_{AD}$), эффективная $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ модель находится в режиме сильной связи, но в то же время можно использовать разложение при больших β . Решения вакуумного уравнения (5.3.2) можно найти приближённо, $\sqrt{2}\sigma_{\pm} \approx -\Delta m/2 \pm \Lambda_{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)}$, откуда получаются два зеркальных вакуума:

Vac_1 at $\sigma = \sigma_+$	Vac_2 at $\sigma = \sigma_-$
$X_1 \approx X_2 \approx \frac{\Lambda_{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)}}{\Lambda}$	$X_1 \approx X_2 \approx -\frac{\Lambda_{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)}}{\Lambda}$
$Y_3 \approx Y_4 \approx -\frac{\Delta m}{\Lambda}$	$Y_3 \approx Y_4 \approx -\frac{\Delta m}{\Lambda}$

Для обоих вакуумов условие (5.5.2) выполнено:

$$\prod_P X_P = e^{-2\pi\beta} \prod_K Y_K \approx \frac{\Lambda_{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)}^2}{\Lambda^2} . \quad (5.5.5)$$

Между этими вакуумами могут интерполировать различные типы кинков.

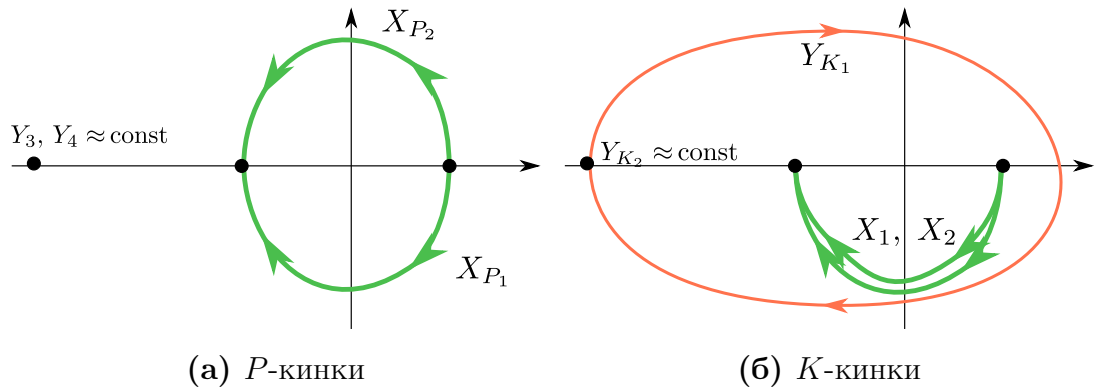


Рис. 5.2: Траектории X_P и Y_K в зеркальном представлении кинка при промежуточных $1 \ll \beta \ll \beta_{AD}$

n -кинки Для этих кинков, два X_P наматываются в противоположных направлениях, в то время как Y_K остаются на месте, так что условие (5.5.2) выполняется; см. Рис. 5.2а. Так как фазы полей X_P изменяются, у логарифмов $\ln X_K$ в (5.5.1) появляются мнимые части. Есть два типа таких кинков; они различаются в том, какой аромат наматывается во часовой стрелке, а какой против. Из формулы для центрального заряда (5.5.4) получается

$$Z_P = \frac{2\Lambda_{CP(1)}}{\pi} + i(m_P - \bar{m}), \quad P = 1, 2. \quad (5.5.6)$$

Средняя масса \bar{m} определена в (5.3.7), и мы также использовали, что $m_1 - m_2 = 2(m_1 - \bar{m}) = -2(m_2 - \bar{m})$. Соответствующие массы кинков есть просто абсолютные значения центральных зарядов (5.5.6).

Эта формула известна в $CP(1)$ модели в сильной связи, и может быть выведена раскладыванием центрального заряда (5.3.18) по степеням малого параметра $\delta m_{12}/\Lambda_{CP(1)}$. Действительно, центральный заряд (5.3.18) сводится к центральному заряду $P = 1$ кинка в (5.5.6) при малых δm_{12} .

В пределе, когда m_1 и m_2 равны ($\delta m_{12} = 0$), два кинка в (5.5.6) вырождаются и образуют дублет по первой $SU(2)$ в глобальной группе (5.2.7), то есть

$$n\text{-kinks} : \quad (\mathbf{2}, \mathbf{1}, 0) \quad (5.5.7)$$

Тот факт, что кинки $CP(N - 1)$ модели в сильной связи образуют фундаментальное представление группы $SU(N)$ и преобразуются как поля n^P , был обнаружен Виттенем уже давно [26]. Позднее это было подтверждено Хори и Вафой [86] с использованием зеркального представления. Это отражено в наших обозначениях для кинков в (5.5.6) как n -кинков.

ρ -кинки В случае этих кинков два поля X_P наматываются в одном направлении, а ровно один из Y_K наматывается в том же направлении дважды, в соответствии с (5.5.2); см. Рис. 5.2б. Тогда у соответствующих логарифмов в (5.5.4) появляются мнимые части. Снова есть два типа таких кинков, которые различаются в том, какой именно аромат Y_K наматывается. Центральный заряд кинка есть

$$Z_K = \frac{2\Lambda_{CP(1)}}{\pi} + i(m_K - \bar{m}), \quad K = 3, 4. \quad (5.5.8)$$

Это — новые состояния, которых не было в $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$. При $\beta \gg 1$ эти состояния гораздо тяжелее, чем n -кинки.

В пределе равных m_3 и m_4 ($\delta m_{34} = 0$) эти два кинка (5.5.8) вырождаются и образуют дублет по второй $SU(2)$ в (5.2.7), то есть

$$\rho\text{-kinks} : \quad (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1). \quad (5.5.9)$$

Эти кинки ведут себя как поля ρ , см. (1.2.4). Тот факт, что n -кинки и ρ -кинки преобразуются как поля n^P и ρ^K , будет играть для нас важную роль.

Отметим, что BPS спектр $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(2, 2)$ модели в сильной связи весьма отличается от спектра в слабой связи. Во-первых, в сильной связи нет пертурбативных состояний. Во-вторых, вместо бесконечной башни дионных кинков (5.4.1), которая была в слабой связи, в сильной связи есть только четыре кинка, преобразующихся по представлениям (5.5.7) и (5.5.9) глобальной группы (5.2.7). Отметим также, что глобальные заряды кинков в пертурбативной башне (5.4.1) связаны лишь с одной разностью масс ($m_1 - m_2$). Напротив, глобальные заряды кинков в сильной связи связаны со всеми массами m_A в модели. В Разделе 5.6 будут изучены CMS, на которых происходят перестройки BPS спектров.

Полученные результаты могут быть напрямую обобщены на дуальную область отрицательных $\text{Re } \beta$. Когда β находится в промежуточной области между $-|\beta_{AD}|$ и -1 , поля n^P становятся тяжёлыми и отщепляются, и мы снова остаёмся с $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ моделью, только теперь составленной из полей ρ^K и с новым масштабом сильной связи

$$\Lambda_{\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)}} = \Delta m e^{+\pi\beta}. \quad (5.5.10)$$

Роли n -кинок и ρ -кинок меняются друг с другом. Их центральные заряды равны

$$Z_P = \frac{2\Lambda_{\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)}}}{\pi} + i(m_P - \tilde{m}), \quad Z_K = \frac{2\Lambda_{\widetilde{\mathbb{C}\mathbb{P}(1)}}}{\pi} + i(m_K - \tilde{m}). \quad (5.5.11)$$

где \tilde{m} определена в (5.3.7). Как можно видеть, теперь лёгкими являются кинки Z_K . Отметим, что эти результаты согласуются с преобразованием S -дуальности (5.1.4).

Наконец, заметим, что, помимо только что описанных кинков, в теории могут быть также кинки, описываемые полями X_P , Y_K , наматывающимися в противоположном направлении. Скажем, для ρ -кинок на Рис. 5.26 поля X_P могут

наматываться в верхней полуплоскости, а Y_K — против часовой стрелки. Эти кинки оказываются $n = +1$ состояниями башни состояний с высшими намотками в сильной связи, которая обсуждается в следующем подразделе.

5.5.3 Кинки вблизи $\beta = 0$

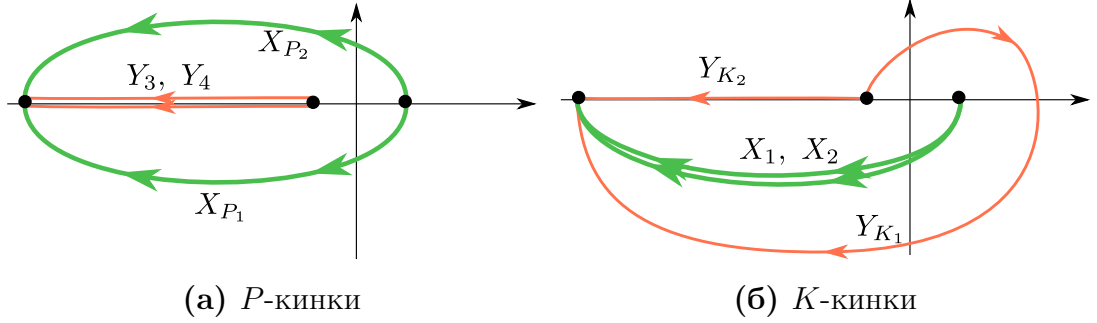


Рис. 5.3: Траектории полей X_P и Y_K в зеркальном представлении кинка при $\beta \rightarrow 0$.

Теперь рассмотрим предел $\beta \rightarrow 0$. В окрестности $\beta = 0$ последнее условие в (5.3.10) сильно нарушается, и все поля $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели n^P, ρ^K (5.1.3) играют важную роль.

В этом пределе можно пользоваться разложением по малым β . Имеем: $e^{-2\pi\beta} \approx 1 - 2\pi\beta$, и σ -вакуумы (5.3.5) приближённо равны

$$\sqrt{2}\sigma_+ \approx \frac{\delta m_{12}^2 - \delta m_{34}^2}{8\Delta m^2}, \quad \sqrt{2}\sigma_- \approx -\frac{\Delta m}{\pi\beta}. \quad (5.5.12)$$

Без ограничения общности можно взять $\sigma_+ \approx 0$. Тогда два зеркальных вакуума

Vac_1 at $\sigma = \sigma_+$	Vac_2 at $\sigma = \sigma_-$
$X_P \approx m_P/\Lambda$	$X_1 \approx X_2 \approx -\frac{\Delta m}{\pi\beta\Lambda}$
$Y_K \approx m_K/\Lambda$	$Y_3 \approx Y_4 \approx -\frac{\Delta m}{\pi\beta\Lambda}$

Мы снова имеем два типа кинков. n -кинки появляются когда, скажем X_1 набирает фазу $+i\pi$, X_2 набирает $-i\pi$, а фазы полей Y_K остаются на места; см. Рис. 5.3а. Есть также кинк, в котором роли X_1 и X_2 поменяны местами. В общем получается два кинка с центральными зарядами

$$Z_P = \frac{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\pi\beta} + i(m_P - \bar{m}) \quad (5.5.13)$$

где \bar{m} определена в (5.3.7).

Точно так же, ρ -кинки получаются, когда два поля X_P наматываются с одинаковыми фазами, а ровно один из Y_K наматывается вдвойне, в соответствии с (5.5.2); см. Рис. 5.3б. Центральные заряды этих кинков равны

$$Z_K = \frac{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\pi\beta} + i(m_K - \bar{m}). \quad (5.5.14)$$

Тут же можно заметить, что массы кинков сингулярны в самодуальной точке $\beta = 0$. В окрестности этой точки кинки очень тяжёлые.

Чтобы получить спектр кинков при $\text{Re}\beta < 0$, можно аналитически продолжить (5.5.13) и (5.5.14) на $\beta \rightarrow \tilde{\beta} = -\beta$. Слагаемые с логарифмами в (5.5.13), (5.5.14) дают $i(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)/2$, и \bar{m} переходит в \tilde{m} . Отметим, что это согласуется с преобразованием S -дуальности (5.1.4).

Теперь стоит обратить внимание на то, что центральные заряды n и ρ -кинок (5.5.13) и (5.5.14) имеют точку ветвления при $\beta = 0$. Это — новая особенность, которой не было в асимптотически свободных версиях $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ модели. Каков смысл этой точки ветвления? Ниже в данном Разделе мы покажем, что для самосогласованности BPS спектра нашей конформной $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели необходимо наличие новых состояний с высшими намотками. Эта башня имеется только в сильной связи и распадается при переходе к большому β . Это можно увидеть следующим образом.

Рассмотрим некий процесс, в котором константа связи β меняется по некоторой траектории в комплексной плоскости. Эта траектория может протягиваться из области слабой связи $\beta \gg \beta_{AD}$ сквозь область слабой связи в дуальную область слабой связи $\beta \ll -\beta_{AD}$. Эта траектория может также обойти точку АД, пересечь разрез и попасть на другой лист. Заряды различных BPS состояний меняются, но на CMS, которые начинаются в точках АД, происходит перестройка спектра, так что полный BPS спектр не меняется при обходе вокруг точки АД. Возможные «лишние» состояния распадаются на CMS [45].

Однако, эта траектория может также обойти по кругу сингулярность при $\beta = 0$. Она может также обойти вокруг этой точки несколько раз. При этом, нет CMS, которые бы начинались в точке $\beta = 0$ и выходили из неё. Тем самым у нас образуется другой набор состояний. Из выражения для центральных зарядов кинков (5.5.13), (5.5.14) видно, что при обходе точки $\beta = 0$ n раз центральный

заряд BPS кинков превращается в

$$Z_A^{[n]} = \frac{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\pi\beta} + i(m_A - \bar{m}) + i n \cdot (m_1 + m_2 - m_3 - m_4),$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg \beta < -\frac{3\pi}{2}.$$
(5.5.15)

Здесь фаза константы связи β ограничена с учётом разреза, см. Рис. Е.1. Означает ли это, что полный BPS спектр меняется при переходе от листа к листу?

Эту проблему можно разрешить, предположив, что на самом деле *все* состояния (5.5.15) сразу существуют в сильной связи на первом листе. При обходе вокруг $\beta = 0$ эта башня состояний $Z_A^{[n]}$ просто сдвигается по индексу n . Так как этот индекс пробегает все целые значения, и число состояний в такой башне бесконечно, BPS спектр как целое является на самом деле 2π -периодическим по отношению к $\arg \beta$.

Новая башня (5.5.15) существует только в области сильной связи. В слабой связи она распадается. Соответствующие CMS и процессы распада изучаются в Приложении Е.1.2.

5.6 Кривые нейтральной устойчивости (CMS)

В данной главе будут представлены кривые нейтральной устойчивости (CMS) для различных распадов BPS состояний.

Как уже утверждалось выше, в рассматриваемой здесь $\mathbb{WCP}(2, 2)$ теории константа связи β не является бегущей константой связи. Мы хотим изучить перестройки в BPS спектре при различных значениях β , в частности при переходе между областями сильной и слабой связи, а также при $\text{Re } \beta < 0$. Для того, чтобы лучше отразить существенные особенности, мы подробно изучим, как спектр частиц зависит от β , держа массы m_A при этом постоянными¹⁴. Для этого мы будем изучать CMS на комплексной плоскости β . Так как угол θ_{2d} обладает свойством 2π периодичности, вся картина спектров будет также периодична.

В Разделах 5.4 и 5.5 мы видели, что спектры в слабой и сильной связи разные. В слабой связи $\beta \gg \beta_{AD}$ мы видели дионную башню (5.4.1), а также

¹⁴Или, точнее говоря, отношения масс, так как положения CMS на плоскости β могут зависеть только от безразмерных величин, и в нашей теории $\mathbb{WCP}(2, 2)$ нет масштаба сильной связи Λ .

«петрурбативные» состояния с центральным зарядом $i(m_1 - m_2)$. Их нет в сильной связи, и значит, они должны распадаться на CMS, разделяющей области сильной и слабой связи. Мы будем называть такие CMS *первичными кривыми*.

Кроме того, в сильной связи есть ρ -кинки, которых нет в слабой связи. Соответственно, должна быть и CMS, на которой распадаются эти состояния. Такие кривые мы будем называть *вторичными кривыми*.

Наконец, мы видели, что в слабой связи есть так называемые бифундаменталы — пертурбативные состояния с массами $|i(m_P - m_K)|$, $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. Эти состояния не распадаются даже в сильной связи. Они имеются везде на плоскости β . Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в безмассовом пределе $m_A \rightarrow 0$ в четырёхмерной СКХД есть хиггсовская ветка, составленная из бифундаментальных кварков. Эта Хиггсовская ветка защищена суперсимметрией, и она есть в теории при любом значении константы связи. Через 2D-4D соответствие мы заключаем, что бифундаменталы в двумерии также существуют при любых значениях β .

Ниже в данной главе мы будем изучать первичные CMS, а вторичные кривые рассматриваются в Приложении Е.1.

5.6.1 Первичные кривые на плоскости β

Как уже обсуждалось выше, при переходе от больших $\beta \gg \beta_{AD}$ к сильной связи $\beta \sim 1$ пертурбативные состояния с центральным зарядом $i(m_1 - m_2)$ распадаются на CMS, образуя (дионные) пары кинк-антикинк. Процесс распада можно схематично записать как¹⁵

$$\underbrace{[i(m_1 - m_2)]}_{\text{elementary quantum}} \rightarrow \underbrace{[Z_1]}_{\text{dyon}} + \underbrace{[-Z_2]}_{\text{antidyon}}. \quad (5.6.1)$$

Когда мы находимся на CMS, у центральных зарядов распадных частиц должны быть одинаковые фазы, то есть они должны быть коллинеарными векторами на комплексной плоскости. Отсюда можно вывести уравнение на CMS,

$$\text{Im} \left(\frac{Z_P}{i(m_1 - m_2)} \right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re} \left(\frac{Z_P}{m_1 - m_2} \right) = 0, \quad P = 1, 2. \quad (5.6.2)$$

¹⁵Здесь и далее обозначения с квадратными скобками $[Z_A]$, $[i(m_1 - m_2)]$ используются для частиц с соответствующими центральными зарядами. Центральный заряд античастицы равен центральному заряду частицы, взятому со знаком минус.

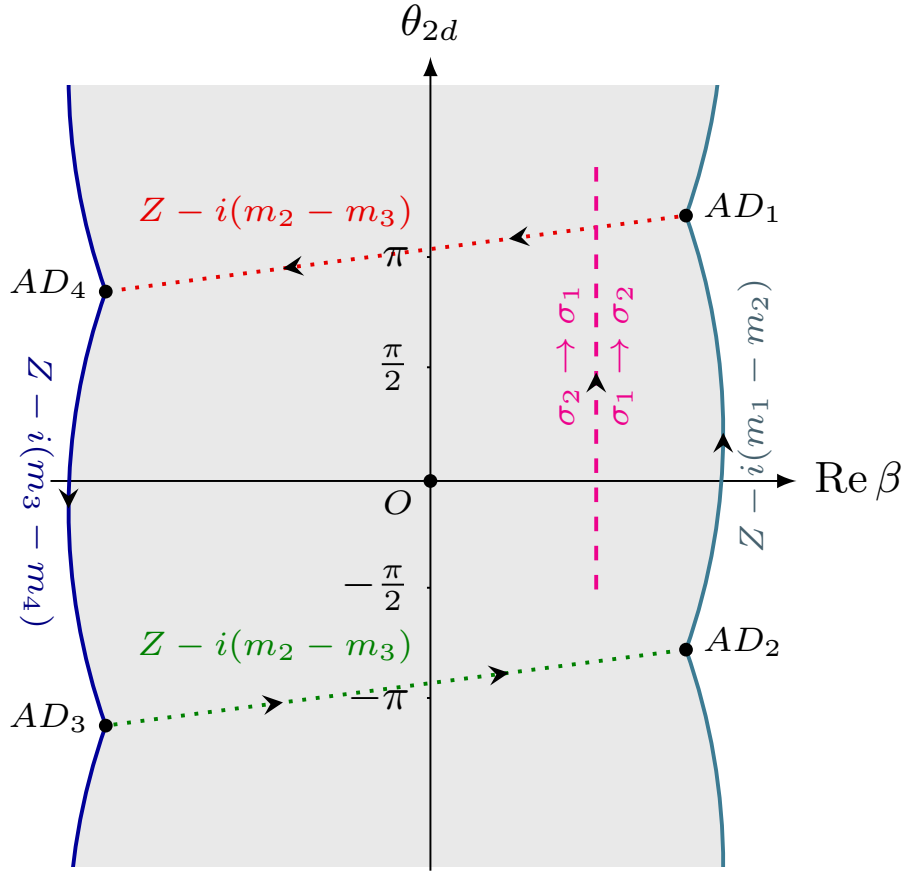


Рис. 5.4: Первичные CMS (сплошные линии слева и справа, схематично) и сдвиги центрального заряда (см. Приложение Е.2). AD_A обозначают точки АД, где соответствующий центральный заряд Z_A зануляется, Случай общего положения масс m_A . Серым закрашена область сильной связи. При переходе от одной точки АД к другой, как показано на рисунке, появляются сдвиги фаз. Также имеется Z_2 преобразование (меняющее местами корни σ), действующее при сдвиге $\theta_{2d} \rightarrow \theta_{2d} + 2\pi$. За исключением этого, вся картина 2π периодична по отношению к θ_{2d} . $AD_2 = AD_1 - 2\pi i$, $AD_3 = AD_4 - 2\pi i$.

Та же кривая распада описывает распад дионной башни (5.4.1) на состояния сильной связи.

Эта кривая отделяет область слабой связи $\beta \gg \beta_{AD}$ от области сильной связи. Она проходит через точки АД (5.3.16) с $\text{Re } \beta > 0$, в которых масса одного из n -кинков $[Z_P]$ зануляется. Эти точки обозначаются как AD_P ,

$$AD_2 = AD_1 - 2\pi i,$$

, подробности см. в Приложении Е.2. Разумеется, соответствующие CMS обла- дают свойством 2π периодичности по θ_{2d} .

Мы решаем (5.6.2) численно. Результаты представлены кривой справа на Рис. 5.4. Отметим, что кинки $[Z_1]$ и $[Z_2]$ (5.5.6), которые есть в сильной свя-

зи, выживают в области слабой связи при положительных $\beta \gg \beta_{AD}$. В этой области они входят в башню (5.4.1) с $n = 0$ и $n = -1$ соответственно. Такое поведение хорошо знакомо: состояния, которые могут становиться безмассовыми в некоторых точках на CMS, есть как в слабой, так и в сильной связи [1, 87].

Отметим, что CMS для $\mathbb{CP}(1)$ модели на комплексной плоскости δm_{12} хорошо известна [82]. Она представляет собой замкнутую кривую вокруг начала координат, проходящую через точки АД. Наша кривая на Рис. 5.4 (а точнее, её правая ветвь при $\text{Re } \beta > 0$) представляет собой перенос кривой [82] на плоскость β . В плоскости β эта кривая не замкнута. Она является периодичной по θ_{2d} .

Аналогично, когда величина $\text{Re } \beta$ имеет большое отрицательное значение (левая часть Рис. 5.4), в теории есть пертурбативные состояния с центральным зарядом $i(m_3 - m_4)$ и соответствующая дионная башня. Их кривые распада удовлетворяют

$$\text{Re} \left(\frac{Z_K}{m_3 - m_4} \right) = 0, \quad K = 3, 4. \quad (5.6.3)$$

Эта CMS разделяет дуальную область слабой связи $\beta \ll -\beta_{AD}$ от области сильной связи. На Рис. 5.4 эта кривая нарисована слева.

Мы видим две области сильной связи на комплексной плоскости β . Они разделены областью сильной связи, которая напоминает полосу вдоль направления θ_{2d} . Именно это изображено на Рис. 5.4.

5.7 Фаза вместо-конфайнмента

В данном Разделе мы используем 2D-4D соответствие для того, чтобы подтвердить наличие фазы вместо-конфайнмента в четырёхмерной СКХД в сильной связи. Эта фаза была обнаружена ранее в асимптотически свободных версиях СКХД [74], см. также обзор [13].

Для этого мы сперва рассмотрим нашу $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модель на мировой поверхности неабелевой струны. В предыдущих Разделах мы выяснили, что спектр BPS состояний сильно различается в слабой и сильной связи. В частности, пертурбативные состояния с массой $|m_1 - m_2|$ распадаются на, скажем, кинк $[Z_1]$ и антикинк $[-Z_2]$, когда мы пересекаем через CMS в правой части Рис. 5.4, переходя из области слабой связи в область сильной связи. В сильной

связи этих пертурбативных состояний нет.

Из 2D-4D соответствия мы можем заключить, что схожий процесс возникает на кулоновской ветке (при $\xi = 0$) в четырёхмерной СКХД, когда мы переходим из режима слабой связи в режим сильной связи. Двумерные пертурбативные состояния с массой $|m_1 - m_2|$ соответствуют в четырёхмерной теории (СКХД) BPS внедиагональным кваркам q^{kP} , $P = 1, 2$, а также глюонам. Их нет в сильной связи. Они распадаются на монополь-антимонопольные пары¹⁶.

Более того, так как n -кинки двумерной теории образуют дублеты по первой $SU(2)$ подгруппе глобальной группы (5.2.7), см. (5.5.7) и (5.5.9), монополи и антимонопольные, образующиеся в результате распада кварков и глюонов, также преобразуются как дублеты и антидублеты по первой $SU(2)$ подгруппе глобальной группы.

При включении ξ в слабой связи четырёхмерная теория переходит в хиггсовскую фазу. Кварки q^{kP} , $P = 1, 2$, экранируются конденсатом (1.1.1). Они объединяются с массивными глюонами и образуют длинные не-BPS $\mathcal{N} = 2$ мультиплеты с массой $g\sqrt{\xi}$, подробности см. в обзоре [11]. Кроме того, при ненулевых значениях ξ монополи удерживаются неабелевыми струнами и являются невылетающими.

При уходе вглубь области сильной связи монополь и антимонополь, образовавшиеся в результате распада кварка или глюона, не могут удалиться друг от друга. Они соединены двумя сдерживающими их струнами и образуют монополь-антимонопольный струнный мезон, показанный на Рис. 1.1а. Разумеется, этот мезон не является BPS состоянием. Он имеет массу порядка $\sqrt{\xi}$. Отметим также, что этот мезон образуется также и в безмассовом пределе $m_A \rightarrow 0$. Масштаб масс четырёхмерной СКХД определяется параметром ФИ ξ .

Таким образом мы видим, что заэкранированные кварки и глюоны, которые есть в четырёхмерной СКХД в хиггсовской фазе в слабой связи, не выживают при переходе в сильную связь. Они эволюционируют в монополь-антимонопольные струнные мезоны. Эта фаза, возникающая в сильной связи, называется фазой *вместо-конфайнмента* [13].

Эта фаза служит альтернативой обычной фазе конфайнмента в КХД. Роль

¹⁶Мы называем монополями все состояния в четырёхмерии, обладающие ненулевым магнитным зарядом, хотя они могут быть дионами, несущими также электрический и глобальный заряды [2].

конституентных кварков в этой фазе играют монополи. Кроме того, так как монополи и антимонполи преобразуются как дублеты и антидублеты по первой $SU(2)$ подгруппе глобальной группы (5.1.1), струнные мезоны возникают в синглетном или присоединённом представлениях первой $SU(2)$ подгруппы. Это похоже на то, что происходит в КХД: кварк-антикварковые мезоны образуют синглетные или присоединённые представления флейворной группы.

Тот же механизм вместо-конфайнмента приводится в действие, если мы начинаем с больших отрицательных β и переходим через левую CMS в область сильной связи. Монополь-антимонпольные мезоны, образующиеся на этой CMS , возникают в синглетном или присоединённом представлениях второй $SU(2)$ подгруппы глобальной группы. Область сильной связи между левой и правой CMS на Рис. 5.4 в двумерной теории соответствует области сильной связи вокруг большого полукруга на Рис. 5.5, если говорить в терминах комплексифицированной константы связи τ четырёхмерной теории, см. (5.9.1) в Разделе 5.9. Эта зона и есть область фазы вместо-конфайнмента в четырёхмерной СКХД.

5.8 Струнный барион из теории поля

В данном Разделе мы покажем, что наличие барионного состояния (5.2.9), найденного как безмассовое состояние струны при помощи теории критической струны, применённой к неабелевому вихрю в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД, может быть подтверждено с использованием только методов теории поля. Начнём с рассмотрения $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели на мировой поверхности струны в сильной связи вблизи точки $\beta = 0$. Барионный заряд $Q_B = 2$ и отсутствие картановских зарядов по отношению к обеим $SU(2)$ подгруппам глобальной группы (5.2.7) подсказывает, что такое состояние может быть образовано как BPS связанное состояние двух разных n -кинков и ещё двух разных ρ -кинков, расположенных на бесконечной прямой струне в следующем порядке:

$$[Z_P]_{|1 \rightarrow 2} + [Z_K]_{|2 \rightarrow 1} + [Z_{P'}]_{|1 \rightarrow 2} + [Z_{K'}]_{|2 \rightarrow 1}, \quad P \neq P', \quad K \neq K', \quad (5.8.1)$$

где индекс $|_{1 \rightarrow 2}$ ($|_{2 \rightarrow 1}$) обозначает кинк, интерполирующий из вакуума 1 в вакуум 2 (из вакуума 2 в вакуум 1). Центральные заряды второго и четвёртого

кинков входят с минусами, см. (5.5.4), и полный центральный заряд связанного состояния (5.8.1) равен

$$Z_b = i(m_1 + m_2 - m_3 - m_4), \quad (5.8.2)$$

см. (5.5.13) и (5.5.14). Отметим, что у этого состояния не может быть топологического заряда. Топологический заряд в двумерии переводится в магнитный заряд монополя в четырёхмерии. Ясно, что у бариона (или у любого другого адрона) не может быть цвет-магнитного заряда, так как магнитные заряды в четырёхмерной СКХД являются невылетающими.

Составное состояние из четырёх кинков (5.8.1) преобразуется по глобальной группе (5.2.7) так же, как

$$n^P \rho^K n^{P'} \rho^{K'} = w^{PK} w^{P'K'}, \quad (5.8.3)$$

где мы пользуемся калибровочно инвариантными мезонными переменными (5.2.2). Ясно, что комбинация (5.8.3) симметрична по перестановке индексов P, P' , а также K, K' . Таким образом, это состояние является триплетом ($\mathbf{3}, \mathbf{3}, 2$) глобальной группы. Это не то, что мы ищем.

Синглетное представление ($\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2$) (5.2.9), за которым мы охотимся, соответствовало бы выражению $\det(w)$. Но это равно нулю, см. (5.2.3)!

Вспомним, однако, что это зануляется только в $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели, сформулированной в терминах полей n и ρ . Рассмотрим безмассовый предел $m_A \rightarrow 0$ и пойдём в точку $\beta = 0$. Наша $\mathbb{WCP}(2, 2)$ теория на конифолде допускает маргинальную деформацию комплексной структуры конифолда при $\beta = 0$ [75, 76], а именно

$$\det(w) = b, \quad (5.8.4)$$

где b — комплексный параметр, см. (5.2.5) в Разделе 5.2. Эта деформация сохраняет риччи-плоскость, обеспечивая тем самым то, что двумерная теория на мировой поверхности всё ещё является конформной и не имеет динамического масштаба Λ , так что барионное состояние $\det(w)$, возникающее в деформированной теории, является безмассовым.

Теперь мы пользуемся 2D-4D соответствием, которое гарантирует, что при $\beta = 0$ и ненулевых b в четырёхмерной СКХД есть похожее безмассовое барионное BPS состояние, образованное четырьмя монополями. При ненулевых

значениях ξ монополи являются невылетающими, и этот барион представляет собой конфигурацию, напоминающую ожерелье: четыре монополя, соединённые сдерживающими струнами, см. Рис. 1.1b. При ненулевых ξ это состояние становится хорошо определённым локализованным состоянием в четырёхмерной СКХД. Его размер определяется величиной $1/\sqrt{\xi}$. Отметим, что этот барион остаётся коротким безмассовым BPS гипермультиплетом при ненулевых ξ , так как нет никакого другого безмассового BPS состояния с такими же квантовыми числами, с которым наш барион мог бы объединиться и образовать длинный мультиплет¹⁷.

Теперь мы можем задаться вопросом: каково происхождение параметра маргинальной деформации b в четырёхмерной СКХД? Как уже было упомянуто в Разделе 5.1, это может быть маргинальная константа связи, сохраняющая $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию, или вакуумное среднее динамического состояния. Константа связи β связана с деформацией кэлера класса конифолда, а не его комплексной структуры. Кроме того, заметим, что параметр деформации b не может быть константой связи, возникающей при калибровке любой симметрии калибровочной группы (5.1.1), так как он обладает ненулевым Q_B . Это приводит нас к заключению, что b является вакуумным средним динамического состояния, а именно, вакуумным средним безмассового струнного бариона из четырёх монополей, который обсуждался выше.

Барион b существует только при $\beta = 0$. При удалении от точки $\beta = 0$ он должен распадаться на CMS, плотно обхватывающей $\beta = 0$ и вырожденной в точку. Он распадается на два безмассовых бифундаментальных кварка, которые находятся в представлении $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, 1)$ глобальной группы.

Таким образом мы смогли подтвердить, что новая непертурбативная хиггсовская ветка вещественной размерности $\dim \mathcal{H} = 4$ открывается в нашей четырёхмерной СКХД в точке $\beta = 0$ (с точностью до 2π периодичности угла θ_{2d}) в безмассовом пределе. Весьма вероятно, что пертурбативная хиггсовская ветка (5.1.2), образованная бифундаментальными кварками, поднимается при $b \neq 0$. Точка $\beta = b = 0$ является точкой фазового перехода, сингулярностью, где встречаются две хиггсовские ветки. Этот вопрос требует дальнейшего про-

¹⁷Это похоже на то, что происходит с бифундаментальными кварками, которые остаются безмассовыми BPS состояниями при включении ненулевого ξ .

яснения.

5.9 Детали 2D-4D соответствия

Как утверждалось выше, сигма-модель (5.1.3) является эффективной теорией на мировой поверхности семилокальной неабелевой струны в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД. Вообще говоря, если рассматривать четырёхмерную теорию с калибровочной группой $U(N)$ и $N < N_f \leq 2N$ ароматами кварков, соответствующей теорией на мировой поверхности будет взвешенная сигма-модель $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$. В данной Главе мы делаем упор на случай $N_f = 2N = 4$.

Параметры масс m_A в теории на мировой поверхности (5.1.3) совпадают с массами кварков четырёхмерной СКХД. Двумерная константа связи β (1.2.5) также связана с четырёхмерной комплексифицированной константой связи τ_{SW} , определяемой как

$$\tau_{\text{SW}} = i \frac{8\pi}{g^2} + \frac{\theta_{4d}}{\pi}. \quad (5.9.1)$$

Здесь θ_{4d} есть θ -угол четырёхмерной теории. Мы начнём данный Раздел с вывода соответствующего соотношения.

5.9.1 Связь между константами связи

В пределе слабой связи, известное на классическом уровне соотношение между константами связи рассматриваемых четырёхмерной и двумерной теорий есть [6, 7]

$$\text{Re } \beta \approx \frac{4\pi}{g^2}. \quad (5.9.2)$$

Но какова же точная формула?

Чтобы установить соотношение, применимое на квантовом уровне, мы воспользуемся 2D-4D соответствием — совпадением BPS спектров монополей четырёхмерной СКХД и кинков двумерной $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ модели на мировой поверхности, см. Раздел 1.3. Как уже было отмечено выше, ключевой технической причиной, стоящей за этим, является то, что вакуумные средние поля σ , получающиеся из точного твистованного суперпотенциала, совпадают с двойными корнями кривой Зайберга-Виттена [2] в кварковом вакууме четырёхмерной СКХД [32, 45]. Ниже мы используем это совпадение спектров для вывода

точного соотношения между четырёхмерной τ_{SW} и двумерной β константами связи в рассматриваемом случае $N_f = 2N = 4$, когда обе константы связи не являются бегущими константами связи.

Математически это можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим кривую Зайберга-Виттена для четырёхмерной СКХД. Кривая Зайберга-Виттена для $SU(N)$ калибровочной теории с $N_f = 2N$ ароматами была выведена в [88, 89]. Она имеет форму

$$y^2 = \prod_{a=1}^N (x - \phi_a)^2 + h(h+2) \prod_{i=1}^{N_f} (x + hm_S + m_i), \quad N_f = 2N. \quad (5.9.3)$$

Здесь,

$$h \equiv h(\tau_{SW})$$

является модулярной функцией (Д.2.1), см. Приложение Д. Кроме того, τ_{SW} определена в (5.9.1). Параметр m_S в (5.9.3) — средняя масса,

$$m_S = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} m_i. \quad (5.9.4)$$

Комбинация $h(h+2)$ инвариантна относительно преобразований S и T дуальности.

В действительности, нас интересует калибровочная группа

$$U(N) = SU(N) \times U(1). \quad (5.9.5)$$

Поэтому мы можем сдвинуть $x \rightarrow (x + hm_S)$, $\phi_a \rightarrow (\phi_a + hm_S)$ и избавиться от m_S . Отметим, что в $U(N)$ теории — в противоположность к $SU(N)$ случаю — сумма $\sum_a \phi_a$ не обязана быть равной нулю. Кривая Зайберга-Виттена (5.9.3) становится

$$y^2 = \prod_{a=1}^N (x - \phi_a)^2 + h(h+2) \prod_{i=1}^{N_f} (x + m_i), \quad N_f = 2N. \quad (5.9.6)$$

Наш кварковый вакуум является сингулярной точкой на кулоновской ветке, в которой все корни Зайберга-Виттена двойные, так что диагональные кварки q^{kP} с $k = P$ безмассовые. При включении ненулевого ξ эта сингулярность преобразуется в изолированный вакуум, в котором диагональные кварки развивают вакуумные средние (1.1.1).

Для того, чтобы обеспечить совпадение BPS спектров, мы требуем, чтобы двойные корни кривой Зайберга-Виттена четырёхмерной теории (5.9.6) совпадали с решениями вакуумного уравнения двумерной теории (5.3.2). В асимптотически свободных теориях кривая Зайберга-Виттена есть просто квадрат вакуумного уравнения двумерной теории [32]. Это гарантирует совпадение корней. Мы воспользуемся такой же идеей в нашем конформном случае.

Рассмотрим квадрат уравнения (5.3.2) в следующей форме:

$$\tilde{y}^2 = \left[\prod_{P=1}^N (\sqrt{2}\sigma + m_P) - e^{-2\pi\beta} \prod_{K=N+1}^{2N} (\sqrt{2}\sigma + m_K) \right]^2. \quad (5.9.7)$$

Мы хотим связать это выражение с кривой Зайберга-Виттена (5.9.6). Уравнение (5.9.7) может быть переписано как

$$\tilde{y}^2 = \left[\prod_{P=1}^N (\sqrt{2}\sigma + m_P) + e^{-2\pi\beta} \prod_{K=N+1}^{2N} (\sqrt{2}\sigma + m_K) \right]^2 - 4e^{-2\pi\beta} \prod_{A=1}^{2N} (\sqrt{2}\sigma + m_A). \quad (5.9.8)$$

Сравнивая это выражение с кривой четырёхмерной теории (5.9.6), получаем:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\sigma, \\ h(h+2) &= -\frac{4e^{-2\pi\beta}}{(1+e^{-2\pi\beta})^2}, \\ y^2 &= \frac{\tilde{y}^2}{(1+e^{-2\pi\beta})^2}. \end{aligned} \quad (5.9.9)$$

Кроме того, можно найти выражение для параметров кулоновской ветки,

$$\phi_{1,2} = -\frac{\Delta m}{2} \frac{1 - e^{-2\pi\beta}}{1 + e^{-2\pi\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\delta m_{12})^2 + e^{-2\pi\beta} (\delta m_{34})^2}{4(1 + e^{-2\pi\beta})} - \Delta m^2 \frac{e^{-2\pi\beta}}{(1 + e^{-2\pi\beta})^2}}, \quad (5.9.10)$$

где массы обозначены согласно (5.3.6). Отметим, что один из этих параметров расходится при $\beta = ik/2$, $k \in \mathbb{Z}$ (сравн. обсуждение в Приложении Ж).

Второе соотношение в (5.9.9) можно рассматривать как квадратное уравнение по отношению к $e^{-2\pi\beta}$. Решая его, получаем два корня

$$\begin{aligned} e^{-2\pi\beta_1} &= \lambda(\tau_{\text{SW}} + 1), \\ e^{-2\pi\beta_2} &= \frac{1}{\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}, \end{aligned} \quad (5.9.11)$$

где были использованы формулы (Д.2.4) и (Д.3.3). Определение функции λ написано в Приложении Д.3. Под действием преобразования S -дуальности эти два решения меняются местами, см. (Д.3.4).

В пределе слабой связи $\text{Im } \tau_{\text{SW}} \gg 1$ функции λ в формулах (5.9.11) могут быть разложены в соответствии с (Д.3.1). Из первой формулы в (5.9.11) получим

$$e^{-2\pi\beta} \approx 16e^{\pi i(\tau_{\text{SW}}+1)}. \quad (5.9.12)$$

Вспоминая определения комплексифицированных констант связи (1.2.5) и (5.9.1), можно записать формулу для слабой связи как

$$r \approx \frac{4\pi}{g^2} - \frac{2 \ln(2)}{\pi}, \quad (5.9.13)$$

$$\theta_{2d} \approx -\theta_{4d} - \pi,$$

сравн. (1.2.5). Этот результат согласуется с известными квазиклассическими ответами. Из этого анализа мы видим, что из двух возможностей в (5.9.11) именно первая приводит к правильному пределу слабой связи. Тем самым, можно написать итоговую формулу для связи между константами связи четырёхмерной и двумерной теорий:

$$e^{-2\pi\beta} = \lambda(\tau_{\text{SW}} + 1). \quad (5.9.14)$$

Это соотношение проиллюстрировано на Рис. 5.5 и Рис. 5.6.

Формула (5.9.14) должна быть использована вместо аналогичной формулы, написанной ранее в [73] без вывода. Её стоит сравнить также с результатом, полученным в работе [90] в 2017 году Гершковицем и Карасиком. Их формула не совсем совпадает с (5.9.14). Объяснение этого факта приведено ниже под формулой (5.9.15).

Отметим, что различные возможные формы кривой Зайберга-Виттена могут привести к различным соотношениям между константами связи двумерной и четырёхмерной теорий. Например, в статье [88] авторами утверждалось, что сдвиг $\tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 1$ есть, в общем, изменение точки отсчёта θ -угла на π , так что якобы физика от такого сдвига не меняется, меняется только кривая Зайберга-Виттена. Кривая (5.9.6) соответствует выбору

$$g = \frac{\theta_2^4 + \theta_1^4}{\theta_2^4 - \theta_1^4}, \quad h(h+2) = -(1-g^2).$$

для функции g из [88]. Можно было также выбрать эту функцию по-другому,

$$g = \frac{\theta_3^4 - \theta_1^4}{\theta_3^4 + \theta_1^4},$$

что привело бы к формуле

$$e^{-2\pi\beta} = \lambda(\tau_{\text{SW}}) \quad (5.9.15)$$

вместо нашего результата (5.9.14). Соотношение (5.9.15) между двумерной и четырёхмерной константами связи было получено в уже упомянутой статье [90] с использованием локализации. Однако, в этой формуле используется необщепринятое определение точки отсчёта θ_{4d} -угла в четырёхмерии (θ_{4d} сдвинут на π). В данной Главе мы будем пользоваться соотношением (5.9.14).

Наконец, отметим, что формула, связывающая константы связи четырёхмерной и двумерной констант связи, может на самом деле зависеть от схемы перенормировок; см. например [91, Разделы 3.4 и 3.5] и [92, Раздел 9.2.1]. Здесь мы получили формулу (5.9.14). Рассмотрим альтернативную формулу

$$e^{-2\pi\beta}|_{\text{alt}} = -h(\tau_{\text{SW}})[h(\tau_{\text{SW}}) + 2]. \quad (5.9.16)$$

Схожие (но те совсем такие же) выражения появлялись ранее, например, в [73]. Используя тождество (Д.3.5), можно видеть, что константы связи β в (5.9.14) и в (5.9.16) связаны,

$$e^{-2\pi\beta}|_{\text{alt}} = \frac{4 e^{-2\pi\beta}|_{(5.9.14)}}{\left(1 + e^{-2\pi\beta}|_{(5.9.14)}\right)^2} \quad (5.9.17)$$

Эти две константы связи описывают эквивалентные теории, см. [91, формула (3.104)]. Нетривиальное соотношение между ними, по-видимому, просто отражает разные выборы схемы перенормировок.

5.9.2 Дуальности

Мы уже видели, что $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модель на мировой поверхности (5.1.3) обладает преобразованием дуальности (5.1.4). В данном подразделе мы увидим, как это преобразование связано с S -дуальностью четырёхмерной СКХД, а также

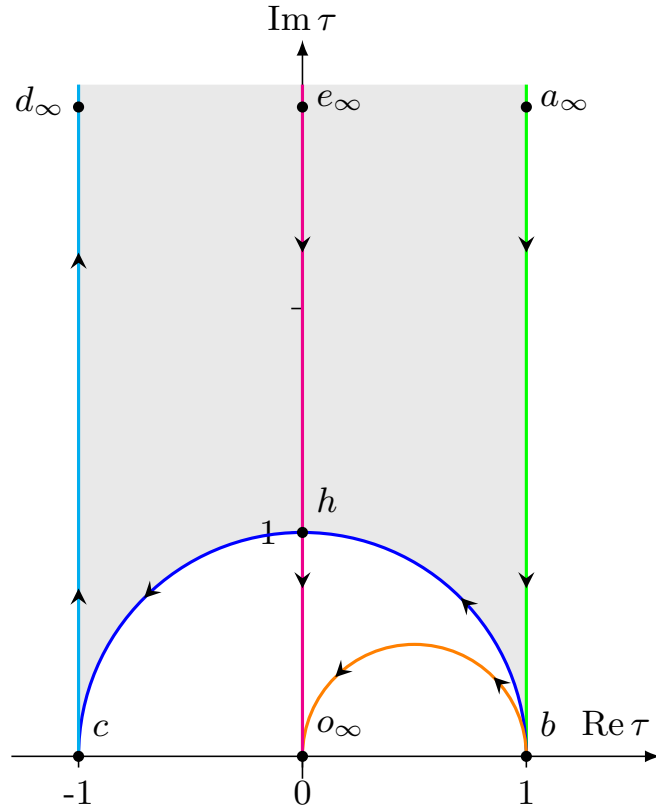


Рис. 5.5: Фундаментальная область группы дуальностей на плоскости τ (закрашенная область). Также показаны некоторые траектории в пространстве значений τ . Соответствующие траектории также показаны на плоскости β , см. Рис. 5.6. Траектория $b \rightarrow o_\infty$ является ST^{-1} -образом траектории $b \rightarrow a_\infty$. Траектория $h \rightarrow o_\infty$ является S -образом траектории $h \rightarrow e_\infty$.

обсудим другие дуальности. Мы определяем преобразования S и $T^{\frac{1}{2}}$ как

$$S : \tau_{\text{SW}} \rightarrow \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}}, \quad (5.9.18)$$

$$T^{\frac{1}{2}} : \tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 1.$$

Обычное преобразование T -дуальности, $\tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 2$, есть квадрат преобразования $T^{\frac{1}{2}}$.

Написанные в (5.9.18) преобразования являются образующими модулярной группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Для нашей теории с калибровочной группой $SU(2)$ группа дуальностей — не вся группа $SL(2, \mathbb{Z})$, а её подгруппа, образующими которой являются S и T , так называемая конгруэнтная подгруппа $\Gamma^0(2)$ группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Несложно найти фундаментальную область такой группы, см. Рис. 5.5.

В работе [90] было показано, что четырёхмерная $\mathcal{N} = 2$ СКХД с калибровочной группой $U(N)$ не инвариантна относительно преобразования дуальности S . Скажем, наша теория с одинаковыми $U(1)$ зарядами четырёх кварков пере-

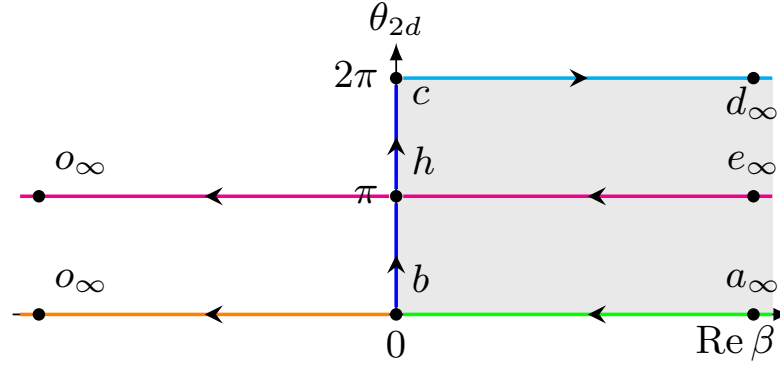


Рис. 5.6: Фундаментальная область группы дуальности на плоскости β (закрашенная область). Также показаны некоторые траектории в пространстве значений β . Соответствующие траектории также показаны на плоскости τ , см. Рис. 5.5. Траектория $b \rightarrow o_\infty$ является ST^{-1} -образом траектории $b \rightarrow a_\infty$. Траектория $h \rightarrow o_\infty$ является S -образом траектории $h \rightarrow e_\infty$. Эти траектории проведены по модулю соотношения $\theta_{2d} \sim \theta_{2d} + 2\pi$.

ходит при таком преобразовании в СКХД с разными $U(1)$ зарядами кварков. Однако, СКХД с калибровочной группой $U(2)$ и одинаковыми $U(1)$ зарядами инвариантна по отношению к преобразованию $ST^{\frac{1}{2}}S$ [90]. Это преобразование на языке теории на мировой поверхности означает, что эта теория инвариантна при изменении знака $\beta \rightarrow -\beta$.

При наших соглашениях касательно θ_{4d} -угла, см. формулу (5.9.14), соответствующим преобразованием дуальности на самом деле является S' -преобразование. Действительно, θ_{4d} -угол, рассматриваемый в работе [90], отличается от нашего сдвигом на π (сравн. «+1» в (5.9.14)), то есть на преобразование $T^{\frac{1}{2}}$. Так как без такого сдвига преобразованием дуальности было бы $ST^{\frac{1}{2}}S$, то нашим преобразованием дуальности на самом деле является

$$T^{\frac{1}{2}} \cdot ST^{\frac{1}{2}}S \cdot T^{\frac{1}{2}} = S. \quad (5.9.19)$$

Это тождество может быть явно проверено.

Рассмотрим подробнее эту S -дуальность. При преобразовании S константа связи четырёхмерной теории преобразуется как

$$\tau_{\text{SW}} \xrightarrow{S} \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}}, \quad (5.9.20)$$

а функция λ в формуле (5.9.14) превращается в (см. (Д.3.4)):

$$\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1) \xrightarrow{S} \frac{1}{\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}, \quad (5.9.21)$$

так что под действием S -дуальности (сравн. (5.1.4))

$$\beta \xrightarrow{S} -\beta. \quad (5.9.22)$$

Таким образом мы показали, что дуальность на мировой поверхности (5.1.4) в точности соответствует S -дуальности четырёхмерной теории. Это проиллюстрировано на Рис. 5.5 и 5.6.

Самодуальная точка $\mathbb{WCP}(2, 2)$ модели $\beta = 0$ соответствует в четырёхмерии константе связи $\tau_{\text{SW}} = 1$. Под действием преобразования S -дуальности четырёхмерной теории это значение переходит в $\tau_{\text{SW}} = -1$, что отличается от исходного значения $\tau_{\text{SW}} = 1$ сдвигом θ_{4d} -угла на 2π . Четырёхмерная самодуальная точка $\tau = i$ соответствует в двумерии константе связи $\beta = i/2$, см. также Приложение Ж.

5.10 Обсуждение результатов

Некоторое время назад стало известно, что неабелев вихрь-струна в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД может становиться критическим [29]. Это происходит из-за того, что помимо четырёх трансляционных нулевых мод обычной струны АНО, у этой струны есть также шесть ориентационных и размерных нулевых мод. таргет-пространством эффективной теории на мировой поверхности становится $\mathbb{R}^4 \times Y_6$, где Y_6 — некомпактное шестимерное многообразие Калаби-Яу, так называемые разрешённый конифолд.

Это открыло путь к квантованию солитонной струны и к изучению такой калибровочной теории в терминах «эффективной» теории струн. Это представление было названо «обратной голографией». В связи с этим стало возможным количественное описание спектра адронов [30, 31, 73, 93]. В частности, в работах [73, 93] был использован подход «маленькой теории струн», а именно дуальность между критической струной на конифолде и некритической $c = 1$ струной с полем Лиувилля и компактным скаляром на самодуальном радиусе. В самодуальной точке теории на мировой поверхности $\beta = 0$ был обнаружен безмассовый барионный гипермультиплет b четырёхмерной теории, а также были найдены низко лежащие массивные состояния струны.

Ввиду таких сильных результатов возникает вопрос: можно ли увидеть эти состояния напрямую из теории поля? В настоящей Главе нам удалось это осу-

щество. Для этого мы воспользовались 2D-4D соответствием. В настоящем случае это означает совпадение между BPS спектрами в двумерной взвешенной сигма модели $\mathbb{WCP}(2, 2)$ (5.1.3) с одной стороны, и в четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД с калибровочной группой $U(2)$ и четырьмя ароматами кварков в кварковом вакууме. Это совпадение было отмечено в [32, 45] и позднее объяснено в [7, 8] с использованием представления о невылетающих монополях четырёхмерной теории как о кинках в теории на мировой поверхности. При этом мы можем свести задачу к изучению BPS спектра *самой* двумерной модели.

Начав со слабой связи, мы продвинулись в область сильной связи и дальше, в дуальную область слабой связи. Нам удалось построить самосогласованную картину BPS спектров в этих областях и кривых нейтральной устойчивости, разделяющих эти области.

Рассмотрение кинков теории на мировой поверхности вблизи самодуальной точки $\beta = 0$ привело нас к переоткрытию непертурбативной хиггсовской ветки, возникающей в этой точки. Мультиплетом, живущем на этой ветке, оказывается тот самый барионный мультиплет b , найденный из теории струн. Таким образом мы подтвердили самосогласованность струнного подхода для описания исходной калибровочной теории.

Кроме того, в этой модели стало возможным пронаблюдать механизм «вместо конфайнмента» в действии (см. [94, 95] и обзор [13]). В слабой связи $\beta \gg 1$ (β — константа связи сигма-модели) имеются пертурбативные состояния, которые выглядят как возбуждения $\mathbb{CP}(1)$ модели. В сильной связи $\beta \sim 1$ они распадаются на пары кинк-антикинк. Если продвинуться дальше, мы попадём в дуальную область слабой связи $\beta \ll -1$ со своими кинками и пертурбативными возбуждениями. Эта эволюция была описана в ходе данной Главы.

Такая картина на мировой поверхности прямо переносится на четырёхмерную теорию. В слабой связи $g^2 \ll 1$ спектр пертурбативных состояний четырёхмерной $\mathcal{N} = 2$ СКХД содержит экранированные кварки и массивные (за счёт механизма Хиггса) калибровочные бозоны. Есть также и солитонные состояния — монополи, соединённые неабелевыми трубками потока, образующие мезоны; однако, они очень тяжёлые. При переходе в область сильной связи $g^2 \sim 1$ экранированные кварки и массивные калибровочные бозоны распадаются в пары невылетающих монополей и антимонполей. Такая фаза «вместо конфайнмен-

та» является альтернативой обычной фазы конфайнмента в КХД.

Похожая фаза вместо-конфайнмента возникает при переходе от больших отрицательных β к сильной связи при $\beta \sim -1$. В четырёхмерной СКХД это соответствует переходу от точки $\tau = 0$ (на комплексной плоскости τ) к верхнему полукругу, показанному на Рис. 5.5. При этом важно, что S -дуальность в теории на мировой поверхности напрямую связана с S -дуальностью в четырёхмерной теории, см. Раздел 5.9.

Результаты данной Главы были опубликованы в статье [27].

Заключение

Представляемая диссертация посвящена исследованию явлений сильной связи, в особенности конфайнмента, в суперсимметричных калибровочных теориях. Центральным объектом исследования при этом является неабелева струна, которая ответственна за конфайнмент монополей в суперсимметричных аналогах КХД.

Мы начали с обзора основных фактов о неабелевых струнах в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД с калибровочной группой $U(N)$ и $N_f \geq N$ ароматами кварков. Эти струны похожи на струны Абрикосова-Нильсена-Олесена, но обладают дополнительными «ориентационными» внутренними степенями свободы (как бозонными n^l , так и фермионными ξ^l).

Затем мы попытались понять, что происходит с неабелевыми струнами и невылетающими монополями при переходе к $\mathcal{N} = 1$ СКХД. Это было сделано посредством деформирования исходной $\mathcal{N} = 2$ теории массовым слагаемым μ для присоединённой материи. В пределе больших μ эта теория переходит в $\mathcal{N} = 1$ СКХД.

Мы начали со случая $N_f = N$. Было найдено решение для неабелевой струны, а также выведена двумерная эффективная теория на мировой поверхности этой струны, описывающая динамику ориентационных мод. Эта теория оказывается бозонной $CP(N - 1)$ моделью с потенциалом, возникающим из-за разностей масс кварков. Фермионные суперпартнёры ξ^l бозонных ориентационных модулей n^l , имевшиеся в $\mathcal{N} = 2$, становятся тяжёлыми при больших μ и отщепляются.

Был изучен вопрос о том, что происходит с невылетающими монополями 'т Хоофта–Полякова при больших μ . Было показано, что, если разности масс кварков больше чем (экспоненциально малая) Λ_{CP} , невылетающие монополи становятся нестабильными при больших μ . Однако, если массы кварков равны

друг другу, то невылетающие монополи выживают в пределе $\mathcal{N} = 1$ КХД. Этот результат замечателен тем, что $\mathcal{N} = 1$ КХД находится в неабелевом режиме, и из квазиклассических соображений можно было бы ожидать, что в этой теории вообще нет монополей. Этот результат также говорит в пользу механизма «вместо конфайнмента» в $\mathcal{N} = 1$ КХД в сильной связи [13].

После этого описанное построение было обобщено на случай $N_f > N$. В $\mathcal{N} = 2$ теории неабелева струна при этом является семилокальной, т.е. обладает дополнительными модулями размера, соответствующими безмассовым полям, живущим на струне. Было обнаружено, что после μ -деформации размерные модули становятся массивными и отщепляются, оставляя за собой «локальную» неабелеву струну.

Далее была рассмотрена неабелева струна с точки зрения самой теории на мировой поверхности. Было обнаружено, что μ -деформация, индуцированная из четырёхмерной теории, приводит к тем же следствиям. Именно, невылетающие монополи, которые видны в двумерии как кинки, интерполирующие между разными вакуумами, действительно выживают в пределе больших μ при условии, что разности масс кварков Δm равны нулю (последние играют роль масштаба масс в эффективной теории). При этом заодно была найдена вся фазовая диаграмма на плоскости параметров $(\mu, \Delta m)$, отражающая богатую фазовую картину модели.

После этого мы совершили резкий разворот навстречу более симметричным разработкам, а именно неабелевым струнам в $\mathcal{N} = 2$ теории с калибровочной группой $U(N = 2)$, $N_f = 4$ ароматами кварков и ФИ членом [28]. В этом специальном случае теория на мировой поверхности является суперконформной и критической. В данной работе был изучен спектр BPS-защищённых состояний в теории на мировой поверхности, и затем при помощи 2D-4D соответствия результаты были проинтерпретированы в терминах СКХД в четырёхмерии.

В слабой связи спектр состоит из пертурбативных калибровочных бозонов и тяжёлых солитонных объектов (дионных башен) вместе с соответствующими суперпартнёрами. При переходе к области сильной связи пертурбативные состояния вместе с высоко лежащими дионами распадаются в монополь-антимонольные пары, каждая из которых затем остаётся связанной неабелевыми струнами. Это является явной демонстрацией механизма «вместо кон-

файнмента».

Более того, было подтверждено существование безмассового b -бариона, найденного ранее из подхода, в котором солитонный вихрь описывается как критическая суперструна. Этот важный результат является очередным подтверждением самосогласованности такого струнного подхода.

Теоретико-полевой подход, разработанный в данной работе, может предоставить возможность обобщения этих построений на произвольные N и N_f . Это, конечно же, весьма привлекательная перспектива. Существует также интересный вопрос о связи с программой исследований AdS/CFT. Есть предпосылки того, что возможно удастся понять причины или даже доказать гипотезу AdS/CFT в некоторых случаях.

Справедливости ради стоит отметить, что в данной работе не был рассмотрен вопрос о спонтанно нарушенной киральной симметрии. Дело в том, что в $\mathcal{N} = 2$ калибровочной теории киральная симметрия нарушается уже из-за юкавских взаимодействий. Хотя эта теория и называется «суперсимметричной КХД», она, конечно, несколько отличается от «исходной» КХД. Можно рассматривать киральную симметрию в $\mathcal{N} = 1$ СКХД, но этот вопрос весьма сложен и заслуживает отдельного внимания.

Представляемая диссертация расширяет представление о неабелевых струнах в суперсимметричных калибровочных теориях, а также о явлениях в сильной связи в целом. Хотя и не вполне ясно, приведёт ли нас данная дорога к окончательному решению проблемы конфайнмента в «настоящей» КХД, но мы наверняка сможем продвинуться весьма далеко.

В нелёгком путешествии по бурным водам конфайнмента в калибровочных теориях с сильной связью есть три важных стадии. Первая — понимание основ и самой природы конфайнмента. Можно утверждать, что мы достигли этой стадии в $\mathcal{N} = 2$ и $\mathcal{N} = 1$ теориях. Вторая — вычисление адронного спектра. В свете последних результатов (включая представленные в данной работе), мы как раз проходим эту стадию в $\mathcal{N} = 2$ теориях. Третья стадия — вывод низкоэнергетической эффективной теории пион-нуклонного взаимодействия напрямую из первых принципов. Пока что мы ещё не достигли такого уровня, но вполне возможно, что эти результаты находятся лишь на расстоянии вытянутой руки от нас.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Полезные формулы в двумерном пространстве-времени

В данном Приложении содержатся некоторые формулы и определения, часто используемые для описания физики в двумерном пространстве времени.

Тензоры в двумерии:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -), \quad (\text{A.1.1})$$

$$\epsilon_{01} = +1, \quad \epsilon^{01} = -1, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}. \quad (\text{A.1.3})$$

Дуальный «тензор» напряжённостей электрического поля:

$$F^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu = F^{01} = -F_{01}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$F_{01} = \mathcal{E}, \quad (\text{A.1.5})$$

где \mathcal{E} — напряжённость электрического поля, а $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

Действие для одного фотонного поля:

$$\int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} = \int d^2x \frac{1}{2} A^\mu (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu, \quad (\text{A.1.6})$$

Полезное тождество:

$$\begin{aligned} F^* \frac{1}{\square} F^* &= \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \frac{1}{\square} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \\ &= \partial_\mu A_\nu \frac{1}{\square} (-g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \partial_\alpha A_\beta \\ &\simeq -A_\nu \frac{1}{\square} (-\square g^{\nu\beta} + \partial^\nu \partial^\beta) A_\beta \\ &= A_\mu A^\mu - A_\mu \frac{\partial^\nu \partial^\beta}{\square} A_\beta, \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

где \simeq подразумевает интегрирование по частям, то есть равенство с точностью до поверхностных членов.

Гамма-матрицы:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{chir}} = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.8})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma_{\text{chir}}\} = 0. \quad (\text{A.1.9})$$

Производные:

$$\partial_L = \partial_t + \partial_z, \quad \partial_R = \partial_t - \partial_z, \quad (\text{A.1.10})$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu, \quad (\text{A.1.11})$$

$$\nabla = \gamma^\mu \nabla_\mu. \quad (\text{A.1.12})$$

Дираковский спинор:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}, \quad \bar{\Xi} = \Xi^\dagger \gamma_0 = (\bar{\xi}_R, \bar{\xi}_L), \quad (\text{A.1.13})$$

$$\xi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_{\text{chir}})\Xi, \quad \xi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{\text{chir}})\Xi. \quad (\text{A.1.14})$$

Связь формулировок в евклидовом пространстве и в пространстве Минковского.

Координаты:

$$x_M^\mu = \{t_M, z\}, \quad (\text{A.1.15})$$

$$x_E^\mu = \{t_E, z\}.$$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -). \quad (\text{A.1.16})$$

Функциональный интеграл в пространстве-времени Минковского:

$$\mathcal{A}_M = \int D\varphi e^{iS_M} = \int D\varphi e^{i \int \mathcal{L}_M dt_M}. \quad (\text{A.1.17})$$

При переходе к Евклидову пространству производится подстановка

$$\begin{aligned}
(x^0)_M &= t_M \longrightarrow -it_E = -i(x^0)_E, \\
(k_0)_M &\longrightarrow i(k_0)_E, \\
(k_1)_M &\longrightarrow (k_1)_E, \\
\Box &\longrightarrow -\Delta = -(\partial_0^2 + \partial_1^2), \\
\mathcal{L}_M &\longrightarrow -\mathcal{L}_E, \\
iS_M &\longrightarrow -S_E,
\end{aligned} \tag{A.1.18}$$

Oscillating path integrand \longrightarrow Exponentially decaying path integrand.

Например, для свободного скалярного поля

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi, \tag{A.1.19}$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\varphi(-\Delta + m^2)\varphi. \tag{A.1.20}$$

Случай со спинором Дирака несколько сложнее:

$$\begin{aligned}
\gamma_M^0 &\longrightarrow \gamma_E^0, \\
\gamma_M^1 &\longrightarrow i\gamma_E^1,
\end{aligned} \tag{A.1.21}$$

так что

$$\begin{aligned}
\{\gamma_M^\mu, \gamma_M^\nu\} = 2g^{\mu\nu} &\longrightarrow \{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}, \\
(\gamma^\mu k_\mu)_M &\longrightarrow i(\gamma^\mu k_\mu)_E.
\end{aligned} \tag{A.1.22}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
\partial_L^M &= \partial_{t_M} + \partial_z, & \partial_R^M &= \partial_{t_M} - \partial_z, \\
\partial_L^E &= \partial_{t_E} - i\partial_z, & \partial_R^E &= \partial_{t_E} + i\partial_z.
\end{aligned} \tag{A.1.23}$$

$$\begin{aligned}
\Psi^M &\longrightarrow \Psi^E, \\
\bar{\Psi}^M &\longrightarrow i\bar{\Psi}^E.
\end{aligned} \tag{A.1.24}$$

Поля Ψ^E и $\bar{\Psi}^E$ более не связаны сопряжением (на самом деле, в евклидовом пространстве нет понятия сопряжения).

Для фотона,

$$\begin{aligned}
(A_0)_M &\longrightarrow i(A_0)_E, \\
(A_1)_M &\longrightarrow (A_1)_E, \\
F_{01}^M &\longrightarrow iF_{01}^E, \\
(F^*)_M &\longrightarrow i(F^*)_E.
\end{aligned} \tag{A.1.25}$$

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^M F_M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{0j}^M F_{0j}^M - \frac{1}{4}F_{jk} F_{jk}, \quad (\text{A.1.26})$$

Функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^E F_E^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{0j}^E F_{0j}^E + \frac{1}{4}F_{jk} F_{jk}. \quad (\text{A.1.27})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Решение уравнений Дирака для суперориентационных мод

В этом Приложении мы решаем уравнения Дирака (2.5.14). После подстановки

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{1-}(r) &= \frac{1}{r\phi_2(r)}\Psi(r), \\ \lambda_{(1)}(r) &= ig_2^2\Lambda(r)\end{aligned}$$

уравнения (2.5.14) сводятся к

$$\begin{aligned}\frac{1}{rg_2^2\phi_1\phi_2}\partial_r\Psi &= \Lambda, \\ r\partial_r\Lambda + f_N\Lambda - \frac{\phi_1}{\phi_2}\Psi &= -\frac{\mu_2 f_N \phi_1}{2\phi_2},\end{aligned}\tag{Б.1.1}$$

откуда получается уравнение второго порядка на Ψ :

$$\partial_r^2\Psi - \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2}{N}(f - f_N)\right)\partial_r\Psi - g_2^2\phi_1^2\Psi = -\frac{\mu_2 f_N}{2}g_2^2\phi_1^2.\tag{Б.1.2}$$

Начнём с решения однородной версии уравнения (2.5.14), то есть положим $\mu_2 = 0$. Решение есть

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{1-} &= c\frac{f_N}{r\phi_2}, \\ \lambda_{(1)} &= c\frac{ig_2^2}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1}\right).\end{aligned}$$

с некоторой постоянной c . Оно соответствует $\Psi = f_N$; действительно, это — решение однородной версии уравнения (Б.1.2). С его помощью мы можем понизить порядок этого уравнения. Рассмотрим

$$\Psi(r) = \mu_2 f_N(r) \left(\int_0^r dx \chi(x) + c_1 \right),$$

с некоторой постоянной c_1 , тогда из (Б.1.2) следует, что

$$\partial_r \chi + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{f_N} r^2 g_2^2 (\phi_1^2 - \phi_2^2) - 1 - \frac{2}{N} (f - f_N) \right) \chi = -\frac{1}{2} g_2^2 \phi_1^2. \quad (\text{Б.1.3})$$

Это уравнение — первого порядка; его решение можно легко найти:

$$\chi = -\frac{g_2^2 r \phi_2^2}{2 f_N^2} \left(\int_0^r \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2}{\phi_2^2} f_N^2 + c_2 \right). \quad (\text{Б.1.4})$$

Собирая всё воедино, получим:

$$\bar{\psi}_{i-}(r) = -\mu_2 g_2^2 \frac{f_N(r)}{r \phi_2(r)} \left(\int_0^r dx \frac{x \phi_2^2(x)}{2 f_N^2(x)} \left(\int_0^x \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_N^2(y) + c_2 \right) + c_1 \right). \quad (\text{Б.1.5})$$

с некоторой постоянной c_1 .

Для того, чтобы это решение было регулярным в начале координат, нужно положить $c_1 = 0$. Что касается бесконечности, необходимо потребовать

$$c_2 = -\int_0^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_N^2(y).$$

Это даёт

$$\bar{\psi}_{i-}(r) = \frac{\mu_2 g_2^2}{2} \frac{f_W(r)}{r \phi_2(r)} \int_0^r dx \frac{x \phi_2^2(x)}{f_W^2(x)} \int_x^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_W^2(y). \quad (\text{Б.1.6})$$

для $\bar{\psi}_{i-}$, и

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)}(r) &\equiv \lambda_-^{22} + \lambda_-^{21} = \\ &= \frac{i \mu_2 g_2^2}{2} \left(\frac{g_2^2}{2} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \int_0^r dx \frac{x \phi_2^2(x)}{f_W^2(x)} \int_x^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_W^2(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_2}{\phi_1 f_W} \int_r^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_W^2(y) \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.1.7})$$

для $\lambda_{(1)}$. Прямой подстановкой было проверено, что эти моды действительно удовлетворяют уравнениям Дирака.

Теперь рассмотрим уравнения Дирака (2.5.18) с ненулевым собственным значением m_{or} . Применяя метод, разработанный выше, находим решение

$$\bar{\psi}_{i-}(r) = - \left(m_{or} - \mu_2 \frac{g_2^2}{2} \right) \frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)} \int_0^r dx \frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)} \int_x^\infty dy \frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} \quad (\text{Б.1.8})$$

для $\bar{\psi}_{i-}$, и

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)}(r) = & -i \frac{m_{or}}{2} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) - ig_2^2 \left(m_{or} - \mu_2 \frac{g_2^2}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \times \\ & \int_0^r dx \frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)} \int_x^\infty dy \frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} - i \left(m_{or} - \mu_2 \frac{g_2^2}{2} \right) \frac{\phi_2}{f_N\phi_1} \int_r^\infty dy \frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} \end{aligned} \quad (\text{Б.1.9})$$

для $\lambda_{(1)}$.

Можно видеть, что первое и последнее слагаемое в последней формуле при малых r ведут себя как $1/r$. Мы можем выбрать величину m_{or} так, чтобы обеспечить сокращение членов порядка $1/r$. Отсюда получается формула (2.5.19) для массы m_{or} .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Коэффициенты эффективного действия CP(N - 1) модели

В данном Приложении мы выводим эффективное действие (4.3.23).

В.1 Краткий обзор

Мы рассматриваем массы на круге (4.1.3). Эффективное действие выводится в окрестности вакуума с $\text{Im } \sigma = 0$.

Рассмотрим бозонные петли. В лагранжиане (4.1.13) можно разложить член с $\sigma - n$ взаимодействием как

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 &\approx \left| \sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right|^2 |n^i|^2 \\ &+ 2 \text{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i \right) |n^i|^2 \\ &- 2 \text{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \text{Im } m_i |n^i|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.1.1})$$

где $\delta\sigma$ — вакуумные флуктуации около вакуума с $\text{Im } \sigma = 0$. Диаграмма для кинетического слагаемого поля $\text{Re } \sigma$ пропорциональна $(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i)^2$, тогда как кинетическое слагаемое поля $\text{Im } \sigma$ пропорционально $(\text{Im } m_i)^2$. Вычисление самих диаграмм несложно, см. ниже.

Вычисление фермионных петель несколько сложнее. Массовую матрицу для фермионов можно извлечь из (4.1.13). Скажем, для аромата с номером i ,

$$M_i = \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i \right) \cdot \text{Id} + i (\text{Im } m_i) \cdot \gamma_{\text{chir}} \quad (\text{B.1.2})$$

где Id — 2×2 единичная матрица, а γ_{chir} — двумерный аналог матрицы γ_5 . Эта матрица γ_{chir} влияет на след по спинорным значкам. Скажем, фермионный

где $\text{Id} - 2 \times 2$ единичная матрица. Мы будем пользоваться упрощёнными обозначениями:

$$M = R - I \cdot i\gamma_{\text{chir}}, \quad M^\dagger = R + I \cdot i\gamma_{\text{chir}} \quad (\text{B.2.3})$$

$$|M|^2 = R^2 + I^2 \quad (\text{B.2.4})$$

Кроме того, нужно включить взаимодействие с вакуумными флуктуациями поля σ :

$$\mathcal{L}_{\text{ferm}} = i \bar{\Xi} \not{\nabla} \Xi - \bar{\Xi} M \Xi - \sqrt{2} \text{Re}(\sigma) \bar{\Xi} \Xi + i\sqrt{2} \text{Im}(\sigma) \bar{\Xi} \gamma_{\text{chir}} \Xi \quad (\text{B.2.5})$$

Масса аромата с номером k находится по формуле

$$\begin{aligned} |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 &= |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\mu)|^2 \\ R_{k^{\text{th}} \text{ flavor}} &= \text{Re}\left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k\right) - \lambda(\mu) \\ I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}} &= \text{Im}\left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k\right) \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

Напомним, что параметры масс m_k расположены на круге (4.1.3).

В.2.1 Кинетическое слагаемое фотона

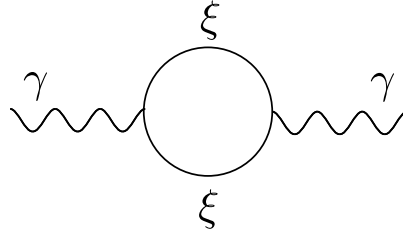


Рис. В.1: Перенормировка волновой функции фотона

Рассмотрим диаграмму на Рис. В.1. Запишем вклад от этой диаграммы:

$$i\Pi^{\mu\nu} = -(+i)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - M} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{\not{d}} - M} \right] \quad (\text{B.2.7})$$

Мы будем вычислять этот интеграл с использованием размерной регуляризации. Используя тождество

$$(\gamma^\mu k_\mu - M) (\gamma^\mu k_\mu + M^\dagger) = k^2 - |M|^2 + \underbrace{k_\mu (\gamma^\mu M^\dagger - M \gamma^\mu)}_{=0} \quad (\text{B.2.8})$$

можно переписать фермионный пропагатор как

$$\frac{i}{\not{k} - M} = i \frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \quad (\text{B.2.9})$$

Начнём с вычисления следа в (B.2.7). Мы будем пользоваться следующими тождествами в размерности пространства $d = 2$:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] &= d (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] &= -\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma_{\text{chir}} \gamma^\nu \gamma_{\text{chir}}] = d g^{\mu\nu} \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_{\text{chir}}] &= -d \epsilon^{\mu\nu} \\ \text{Tr} [\text{нечётное } \# \gamma^\mu] &= \text{Tr} [\gamma_{\text{chir}} \cdot \text{нечётное } \# \gamma^\mu] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

Из них следует, что

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{q}] &= d (k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu - (k \cdot q) g^{\mu\nu}) \\ \text{Tr} [\gamma^\mu M^\dagger \gamma^\nu M^\dagger] &= d |M|^2 g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{B.2.11})$$

Таким образом, след в числителе (B.2.7) становится

$$\begin{aligned} &\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + M^\dagger) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + M^\dagger)] \\ &= \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu (\not{k} + \not{q})] + \text{Tr} [\gamma^\mu M^\dagger \gamma^\nu M^\dagger] + \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu M^\dagger] + \text{Tr} [\gamma^\mu M^\dagger \gamma^\nu (\not{k} + \not{q})] \\ &= d [k^\mu (k + q)^\nu + k^\nu (k + q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k + q) - |M|^2)] \end{aligned} \quad (\text{B.2.12})$$

Следующий расчёт аналогичен [96, Параграф 7.5]. Вычислим интеграл в (B.2.7), используя трюк Фейнмана:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - |M|^2) ((k + q)^2 - |M|^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - |M|^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - |M|^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.2.13})$$

где $l = k + xq$. В терминах переменной l , числитель в формуле (B.2.7) равен d умножить на

$$\begin{aligned} 2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu} l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (|M|^2 + x(1-x)q^2) \\ + \text{слагаемые, линейные по } l \end{aligned} \quad (\text{B.2.14})$$

Выполним поворот Вика:

$$l^0 = i l_E^0, \quad l_\mu l^\mu = -(l_E)^2 \quad (\text{B.2.15})$$

В терминах l_E интеграл (B.2.7) становится

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu} = & -i d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \\ & \times \frac{-g^{\mu\nu} \frac{2}{d} l_E^2 + g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(|M|^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2} \end{aligned} \quad (\text{B.2.16})$$

где было введено обозначение $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, и мы также воспользовались тем фактом, что в d -мерном пространстве (см. [96, стр. 251 формула (7.87)])

$$\int d^d l \ l^\mu l^\nu = \int d^d l \ \frac{1}{d} g^{\mu\nu} l^2 \quad (\text{B.2.17})$$

Теперь можно вычислить интегралы по импульсу l_E (см. [96, стр. 251 формула (7.85)]):

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \quad (\text{B.2.18})$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \quad (\text{B.2.19})$$

Интеграл (B.2.19) расходится, и от него мог бы получиться полюс при $d = 2$, если бы не множитель $1 - d/2$ в выражении (B.2.16):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{\left(-\frac{2}{d} + 1\right) l_E^2 g^{\mu\nu}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \\ &= g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (-\Delta) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &= g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (-|M|^2 + x(1-x)q^2) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \end{aligned} \quad (\text{B.2.20})$$

Совмещая это с (В.2.18), получим для поляризованного оператора (В.2.16):

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(q) &= -d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \\
&\quad \times [g^{\mu\nu} (-|M|^2 + x(1-x)q^2) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu \\
&\quad + g^{\mu\nu} (|M|^2 + x(1-x)q^2)] \\
&= (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \cdot \Pi(q^2)
\end{aligned} \tag{В.2.21}$$

где

$$\begin{aligned}
\Pi(q^2) &= \frac{2d\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{\Delta^{2-d/2}} \\
&\xrightarrow{d=2} \frac{4}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{1}{|M|^2}
\end{aligned} \tag{В.2.22}$$

Для того, чтобы получить полный вклад фермионов в кинетический член фотона, необходимо просуммировать по всем ароматам фермионов. Используя (4.1.3) и (В.2.6), получим из (В.2.22) нормировку фотона

$$\left(\frac{1}{e_\gamma^2} \right)_{\text{ferm}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{1}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{В.2.23}$$

где используется обозначение

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{th} \text{ flavor}}|^2. \tag{В.2.24}$$

В.2.2 Кинетическое слагаемое поля $\text{Re } \sigma$

Рассмотрим диаграмму на Рис. В.2 с $\text{Re } \sigma$ внешними «ногами». Соответствующий вклад равен

$$\begin{aligned}
iD_{\text{Re } \sigma} &= -(i\sqrt{2})^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - M} \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \right] \\
&= -2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \right]
\end{aligned} \tag{В.2.25}$$

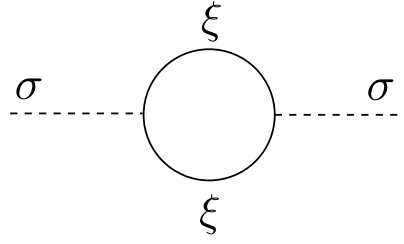


Рис. В.2: Перенормировка волновой функции скаляра

Используя тождества (В.2.10), можно вычислить следы:

$$\begin{aligned}\text{Tr} [\not{k}\not{q}] &= d(k \cdot q) \\ \text{Tr} [M^\dagger M^\dagger] &= d(R^2 - I^2)\end{aligned}\tag{В.2.26}$$

где вещественная R и мнимая I части массы определены в (В.2.3).

Мы снова будем вычислить соответствующий интеграл в размерной регуляризации и с использованием трюка Фейнмана (В.2.13). Вводя $l = k + xq$, можно переписать числитель в выражении (В.2.25) как

$$\begin{aligned}\text{Num} &= d((k \cdot (k + q)) + (R^2 - I^2)) \\ &= d(l^2 - x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)) + \text{слагаемые, линейные по } l\end{aligned}\tag{В.2.27}$$

Вводя снова $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, выполняя поворот Вика (В.2.15) и используя (В.2.18) и (В.2.19) приходим к

$$\begin{aligned}D_{\text{Re}\sigma} &= -2d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{-l_E^2 - x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= -2d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \frac{d}{2} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} + \frac{-x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta^{2-d/2}} \right)\end{aligned}\tag{В.2.28}$$

Обозначим

$$1 - \frac{d}{2} = \varepsilon, \quad d = 2 - 2\varepsilon\tag{В.2.29}$$

Используя разложение гамма-функции

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon} - \gamma\tag{В.2.30}$$

$$\Gamma(1 + \varepsilon) = \varepsilon\Gamma(\varepsilon) \approx 1 - \varepsilon\gamma\tag{В.2.31}$$

можно переписать первый (сингулярный) член в (B.2.28) как

$$\begin{aligned}
\text{singular} &= \frac{d}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \frac{d}{2} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} \\
&= \frac{2 - 2\varepsilon}{(4\pi)^{1-\varepsilon}} \Gamma(1 + \varepsilon) \frac{1}{\Delta^\varepsilon} (1 - \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \\
&= \frac{2}{4\pi} (1 - \varepsilon)^2 \Gamma(1 + \varepsilon) \left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \\
&\approx \frac{2}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon\gamma) \left(1 + \varepsilon \ln \frac{4\pi}{\Delta}\right) \\
&\approx \frac{2}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - 2 + \ln 4\pi - \ln \Delta\right)
\end{aligned} \tag{B.2.32}$$

Мы видим, что это выражение является расходящимся. Если бы мы применили регуляризацию Паули-Вилларса, то вместо (B.2.32) получилось бы

$$\text{singular} = \frac{2}{4\pi} (-1 + \ln M_{\text{uv}}^2 - \ln \Delta) \tag{B.2.33}$$

В любом случае, нас будет интересовать только поведение при $q^2 \rightarrow 0$, в частности слагаемые порядка $O(q^2)$, так что для наших целей мы можем выбросить расходящиеся вклады. Оставшийся интеграл равен

$$\begin{aligned}
D_{\text{Re } \sigma}^{\text{fin}} &= -4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{\Delta}{|M|^2} + \frac{-x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta} \right) \\
&= -4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-x^2 q^2 + (R^2 - I^2)}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right) \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} -4 \frac{1}{4\pi} q^2 \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{|M|^2} + \frac{1}{6} \frac{R^2 - I^2}{|M|^4} \right) \\
&= 2 \frac{1}{4\pi} q^2 \frac{1}{3} \frac{|M|^2 + 2I^2}{|M|^4}
\end{aligned} \tag{B.2.34}$$

Для того, чтобы получить полный вклад фермионов в кинетическое слагаемое, нужно просуммировать по всем фермионным ароматам. Используя (4.1.3) и (B.2.6), получим из (B.2.34) нормировочный множитель

$$\left(\frac{2}{e_{\text{Re } \sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[2 \frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 + 2I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}^2}{|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^4} \right] \tag{B.2.35}$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2}\right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{M_{\xi_k}^2 + 2(\text{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k))^2}{M_{\xi_k}^4} \right] \quad (\text{B.2.36})$$

где мы использовали обозначение

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 \quad (\text{B.2.37})$$

В вакууме, в котором $\text{Im } \sigma = 0$, имеем

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2}\right)_{\text{ferm}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{M_{\xi_k}^2 + 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} \right]. \quad (\text{B.2.38})$$

B.2.3 Кинетическое слагаемое поля $\text{Im } \sigma$

Расчёт аналогичен предыдущему подразделу.

Рассмотрим диаграмму на Рис. В.2, но с внешними «ногами» $\text{Im } \sigma$. Соответствующий вклад равен

$$\begin{aligned} iD_{\text{Im } \sigma} &= -(-\sqrt{2})^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\gamma_{\text{chir}} \frac{i}{\not{k} - M} \gamma_{\text{chir}} \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \right] \\ &= 2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\gamma_{\text{chir}} \frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma_{\text{chir}} \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2.39})$$

Используя тождества (В.2.10), можно вычислить следы:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_{\text{chir}} \not{k} \gamma_{\text{chir}} \not{q}] &= -d(k \cdot q) \\ \text{Tr} [\gamma_{\text{chir}} M^\dagger \gamma_{\text{chir}} M^\dagger] &= d(R^2 - I^2) \end{aligned} \quad (\text{B.2.40})$$

где вещественная и мнимая части массы, R и I , определены (В.2.3).

Мы вновь будем вычислить этот интеграл с использованием размерной регуляризации и трюка Фейнмана (В.2.13). Вводя $l = k + xq$, можно переписать числитель в (В.2.25) следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Num} &= d(-k \cdot (k + q)) + (R^2 - I^2) \\ &= d(-l^2 + x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)) + \text{слагаемые, линейные по } l \end{aligned} \quad (\text{B.2.41})$$

Обозначая снова $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, выполняя виков поворот (В.2.15) и используя (В.2.18) и (В.2.19), приходим к

$$\begin{aligned} iD_{\text{Im}\sigma} &= 2d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2 + x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= 2d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \frac{d}{2} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} + \frac{x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta^{2-d/2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{В.2.42})$$

История с сингулярностями снова повторяется. Выбрасывая слагаемые, не зависящие от q^2 , получаем

$$\begin{aligned} iD_{\text{Im}\sigma}^{\text{fin}} &= 4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(-\ln \frac{\Delta}{|M|^2} + \frac{x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta} \right) \\ &= 4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(\frac{+x^2q^2 + (R^2 - I^2)}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right) \\ &\underset{q \rightarrow 0}{\approx} 4 \frac{1}{4\pi} q^2 \left(+\frac{1}{3} \frac{1}{|M|^2} + \frac{1}{6} \frac{R^2 - I^2}{|M|^4} \right) \\ &= 2 \frac{1}{4\pi} q^2 \frac{1}{3} \frac{3|M|^2 - 2I^2}{|M|^4} \end{aligned} \quad (\text{В.2.43})$$

Чтобы получить полный вклад от фермионов, нужно просуммировать по всем ароматам. Используя (4.1.3) и (В.2.6), из (В.2.43) получим нормировочный множитель

$$\left(\frac{2}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[2 \frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{3|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 - 2I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}^2}{|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^4} \right] \quad (\text{В.2.44})$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{3M_{\xi_k}^2 - 2(\text{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k))^2}{M_{\xi_k}^4} \right] \quad (\text{В.2.45})$$

где снова было использовано обозначение

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 \quad (\text{В.2.46})$$

Для вакуума, в котором $\text{Im}\sigma = 0$, имеем

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3M_{\xi_k}^2 - 2(\text{Im} m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} \right]. \quad (\text{В.2.47})$$

В.2.4 Смешивание $A_\mu - \text{Im } \sigma$

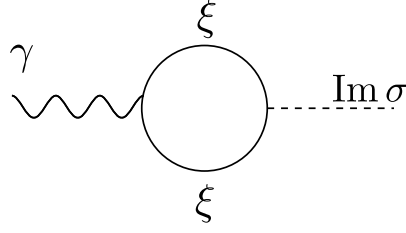


Рис. В.3: Смешивание фотона и скаляра

Рассмотрим диаграмме на Рис. В.3. Соответствующий вклад можно записать как

$$\begin{aligned}
 iV_{\text{mix}} &= - (+i) (-\sqrt{2}) \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - M} \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \gamma^{\text{chir}} \right] \\
 &= \sqrt{2} i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma^{\text{chir}} \right]
 \end{aligned} \tag{B.2.48}$$

Используя тождества (В.2.10), можно вычислить след:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\not{k} \gamma^\mu (\not{k} + \not{q}) \gamma^{\text{chir}}] &= 0 \\
 \text{Tr} [\not{k} \gamma^\mu M^\dagger \gamma^{\text{chir}}] &= d k_\nu (-R \epsilon^{\nu\mu} + i I g^{\nu\mu}) \\
 \text{Tr} [M^\dagger \gamma^\mu (\not{k} + \not{q}) \gamma^{\text{chir}}] &= d (-R \epsilon^{\mu\nu} + i I g^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu) \\
 \text{Tr} [M^\dagger \gamma^\mu M^\dagger \gamma^{\text{chir}}] &= 0
 \end{aligned} \tag{B.2.49}$$

где R и I введены в (В.2.3).

Вычисляем этот интеграл в размерной регуляризации, используя трюк Фейнмана (В.2.13). Вводя $l = k + xq$, можно переписать числитель в (В.2.25) как

$$\begin{aligned}
 \text{Num} &= d (k_\nu (-R \epsilon^{\nu\mu} + i I g^{\nu\mu}) + (-R \epsilon^{\mu\nu} + i I g^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu)) \\
 &= d (k_\nu (R \epsilon^{\mu\nu} + i I g^{\mu\nu}) + (-R \epsilon^{\mu\nu} + i I g^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu)) \\
 &= d (-R q_\nu \epsilon^{\mu\nu} + i I (2k_\nu + q_\nu) g^{\mu\nu}) \\
 &= d (-R q_\nu \epsilon^{\mu\nu} + i I (1 - 2x) q_\nu g^{\mu\nu}) + \text{слагаемые, линейные по } l
 \end{aligned} \tag{B.2.50}$$

Обозначая $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, выполняя поворот Вика (В.2.15) и используя

(B.2.18) и (B.2.19), приходим к

$$\begin{aligned}
V_{\text{mix}} &= \sqrt{2}d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(1-2x)q_\nu g^{\mu\nu}}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\
&= -\sqrt{2}d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(1-2x)q_\nu g^{\mu\nu}}{\Delta^{2-d/2}} \right) \\
&\stackrel{d=2}{=} -2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(1-2x)q_\nu g^{\mu\nu}}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&= -2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu}}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&\stackrel{q \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{R}{|M|^2} q_\nu \epsilon^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{B.2.51}$$

Для того, чтобы получить полный вклад от фермионов, просуммируем по всем ароматам. Используя (4.1.3) и (B.2.6), получим из (B.2.51) константу смешивания

$$\sqrt{2}b_{\gamma, \text{Im} \sigma} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{R}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{B.2.52}$$

или, что то же самое,

$$b_{\gamma, \text{Im} \sigma} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\text{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k) - \lambda(\mu)}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{B.2.53}$$

где мы обозначили

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 \tag{B.2.54}$$

В вакууме, где $\text{Im} \sigma = 0$, это становится

$$b_{\gamma, \text{Im} \sigma} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\mu)}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{B.2.55}$$

Этот ответ соответствует слагаемому в эффективном лагранжиане

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{mix}} = \sqrt{2}b \text{Im} \sigma \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = -\sqrt{2}b \text{Im} \sigma F^*. \tag{B.2.56}$$

В.2.5 Возможное смешивание $A_\mu - \text{Re } \sigma$

Рассмотрим диаграмму, похожую на Рис. В.3, только с $\text{Re } \sigma$ вместо $\text{Im } \sigma$. Соответствующий вклад равен

$$\begin{aligned} iV_{\text{mix Re}} &= -(+i)(-i\sqrt{2}) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - M} \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \right] \\ &= -\sqrt{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{В.2.57})$$

Используя тождества (В.2.10), вычисляем след:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\not{k} \gamma^\mu (\not{k} + \not{q})] &= 0 \\ \text{Tr} [\not{k} \gamma^\mu M^\dagger] &= d k_\nu (Rg^{\nu\mu} - iI\epsilon^{\nu\mu}) \\ \text{Tr} [M^\dagger \gamma^\mu (\not{k} + \not{q})] &= d (Rg^{\mu\nu} - iI\epsilon^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu) \\ \text{Tr} [M^\dagger \gamma^\mu M^\dagger] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{В.2.58})$$

Вводя $l = k + xq$, переписываем числитель в (В.2.25):

$$\begin{aligned} \text{Num} &= d (k_\nu (Rg^{\nu\mu} - iI\epsilon^{\nu\mu}) + (Rg^{\mu\nu} - iI\epsilon^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu)) \\ &= d (k_\nu (Rg^{\mu\nu} + iI\epsilon^{\mu\nu}) + (Rg^{\mu\nu} - iI\epsilon^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu)) \\ &= d (Rg^{\mu\nu} (2k_\nu + q_\nu) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu) \\ &= d (Rg^{\mu\nu} q_\nu (1 - 2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu) + \text{слагаемые, линейные по } l \end{aligned} \quad (\text{В.2.59})$$

Обозначая $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, выполняя виков поворот (В.2.15) и используя (В.2.18) и (В.2.19), получаем

$$\begin{aligned} V_{\text{mix Re}} &= i\sqrt{2}d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{Rg^{\mu\nu} q_\nu (1 - 2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= i\sqrt{2}d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) \left(\frac{Rg^{\mu\nu} q_\nu (1 - 2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{\Delta^{2-d/2}} \right) \\ &\stackrel{d=2}{=} i2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{Rg^{\mu\nu} q_\nu (1 - 2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\ &= i2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{-iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\ &\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{I}{|M|^2} q_\nu \epsilon^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{В.2.60})$$

Чтобы получить полный вклад от фермионов, просуммируем по всем ароматам. Используя (4.1.3) и (B.2.6), получаем из (B.2.60) константу смешивания

$$b_{\text{mix Re}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}}{M_{\xi_k}^2} \quad (\text{B.2.61})$$

или, что то же самое,

$$b_{\text{mix Re}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k)}{M_{\xi_k}^2} \quad (\text{B.2.62})$$

Это равно нулю в вакууме с $\text{Im} \sigma = 0$.

По той же причине, диаграмма на Рис. B.2 с одним внешним хвостом $\text{Re} \sigma$ и другим $\text{Im} \sigma$ (то есть возможное смешивание $\text{Re} - \text{Im}$) также даёт нулевой вклад.

B.3 Бозонные петли

B.3.1 Взаимодействия полей

Бозонный лагранжиан нашей модели (в евклидовой формулировке):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{bos}} = & |\nabla_\mu n^i|^2 + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta) \\ & + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i0} |n^i|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.3.1})$$

Мы можем разложить слагаемое с σ как

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 \approx & \left| \sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right|^2 + 2 \text{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \text{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i) \\ & + 2 \text{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \text{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i) \end{aligned} \quad (\text{B.3.2})$$

где $\delta\sigma$ — вакуумные флуктуации.

Вводя массы полей n^k

$$m_{n_k}^2 = i\langle D \rangle + v(\mu)\Delta m_k + \left| \sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k \right|^2 \quad (\text{B.3.3})$$

можно выписать соответствующий лагранжиан (в пространстве Минковского)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{bos}} &= |\nabla_{\mu} n^i|^2 - \sum_i m_{n_k}^2 |n^i|^2 \\ &\quad + \sum_i 2 \operatorname{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \operatorname{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i) |n^i|^2 \\ &\quad + \sum_i 2 \operatorname{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \operatorname{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i) |n^i|^2\end{aligned}\quad (\text{B.3.4})$$

Для простоты, в петлевых расчётах мы будем вычислять диаграммы Фейнмана только для одного аромата, и только потом просуммируем по всем ароматам. Таким образом, будем работать с лагранжианом

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{single flavor}} &= |\nabla_{\mu} n|^2 - M^2 |n|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot R |n|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot I |n|^2\end{aligned}\quad (\text{B.3.5})$$

где мы обозначили

$$\begin{aligned}R &= \operatorname{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i) \\ I &= \operatorname{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i)\end{aligned}\quad (\text{B.3.6})$$

В.3.2 Кинетическое слагаемое фотона

Рассмотрим диаграмму как на Рис. В.1, только с бозонной петлёй. Соответствующий вклад:

$$\begin{aligned}i\Pi^{\mu\nu} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} i(-(k^{\mu} + q^{\mu}) - k^{\mu}) \frac{i}{k^2 - M^2} i(-(k^{\nu} + q^{\nu}) - k^{\nu}) \frac{i}{(k + q)^2 - M^2} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (2k^{\mu} + q^{\mu})(2k^{\nu} + q^{\nu}) \frac{1}{k^2 - M^2} \frac{1}{(k + q)^2 - M^2}\end{aligned}\quad (\text{B.3.7})$$

Последующий расчёт аналогичен [96, Параграф 7.5]. Мы вычислим этот интеграл с использованием размерной регуляризации и трюка Фейнмана (В.2.13):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k^2 - |M|^2)((k + q)^2 - |M|^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - |M|^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - |M|^2)^2}\end{aligned}\quad (\text{B.3.8})$$

где $l = k + xq$. В терминах l , числитель в (В.3.7) равен

$$\begin{aligned} \text{Num} &= (2k^\mu + q^\mu)(2k^\nu + q^\nu) \\ &= (2l^\mu + (1 - 2x)q^\mu)(2l^\nu + (1 - 2x)q^\nu) \\ &= 4l^\mu l^\nu + (1 - 2x)^2 q^\mu q^\nu + \text{слагаемые, линейные по } l \end{aligned} \quad (\text{В.3.9})$$

Выполним поворот Вика:

$$l^0 = i l_E^0, \quad l_\mu l^\mu = -(l_E)^2 \quad (\text{В.3.10})$$

В терминах l_E интеграл (В.3.7) равен

$$i\Pi^{\mu\nu} = i \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{-l_E^2 \frac{4}{d} g^{\mu\nu} + (1 - 2x)^2 q^\mu q^\nu}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (\text{В.3.11})$$

Где мы ввели $\Delta = |M|^2 - x(1 - x)q^2$, а также воспользовались тем, что в d -мерном пространстве (см. [96, стр. 251 формула (7.87)])

$$\int d^d l \, l^\mu l^\nu = \int d^d l \, \frac{1}{d} g^{\mu\nu} l^2 \quad (\text{В.3.12})$$

Теперь, вычислим интеграл по импульсу l_E (см. [96, стр. 251 формула. (7.85)]):

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \quad (\text{В.3.13})$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \quad (\text{В.3.14})$$

Получим для поляризационного оператора (В.3.11):

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \\ &\quad \times \left[-2g^{\mu\nu} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \frac{(1 - 2x)^2 q^\mu q^\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{|M|^2 - x(1 - x)q^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{В.3.15})$$

Это выражение имеет полюс при $d = 2$, но мы можем его проигнорировать, так как нас интересует только квадратичная по q^μ часть, и полюс не содержит

таких вкладов¹. Таким образом, конечный вклад при $d = 2$ равен

$$\begin{aligned}
\Pi_{\text{fin}}^{\mu\nu}(q) &= \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left[2g^{\mu\nu} \ln \frac{|M|^2 - x(1-x)q^2}{|M|^2} + \frac{(1-2x)^2 q^\mu q^\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right] \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left[-2g^{\mu\nu} \frac{-x(1-2x)q^2}{|M|^2 - x(1-x)q^2} + \frac{(1-2x)^2 q^\mu q^\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right] \\
&= (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \cdot \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \frac{(1-2x)^2}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{|M|^2}
\end{aligned} \tag{B.3.16}$$

Чтобы найти полный вклад от бозонов, нужно просуммировать по всем ароматам. Используя (4.1.3) и (B.3.3), получим из (B.3.16) нормировку фотона

$$\left(\frac{1}{e_\gamma^2} \right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{m_{n_k}^2} \right] \tag{B.3.17}$$

где мы ввели обозначение

$$m_{n_k}^2 \equiv M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}^2 \tag{B.3.18}$$

В.3.3 Кинетическое слагаемое поля $\text{Re } \sigma$

Рассмотрим диаграмму как на Рис. В.2, только со скалярными полями n в петле и внешними хвостами $\text{Re } \sigma$. Соответствующий вклад равен

$$\begin{aligned}
iD_{\text{Re } \sigma} &= (iR)^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{k^2 - M^2} \frac{i}{(k+q)^2 - M^2} \right] \\
&= R^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{1}{k^2 - M^2} \frac{1}{(k+q)^2 - M^2} \right]
\end{aligned} \tag{B.3.19}$$

¹Этот полюс в любом случае сокращается с полюсом из однопетлевой диаграммы с двумя внешними хвостами и четырёхточечным взаимодействием.

Вводя снова $\Delta = M^2 - x(1-x)q^2$, выполняя поворот (В.2.15) и используя (В.2.18), приходим к

$$\begin{aligned}
D_{\text{Re}\sigma} &= R^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\
&= R^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\
&\stackrel{d=2}{=} R^2 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \frac{1}{M^2 - x(1-x)q^2} \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4\pi} \frac{R^2}{M^4} \frac{1}{6} q^2
\end{aligned} \tag{В.3.20}$$

Для того, чтобы получить полный вклад от бозонов, нужно просуммировать по всем ароматам. Используя (4.1.3) и (В.3.3), получим из (В.3.20) нормировку

$$\left(\frac{2}{e_{\text{Re}\sigma}^2}\right)_{\text{bos}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[2 \frac{1}{4\pi} \frac{4}{6} \frac{(\text{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i))^2}{m_{n_k}^4} \right] \tag{В.3.21}$$

или, что то же самое,

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2}\right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{(\text{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i))^2}{m_{n_k}^4} \right] \tag{В.3.22}$$

В вакууме, в котором $\text{Im}\sigma = 0$, имеем:

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2}\right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re}m_i)^2}{m_{n_k}^4} \right] \tag{В.3.23}$$

В.3.4 Кинетическое слагаемое поля $\text{Im}\sigma$

Вычисление кинетического слагаемого поля $\text{Im}\sigma$ почти такое же, как и для $\text{Re}\sigma$, за исключением вершинного множителя I вместо R . Таким образом, для одного аромата имеем (сравн. (В.3.20))

$$D_{\text{Im}\sigma} \underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4\pi} \frac{I^2}{M^4} \frac{1}{6} q^2 \tag{В.3.24}$$

тогда как полный бозонный вклад в вакуум с $\text{Im}\sigma = 0$ равен

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2}\right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{(\text{Im}m_i)^2}{m_{n_k}^4} \right] \tag{В.3.25}$$

В.3.5 Возможные смешивания

Есть ещё несколько диаграмм с бозонными петлями, которые, однако, не дают вклада.

Во-первых, есть диаграмма со смешиванием $\text{Im } \sigma - \text{Re } \sigma$. Но она пропорциональна

$$[\text{Im } \sigma - \text{Re } \sigma]_{\text{mixing}} \sim \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(\text{Re} \left(\sqrt{2} \langle \sigma \rangle - m_i \right) \right) \cdot \left(\text{Im} \left(\sqrt{2} \langle \sigma \rangle - m_i \right) \right) \right\} \quad (\text{В.3.26})$$

а это зануляется в вакууме с $\text{Im } \sigma = 0$.

Во-вторых, есть также диаграммы со смешиваниями $A_\mu - \text{Re } \sigma$ и $A_\mu - \text{Im } \sigma$. Однако, они пропорциональны q^μ безо всяких $\epsilon^{\mu\nu}$, а значит, они должны быть равны нулю по калибровочной инвариантности. (На самом деле, мы явно проверили, что они действительно зануляются.)

В.4 Окончательный ответ

Собираю вместе все эти результаты, мы приходим к эффективному действию (4.3.23)

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} |\partial_\mu \text{Im } \sigma|^2 + \frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2} |\partial_\mu \text{Re } \sigma|^2 - V(\sigma) - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} \text{Im } \sigma F^* \right\}. \quad (\text{В.4.1})$$

Константы этого действия приведены в формулах (В.2.23) и (В.3.17), (В.2.38) и (В.3.23), (В.2.47) и (В.3.25), (В.2.55), так что мы получаем (4.3.25).

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Пропагатор фотона в двумерном пространстве-времени

В настоящем Приложении мы обсудим вопрос о массе фотона, совместимой с калибровочной инвариантностью.

Г.1 Пропагатор фотона в обобщённой калибровке

Начнём с «голового» пропагатора фотона в обобщённой калибровке Фейнмана:

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}^0 &= -i e_\gamma^2 \frac{1}{k^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \nu^{-1}) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \\
 &= -i e_\gamma^2 \left[\frac{1}{k^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \nu^{-1} \frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right]
 \end{aligned}
 \tag{Г.1.1}$$

Как можно видеть, в нём содержатся, вообще говоря, как поперечная, так и продольная части.

Теперь рассмотрим смешивание фотона и скаляра, как в Разделе (4.3.2), только в суперсимметричном случае. (Вопрос, который мы здесь рассматриваем, в такой постановке выглядит наиболее просто.) Для того, чтобы получить полный фотонный пропагатор, следует рассмотреть сумму диаграмм, в которых итерируются фотон и скаляр (см. Рис. 4.5). Такое итерирование даёт для полного пропагатора фотона

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^0 + G_{\mu\nu'}^0 \omega^{\nu'\mu'} G_{\mu'\nu}^0 + \dots
 \tag{Г.1.2}$$

где величина $\omega^{\nu'\mu'}$ есть линия $\text{Im } \sigma$ с двумя вершинами («ампутированная» диа-

грамма фотон-скаляр-фотон),

$$\begin{aligned}\omega^{\alpha\beta} &= i\sqrt{2}b_{\gamma,\text{Im}\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta'}k_{\beta'} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) e_{\text{Im}\sigma}^2 \frac{1}{k^2} \cdot i\sqrt{2}b_{\gamma,\text{Im}\sigma}k_{\alpha'}\varepsilon^{\alpha'\beta} \\ &= -ie_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma,\text{Im}\sigma}^2 \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2}\right)\end{aligned}\quad (\text{Г.1.3})$$

Этот результат чисто поперечен, и поэтому перенормируется только поперечная часть пропагатора (Г.1.1). Таким образом, можно найти полный пропагатор фотона:

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = -ie_\gamma^2 \left[\frac{1}{k^2 - m_\gamma^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \nu^{-1} \frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right] \quad (\text{Г.1.4})$$

где масса фотона равна массе поля $\text{Im}\sigma$,

$$m_\gamma^2 = m_{\text{Im}\sigma}^2 = e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma,\text{Im}\sigma}^2 = 4\Lambda^2. \quad (\text{Г.1.5})$$

Результат (Г.1.4) был получен нами сперва прямым вычислением, и потом с применением общей формулы из [97, page 325 equation 7-17]¹, результаты, разумеется, совпадают. Голый пропагатор (Г.1.1) перенормируется таким образом, что полюс перед поперечной частью сдвигается, а продольная часть остаётся неизменной.

Формулу (Г.1.4) можно сравнить с пропагатором массивного фотона в обобщённой калибровке (см. например [97, page 619 equation 12-226])

$$G_{\mu\nu}^{\text{mass}} = -ie_\gamma^2 \frac{1}{k^2 - m_\gamma^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \nu^{-1}) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - m_\gamma^2/\nu} \right). \quad (\text{Г.1.6})$$

Можно видеть, что (Г.1.4) и (Г.1.6), вообще говоря, не совпадают. Но почему? Оказывается, что в двумерном пространстве-времени есть больше одного способа ввести массу фотона. Пропагатор (Г.1.6) соответствует только одному из них — механизму Хиггса.

Г.2 Массивный фотон

Рассмотрим обычное действие массивного векторного поля в пространстве-времени Минковского

$$S = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} A_\mu A^\mu \right\}. \quad (\text{Г.2.1})$$

¹Заметим, что в [97] приняты другие соглашения о нормировании поля фотона.

Это действие само по себе не является калибровочно инвариантным. (Его можно было бы сделать калибровочно инвариантным через механизм Хиггса.) Обобщённый пропагатор фотона в этом случае находится по формуле (Г.1.6).

Однако, в двумерном пространстве-времени есть иной способ ввести массу фотона. Этот второй способ не разрушает калибровочную инвариантность. Рассмотрим эффективное действие для модели Швингера (в котором фермионы отынтегрированы):

$$\begin{aligned} S_{\text{schw}} &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} F^* \frac{1}{\square} F^* \right\} \\ &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{m_\gamma^2}{2} A_\mu \frac{\partial^\nu \partial^\beta}{\square} A_\beta \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Г.2.2})$$

Переход в этой формуле пояснён в (А.1.7). Добавляя к лагранжиану в (Г.2.2) член, фиксирующий калибровку

$$- \frac{\nu}{2} (p_\mu A^\mu)^2 \quad (\text{Г.2.3})$$

можно записать обобщённый пропагатор фотона

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = -i \left[\frac{1}{k^2 - m_\gamma^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \nu^{-1} \frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right] \quad (\text{Г.2.4})$$

Действие (Г.2.2) кажется нелокальным, но на самом деле оно локально. В двумерном пространстве-времени векторное поле может быть параметризовано как

$$A_\mu = \partial_\mu \alpha + \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (\text{Г.2.5})$$

В такой параметризации действие (Г.2.2) превращается в

$$\begin{aligned} S_{\text{schw}} &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\square \phi)(\square \phi) + \frac{m_\gamma^2}{2} \phi \square \phi \right\} \\ &= \int d^2x \frac{1}{2} \phi (\square + m_\gamma^2) \square \phi \end{aligned} \quad (\text{Г.2.6})$$

Запишем уравнение движения для поля ϕ :

$$\square(\square + m_\gamma^2)\phi = 0. \quad (\text{Г.2.7})$$

Отсюда можно видеть, что у поля ϕ есть две моды, массивная и безмассовая. Однако безмассовая мода не является физической, так как она соответствует тривиальному тензору напряжённости векторного поля:

$$F^* = -F_{01} = -(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = \square\phi, \quad (\text{Г.2.8})$$

$$\square\phi = 0 \iff F_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{Г.2.9})$$

Г.3 Наша модель

Рассмотрим наше эффективное действие (4.3.23) в пространстве Минковского. Как уже обсуждалось выше, если начать с фотонного пропагатора в обобщённой калибровке (Г.1.1) и затем диагонализировать наше эффективное действие, то получится в точности пропагатор (Г.2.4), умноженный на e_γ^2 . При этом не получается (Г.1.6), *и это хорошо*, так как именно (Г.2.4) соответствует калибровочно инвариантному эффективному действию в нашем случае, а не (Г.1.6).

Рассмотрим этот вопрос внимательнее. Сперва выбросим из (4.3.23) слагаемые с $\text{Re } \sigma$ и $V(\sigma)$, которые не влияют на рассматриваемый здесь эффект:

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} |\partial_\mu \text{Im } \sigma|^2 + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} \text{Im } \sigma F^* \right\}, \quad (\text{Г.3.1})$$

Скалярное поле входит в (Г.3.1) квадратично, так его можно исключить через уравнения движения:

$$-\frac{2}{e_{\text{Im } \sigma}^2} \square \text{Im } \sigma + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} F^* = 0 \implies \text{Im } \sigma = \frac{1}{\square} \frac{1}{\sqrt{2}} e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma} F^* \quad (\text{Г.3.2})$$

Подставляя это назад в (Г.3.1), получим

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma}^2 F^* \frac{1}{\square} F^* \right\} \\ &= \frac{1}{e_\gamma^2} \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} F^* \frac{1}{\square} F^* \right\} \end{aligned} \quad (\text{Г.3.3})$$

где $m_\gamma^2 = e_\gamma^2 e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma}^2$. Очевидно, это эквивалентно (Г.2.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Модулярные функции

В данном Приложении рассматриваются некоторые свойства модулярных функций, использованных в Главе 5.

Д.1 θ -функции

Рассмотрим ном¹

$$q = e^{i\pi\tau_{\text{SW}}} = e^{2i\pi\tau} \quad (\text{Д.1.1})$$

где τ_{SW} — калибровочная константа связи, введённая в (5.9.1). Мы определяем θ -функции как в [2]. В терминах нома (Д.1.1) они могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_1(q) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4}(1 + q^2 + \dots), \\ \theta_2(q) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = 1 - 2q + \dots, \\ \theta_3(q) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2q + \dots \end{aligned} \quad (\text{Д.1.2})$$

Между ними есть множество соотношения, например [98]

$$\theta_3^4 = \theta_2^4 + \theta_1^4. \quad (\text{Д.1.3})$$

Функции θ в (Д.1.2) очевидным образом инвариантны относительно преобразования T (5.9.18), действующего как $\tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 2$. Кроме того, в случае

¹Англ. nome.

преобразования $T^{\frac{1}{2}}$ (5.9.18) выполняются следующие тождества [98, eq. (8.10)]:

$$\begin{aligned}\theta_1(\tau_{\text{SW}} + 1) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \theta_1(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_2(\tau_{\text{SW}} + 1) &= \theta_3(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_3(\tau_{\text{SW}} + 1) &= \theta_2(\tau_{\text{SW}}).\end{aligned}\tag{Д.1.4}$$

Под действием S (5.9.18) имеем [98, eq. (8.9)]:

$$\begin{aligned}\theta_1\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) &= \sqrt{-i\tau_{\text{SW}}} \theta_2(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_2\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) &= \sqrt{-i\tau_{\text{SW}}} \theta_1(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_3\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) &= \sqrt{-i\tau_{\text{SW}}} \theta_3(\tau_{\text{SW}}),\end{aligned}\tag{Д.1.5}$$

где $\sqrt{-i\tau_{\text{SW}}} = +1$ при $\tau_{\text{SW}} = i$. При этом мы использовали те же обозначения для функции θ как в (Д.1.2).

Д.2 Функция h

Из θ -функций можно строить модулярные функции. В кривой Зайберга-Виттена (5.9.3) использовалась функция h , которая определяется как [89]

$$h(\tau_{\text{SW}}) = \frac{2\theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}{\theta_2^4(\tau_{\text{SW}}) - \theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}\tag{Д.2.1}$$

или, в терминах нома (Д.1.1),

$$h(q) = 32q + O(q^2).\tag{Д.2.2}$$

Преобразование S действует на (Д.2.1) как

$$h\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) = -2 - h(\tau_{\text{SW}}),\tag{Д.2.3}$$

так что комбинация

$$h \cdot (h + 2) = \frac{4\theta_1^4\theta_2^4}{(\theta_2^4 - \theta_1^4)^2}\tag{Д.2.4}$$

инвариантна по отношению к преобразованиям S и T . Под действием половинного сдвига $T^{\frac{1}{2}}$ эта комбинация превращается в

$$h(\tau_{\text{SW}} + 1) \cdot (h(\tau_{\text{SW}} + 1) + 2) = -\frac{4\theta_3^4(\tau_{\text{SW}}) \cdot \theta_2^4(\tau_{\text{SW}})}{(\theta_3^4(\tau_{\text{SW}}) + \theta_1^4(\tau_{\text{SW}}))^2}. \quad (\text{Д.2.5})$$

Д.3 Функция λ

В Главе 5 была также использована модулярная функция λ (см. например формулу (5.9.14)), которая может быть выражена как

$$\lambda(\tau_{\text{SW}}) = \frac{\theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}{\theta_3^4(\tau_{\text{SW}})} = 16q - 128q^2 + O(q^3) \quad (\text{Д.3.1})$$

где q — ном (Д.1.1). Эта функция также инвариантна под действием преобразования T , тогда как под действием S она преобразуется как

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) = 1 - \lambda(\tau_{\text{SW}}). \quad (\text{Д.3.2})$$

Под действием половинного сдвига (Д.1.4) функция λ превращается в

$$\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1) = \frac{\lambda(\tau_{\text{SW}})}{\lambda(\tau_{\text{SW}}) - 1} = -\frac{\theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}{\theta_2^4(\tau_{\text{SW}})}. \quad (\text{Д.3.3})$$

Из (Д.3.2) и (Д.3.3) мы видим, что под действием преобразования S

$$\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1) \xrightarrow{S} \lambda\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}} + 1\right) = \frac{1}{\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}. \quad (\text{Д.3.4})$$

Используя (Д.2.4) и (Д.3.3), можно написать связь между функциями λ и h ,

$$-h(\tau_{\text{SW}})[h(\tau_{\text{SW}}) + 2] = \frac{4\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}{(1 + \lambda(\tau_{\text{SW}} + 1))^2}. \quad (\text{Д.3.5})$$

Обратная к $\lambda(\tau)$ функция может быть записана в терминах гипергеометрических функций

$$\tau = i \frac{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; 1 - \lambda)}{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; \lambda)}. \quad (\text{Д.3.6})$$

В терминах полного эллиптического интеграла первого рода $K(k)$,

$$\tau = i \frac{K(\sqrt{1 - \lambda})}{K(\sqrt{\lambda})}. \quad (\text{Д.3.7})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

О центральном заряде в $WCP(2, 2)$ модели

В данном Приложении будут рассмотрены некоторые дополнительные свойства центрального заряда, а также вторичные кривые нейтральной устойчивости в $WCP(2, 2)$ модели.

Е.1 Вторичные кривые

Теперь мы рассмотрим распады частиц, которые не обсуждались в Разделе 5.6, а также построим соответствующие CMS. Для этого нужно вспомнить, что центральный заряд BPS кинка (5.3.4) является, вообще говоря, многолистной функцией. На плоскости β у такой функции есть разрезы, начинающиеся в точках, в которых у массы кинка появляется сингулярность. (Это обстоятельство можно было не учитывать при рассмотрении первичных CMS (5.6.2) и (5.6.3), но теперь оно оказывается важным.) Из явной формулы для массы кинка можно видеть, что она сингулярна в точке $\beta = 0$ (см. формулы (5.5.13) и (5.5.14)) и в точках АД (см. формулу (5.3.19)). Поэтому в этих точках начинаются разрезы (по модулю 2π периодичности в направлении θ_{2d}).

Е.1.1 Распады «дополнительных» кинков

Когда мы уходим из сильной связи в область слабой связи $\beta \gg 0$, кинки $[Z_P]$, $P = 1, 2$ не распадаются (они становятся безмассовыми в точках АД на правой кривой (5.6.2), и поэтому их можно «протащить» через эти точки, в которых эти кинки являются единственными безмассовыми частицами и, тем самым, абсолютно стабильными [87]). С другой стороны, массы кинков $[Z_K]$, $K = 3, 4$ — порядка $|m_K - \bar{m}|$, так что они могли бы распасться на, скажем, пару $[Z_P] +$ бифундаментал. Иными словами, возможен следующий

процесс распада:

$$[Z_K] \rightarrow [Z_P] + [-i(m_P - m_K)]. \quad (\text{E.1.1})$$

В дуальной области сильной связи $\beta \ll 0$ распадаются P -кинки через реакцию

$$[Z_P] \rightarrow [Z_K] + [i(m_P - m_K)]. \quad (\text{E.1.2})$$

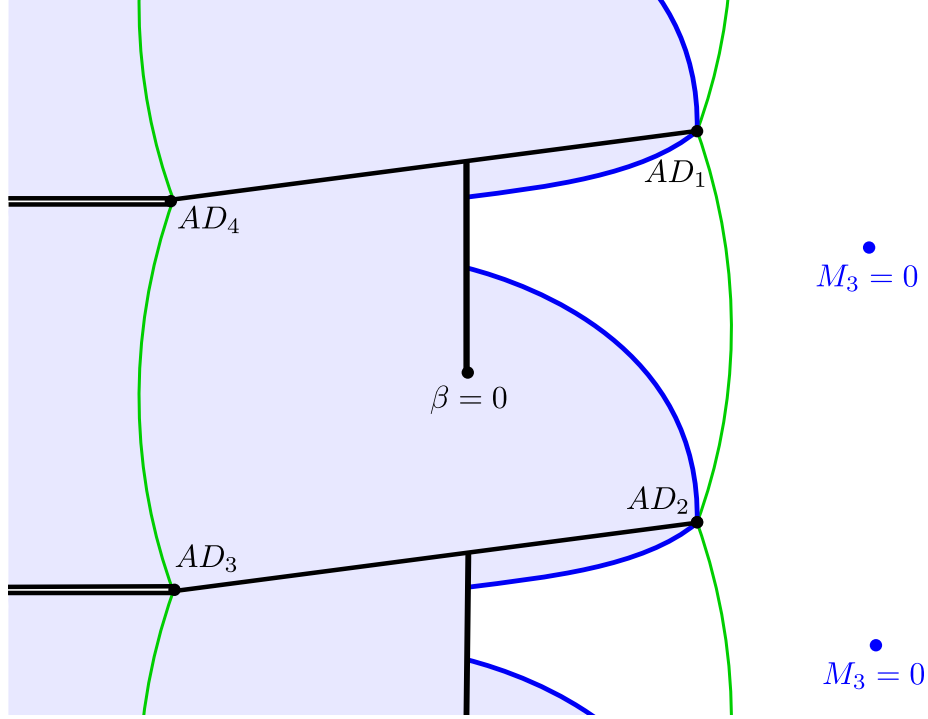


Рис. Е.1: Комплексная плоскость β . Схематичное представление структуры CMS для распада кинка M_3 . (Картина для M_4 качественно такая же.) Тонкие зелёные линии — первичные кривые. Толстые чёрные линии — разрезы. Толстые синие линии — CMS для распадов кинка M_3 . Область, закрашенная синим — область существования кинка M_3 . Синие точки справа обозначают места, где масса кинка M_3 была бы равна нулю, если бы эти кинки существовали в соответствующей области, см. (E.1.4).

Более того, при некоторых условиях эти кинки обязаны распадаться, иначе они могли бы стать безмассовыми где-то в слабой связи. Чтобы это увидеть, рассмотрим центральный заряд K -кинка в слабой связи в $\mathbb{CP}(1)$ пределе (5.3.10). Формула (5.3.20) может быть прямо обобщена на K -кинки следующим образом:

$$Z_K \approx -\beta_{\mathbb{CP}(1)} \cdot \delta m_{12} + i(m_K - \bar{m}) + \frac{\delta m_{12}}{\pi}, \quad (\text{E.1.3})$$

так что масса соответствующего состояния в пределе $\text{Re } \beta \equiv r \gg 1$ есть

$$M_K \approx |\delta m_{12}| \cdot \left(r - \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\Delta m}{\delta m_{12}} \right| - \frac{1}{\pi} - \text{Im} \frac{m_K - \bar{m}}{\delta m_{12}} \right). \quad (\text{E.1.4})$$

Мы видим, что при определённом выборе масс m_A в слабой связи (в правой области $\beta \gg \beta_{AD}$) есть точки, где M_K зануляется. Поэтому такие состояния обязаны распасться ещё до этого. Аналогично, кинки M_P ($P = 1, 2$) могли бы становится безмассовыми в дуальной области слабой связи $\beta \ll -\beta_{AD}$. Их массы в этом пределе могут быть вычислены по формуле

$$M_P \approx |\delta m_{34}| \cdot \left(r - \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\Delta m}{\delta m_{34}} \right| - \frac{1}{\pi} + \text{Im} \frac{m_P - \tilde{m}}{\delta m_{34}} \right). \quad (\text{E.1.5})$$

Уравнение CMS для обоих распадов (E.1.1) и (E.1.2) есть

$$\text{Re} \left(\frac{Z_P}{m_P - m_K} \right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re} \left(\frac{Z_K}{m_P - m_K} \right) = 0. \quad (\text{E.1.6})$$

К этому необходимо добавить условие того, что частица не может распадаться на более тяжёлые частицы:

$$\begin{aligned} |Z_K| &= |Z_P| + |-i(m_P - m_K)| \quad \text{при распаде (E.1.1)}, \\ |Z_P| &= |Z_K| + |i(m_P - m_K)| \quad \text{при распаде (E.1.2)}. \end{aligned} \quad (\text{E.1.7})$$

В случае, когда m_1 , m_2 , m_K для некоторого K лежат на одной прямой на комплексной плоскости, CMS для распада (E.1.1) *совпадает с первичной кривой* (5.6.2). Также, если для некоторого P массы m_P , m_3 , m_4 выравниваются, CMS для (E.1.2) совпадает с дуальной первичной кривой (5.6.3).

Уравнение CMS (E.1.6) упрощается в пределе $\mathbb{CP}(1)$ (5.3.10). Используя простое обобщение приближённой формулы для центрального заряда (5.3.19), можно переписать это уравнение вблизи точки АД как:

$$\text{Re} \left[\frac{m_1 - m_2}{m_P - m_K} \cdot (\beta - \beta_{AD_P})^{3/2} \right] = 0 \quad (\text{E.1.8})$$

для $P = 1, 2$. (Индексы точек АД соответствуют Рис. 5.4.) Это уравнение эквивалентно

$$\cos \left(\frac{3}{2} \arg(\beta - \beta_{AD_P}) + \phi_{PK} \right) = 0, \quad \phi_{PK} = \arg \left(\frac{m_1 - m_2}{m_P - m_K} \right). \quad (\text{E.1.9})$$

Решение этого уравнения представляет собой линии, исходящие из точки AD_P под углами

$$\arg(\beta - \beta_{AD_P}) = -\frac{2}{3} \phi_{PK} - \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{E.1.10})$$

Из этого выражения мы видим, что, вообще говоря, три различных CMS начнутся в точке АД AD_P (это очень похоже на случай $\mathbb{CP}(1)$). Однако только некоторые из них удовлетворяют дополнительному условию (Е.1.7). А именно, для того, чтобы условие (Е.1.7) было выполнено, необходимо потребовать

$$\arg Z_P - \arg(-i(m_P - m_K)) \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (\text{Е.1.11})$$

Это условие отбирает чётные n в (Е.1.10). Это и есть CMS для распада (Е.1.1) вблизи точки AD_P .

Рассмотрим уравнение (Е.1.10) несколько подробнее. В зависимости от ϕ_{PK} меняется качественная картина. Когда эта фаза равна нулю, рассматриваемая CMS проходит через точки AD_1 и AD_2 и совпадает с первичной кривой (5.6.2). При $\phi_{PK} \in [-\pi/2, 0)$ наша CMS наклонена внутрь области сильной связи, и кинк M_K вообще не может проникнуть в область слабой связи $\beta > 0$. Если $\phi_{PK} \in (0, \pi/2]$, то рассматриваемая CMS для распада K -кинка заходит в область слабой связи, и K -кинк существует в некоторой подобласти в слабой связи $\beta > 0$. Разумеется, этот кинк не может достичь области, где его масса могла бы обратиться в нуль, см. (Е.1.4). Другие значения фазы ϕ_{PK} отличаются только переименованием индексов $1 \leftrightarrow 2$. На Рис. Е.1 представлены CMS для распада кинка $[Z_3]$ (CMS для распадов кинка $[Z_4]$ качественно такие же).

То же рассуждение можно применить к P -кинкам вблизи дуальной области слабой связи при $\beta < 0$. Если $\arg((m_4 - m_3)/(m_P - m_K))$ зануляется, то CMS для распада (Е.1.2) совпадает с дуальной первичной кривой (5.6.3). Когда эта фаза положительна, P -кинки не могут проникнуть в дуальную область слабой связи. Когда она отрицательна, P -кинки существуют в некоторой подобласти в дуальной слабой связи, но они никогда не могут достичь областей, где их масса могла бы стать равной нулю.

Е.1.2 Распад башни состояний с высшими намотками в сильной связи

Теперь мы кратко затронем вопрос о распадах $n \neq 0$ состояний из башни (5.5.15). В пределе $\Delta m \gg \delta m_{12}, \delta m_{34}$ они могут распадаться в состояния с низшими намотками, испуская бифундаменталы. Например, если $n > 0$, некоторые

из распадов могут быть такими:

$$\begin{aligned} [Z_1^{[n]}] &\rightarrow [Z_4^{[n]}] + [i(m_1 - m_4)], \\ [Z_4^{[n]}] &\rightarrow [Z_2^{[n-1]}] + [i(m_1 - m_3)]. \end{aligned} \quad (\text{E.1.12})$$

В более общей ситуации при $n > 0$ возможны следующие распады:

$$\begin{aligned} [Z_P^{[n]}] &\rightarrow [Z_K^{[n]}] + [i(m_P - m_K)], \\ [Z_K^{[n]}] &\rightarrow [Z_{\tilde{P}}^{[n-1]}] + [i(m_{\tilde{P}} - m_{\tilde{K}})], \end{aligned} \quad (\text{E.1.13})$$

где P, \tilde{P} — некоторая перестановка индексов 1, 2, а K, \tilde{K} — перестановка индексов 3, 4. Состояния с $n < 0$ подвержены аналогичным распадам.

Соответствующая CMS удовлетворяет уравнениям

$$\text{Re} \left(\frac{Z_P^{[n]}}{m_P - m_K} \right) = 0, \quad \text{Re} \left(\frac{Z_K^{[n]}}{m_{\tilde{P}} - m_{\tilde{K}}} \right) = 0. \quad (\text{E.1.14})$$

Вдали от точки $\beta = 0$, то есть при $\beta \gg 1$, в $\mathbb{CP}(1)$ пределе (5.3.10) уравнения (E.1.14) отличаются от (E.1.6) только слагаемыми порядка $O(\delta m_{12}/\Delta m, \delta m_{34}/\Delta m)$. Следовательно, соответствующие CMS расположены близко друг от друга, по крайней мере частично.

Внимательное изучение численных решений показывает, что существуют две возможности: либо CMS (E.1.14) образуют замкнутые кривые, лежащие внутри области сильной связи, либо они образуют спирали, сходящиеся к началу координат. В любом случае мы заключаем, что состояния с высшими намотками, рассмотренные в данном Разделе, живут исключительно внутри области сильной связи и не могут попасть в области слабой связи.

Е.2 Намотки центрального заряда в сильной связи

В данном Разделе будут выведены различные намотки (сдвиги) центрального заряда (5.3.4), показанные на Рис. 5.4.

Е.2.1 Намотка вдоль θ_{2d}

Сейчас мы выведем фазовый сдвиг $AD_1 \rightarrow AD_2$, показанный на Рис. 5.4. Для простоты рассмотрим $\mathbb{CP}(1)$ предел (5.3.10). Положения точек АД AD_1

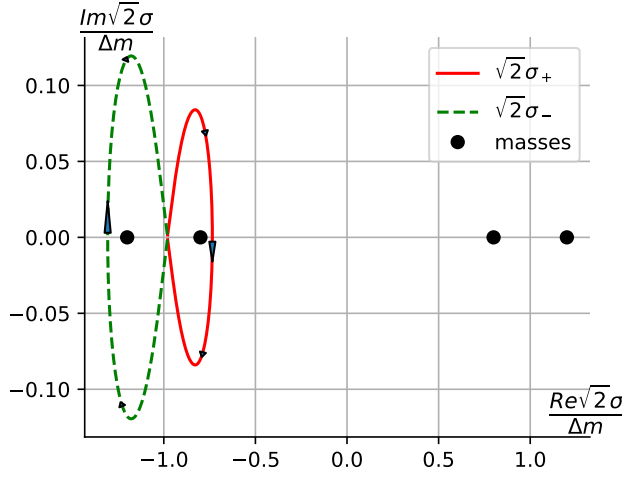
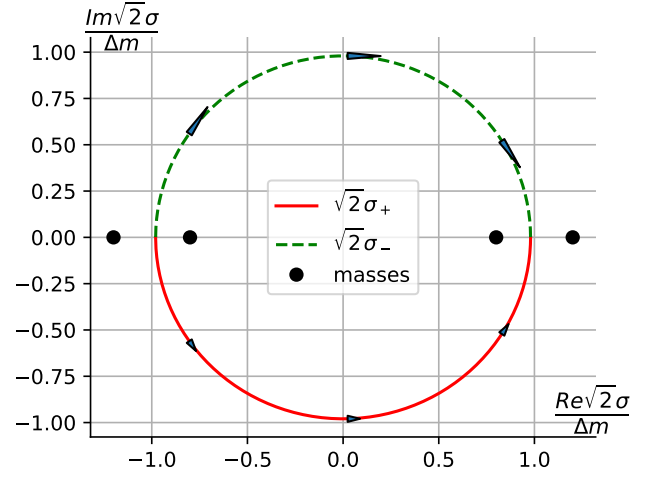
(а) Траектория корней σ вдоль (E.2.1)(б) Траектория корней σ вдоль (E.2.5)

Рис. Е.2: Траектории корней σ вдоль различных траекторий на плоскости β . Численный расчёт. Комплексная плоскость $\sqrt{2}\sigma$. Видно, что σ -корни оборачиваются вокруг масс m_A (представленных жирными точками).

и AD_2 могут быть найдены приблизительно по формуле (5.3.16). Рассмотрим траекторию в плоскости β , на которой константа связи непрерывным образом переходит от одной из точек АД, расположенной в β_{AD} , к другой в $\beta_{AD} + i$,

$$\beta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{2 \Delta m}{\delta m_{12}} + \frac{i(t - \pi)}{2\pi} - \varepsilon, \quad 1 \gg \varepsilon > 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (\text{E.2.1})$$

Здесь, ε есть просто параметр, введённый для регуляризации. Тогда,

$$e^{-2\pi\beta} \approx - \left(\frac{\delta m_{12}}{2 \Delta m} \right)^2 e^{-it} (1 + 2\pi\varepsilon), \quad (\text{E.2.2})$$

и для выражения под квадратным корнем в (5.3.5) (то есть дискриминанта) получим:

$$D \approx \frac{\delta m_{12}^2}{4} + \Lambda_{CP(1)}^2 = \frac{\delta m_{12}^2}{4} (1 - (1 + \tilde{\varepsilon})e^{-it}), \quad 1 \gg \tilde{\varepsilon} > 0. \quad (\text{E.2.3})$$

Это выражение наматывается вокруг точки 1 с радиусом $(1 + \tilde{\varepsilon})$ по часовой стрелке. Тогда σ -вакуумы, которые можно найти приближённо по формулам

$$\sqrt{2}\sigma_{\pm} \approx \pm \frac{\Delta m}{2} + \sqrt{D}, \quad (\text{E.2.4})$$

наматываются, см. Рис. Е.2а. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ корень $\sqrt{2}\sigma_+$ наматывается вокруг $(-\Delta m + \delta m_{12})/2 = -m_2$ по часовой стрелке, а $\sqrt{2}\sigma_-$ крутится вокруг $(-\Delta m - \delta m_{12})/2 = -m_1$ по часовой стрелке, оба — с радиусом $\delta m_{12} (1 + \tilde{\varepsilon}/2)$.

Отсюда получаются нетривиальные сдвиги фаз в зеркальных переменных, см. (5.5.3). В то время как поля Y остаются на месте, поле X_1 наматывается из-за $\sqrt{2}\sigma_-$ и набирает фазу $-2\pi i$. X_2 наматывается из-за $\sqrt{2}\sigma_+$ и набирает фазу $-2\pi i$. Тогда центральный заряд кинка, определяемый как $Z = 2(\mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_-) - \mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_+))$, сдвигается на $-i(m_1 - m_2)$. Поэтому если $Z_2 = 0$ в точке AD_2 , то $Z_1 = Z_2 + i(m_1 - m_2)$ становится равным нулю в точке AD_1 , см. (5.5.6). Другими словами, кинки $[Z_1]$ и $[Z_2]$ становятся безмассовыми в точках АД AD_1 и AD_2 соответственно.

Точно так же можно доказать сдвиг при перемещении $AD_3 \rightarrow AD_4$ на Рис. 5.4.

Е.2.2 От положительных к отрицательным β

теперь рассмотрим траекторию на плоскости β , проходящую справа налево, то есть от AD_2 к AD_3 на Рис. 5.4. Для простоты мы рассмотрим предел, когда массовые параметры вещественны $\Delta m \gg \delta m_{12} = \delta m_{34} > 0$.

$$\beta \approx t \left[\frac{1}{\pi} \ln \frac{2\Delta m}{\delta m_{12}} - \varepsilon \right] - \frac{i}{2}, \quad 1 \gg \varepsilon > 0, \quad t \in [1, -1]. \quad (\text{E.2.5})$$

При t , меняющемся от 1 до -1 , значение константы связи β изменяется от AD_2 до AD_3 . Тогда мы имеем

$$e^{-2\pi\beta} \approx - \left(\frac{\delta m_{12}}{2\Delta m} \right)^{2t} (1 + 2\pi t\varepsilon), \quad (\text{E.2.6})$$

и для выражения под знаком квадратного корня в (5.3.5) (то есть для дискриминанта) получим

$$D \approx \delta m_{12}^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{2\Delta m}{\delta m_{12}} \right)^{2(1-t)} (1 + 2\pi t\varepsilon)}{\left(1 + \left(\frac{\delta m_{12}}{2\Delta m} \right)^{2t} (1 + 2\pi t\varepsilon) \right)^2} \right). \quad (\text{E.2.7})$$

При $\delta m_{12} < \Delta m$ из этой формулы следует, что D всегда отрицательно. В этом случае у корней нет нетривиальных намоток. Однако первое слагаемое в формуле для корней (5.3.5) гладко меняется от $-\Delta m/2$ до $+\Delta m/2$, когда t переходит от 1 к -1 . Поэтому оба двумерных вакуума выходят из окрестности точки $-\Delta m/2$ при $\beta \sim AD_2$ и приходят в окрестность точки $+\Delta m/2$ при $\beta \sim AD_3$.

Оказывается, что, в терминах $\sqrt{2}\sigma_{\pm}$ из (E.2.4), корень $\sqrt{2}\sigma_{+}$ перемещается в нижней полуплоскости, а корень $\sqrt{2}\sigma_{-}$ — в верхней, см. Рис. E.2б.

Отсюда и из отображения (5.5.3) следует, что, когда константа связи β переходит от AD_2 к AD_3 , зеркальная переменная X_1 остаётся в правой полуплоскости $\text{Re } X_1 > 0$, Y_4 остаётся в левой полуплоскости $\text{Re } Y_4 < 0$. Поля X_2 и Y_3 каждое набирают по $+i\pi$ из-за изменения σ_{+} , а из-за σ_{-} каждое из них набирает по $-i\pi$. В общем, центральный заряд кинка, определяемый как $Z = 2(\mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_{-}) - \mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_{+}))$, сдвигается на величину $-i(m_2 - m_3)$, то есть в точности так, как указано на Рис. 5.4. Таким образом, кинки $[Z_2]$ и $[Z_3]$ становятся безмассовыми в точках AD_2 и AD_3 соответственно.

Точно так же можно доказать сдвиг $AD_4 \rightarrow AD_1$, показанный на Рис. 5.4. Отметим, что эти результаты согласованны с преобразованием \mathbb{Z}_2 , см. Рис. 5.4.

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Самодуальные точки

Рассмотрим самодуальные точки в четырёхмерной теории. Соответствующее значение константы связи τ_{SW} должно удовлетворять уравнению

$$\tau_{\text{SW}} = \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}}. \quad (\text{Ж.1.1})$$

Решение в верхней полуплоскости есть

$$\tau_0 = i. \quad (\text{Ж.1.2})$$

Однако, если принять во внимание также T -дуальность, то уравнение (Ж.1.1) модифицируется:

$$\tau_{\text{SW}} = \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{Ж.1.3})$$

Решая это уравнение, получим целую серию самодуальных точек,

$$\tau_{\pm k} = k \pm \sqrt{k^2 - 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{Ж.1.4})$$

или, что то же самое,

$$\tau_{\pm k} = \pm(k - \sqrt{k^2 - 1}), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (\text{Ж.1.5})$$

При $k = 0$ отсюда получается (Ж.1.2). При $k = 1$ эта формула даёт

$$\tau_1 = 1. \quad (\text{Ж.1.6})$$

Теперь рассмотрим самодуальные точки в двумерной теории. Очевидным кандидатом (5.9.22) является

$$\beta_0 = 0, \quad e^{-2\pi\beta_0} = +1. \quad (\text{Ж.1.7})$$

Но если принять во внимание T -дуальность в двумерии $\beta \rightarrow \beta + i$, мы увидим, что на самом деле есть целая серия точек, самодуальных относительно S (5.9.22),

$$\beta_k = \frac{i}{2} k, \quad e^{-2\pi\beta_1} = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{Ж.1.8})$$

Мы уже встречали некоторые из них в Разделе 5.9:

$$\tau_0 = i \leftrightarrow \beta_1 = \frac{i}{2}, \quad (\text{Ж.1.9})$$

$$\tau_1 = 1 \leftrightarrow \beta_0 = 0.$$

Список литературы

- [1] N. Seiberg and E. Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B426**, 19 (1994), (E) **B430**, 485 (1994) [hep-th/9407087].
- [2] N. Seiberg and E. Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B431**, 484 (1994) [hep-th/9408099].
- [3] G. 't Hooft, *Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Nonabelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **190**, 455-478 (1981)
- [4] S. Mandelstam, *Vortices and Quark Confinement in Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rept. **23**, 245-249 (1976)
- [5] A. Hanany and D. Tong, *Vortices, instantons and branes*, JHEP **0307**, 037 (2003). [hep-th/0306150].
- [6] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi and A. Yung, *Non-Abelian superconductors: Vortices and confinement in $\mathcal{N} = 2$ SQCD*, Nucl. Phys. B **673**, 187 (2003). [hep-th/0307287].
- [7] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian string junctions as confined monopoles*, Phys. Rev. D **70**, 045004 (2004) [hep-th/0403149].
- [8] A. Hanany and D. Tong, *Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics*, JHEP **0404**, 066 (2004) [hep-th/0403158].
- [9] D. Tong, *TASI Lectures on Solitons*, arXiv:hep-th/0509216.
- [10] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Solitons in the Higgs phase: The moduli matrix approach*, J. Phys. A **39**, R315 (2006) [arXiv:hep-th/0602170].
- [11] M. Shifman and A. Yung, *Supersymmetric Solitons and How They Help Us Understand Non-Abelian Gauge Theories*, Rev. Mod. Phys. **79**, 1139

- (2007) [hep-th/0703267]; for an expanded version see *Supersymmetric Solitons*, (Cambridge University Press, 2009).
- [12] D. Tong, *Quantum Vortex Strings: A Review*, *Annals Phys.* **324**, 30 (2009) [arXiv:0809.5060 [hep-th]].
- [13] M. Shifman and A. Yung, *Lessons from supersymmetry: “Instead-of-Confinement” Mechanism*, *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, no. 27, 1430064 (2014) [arXiv:1410.2900 [hep-th]].
- [14] A. Abrikosov, *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, *Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957); Russian original – *ZhETF* **32**, 1442 (1957);
H. Nielsen and P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973). [Reprinted in *Solitons and Particles*, Eds. C. Rebbi and G. Soliani (World Scientific, Singapore, 1984), p. 365].
- [15] D. Tong, *Monopoles in the Higgs phase*, *Phys. Rev. D* **69**, 065003 (2004) [arXiv:hep-th/0307302].
- [16] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian flux tubes in $N=1$ SQCD: supersizing world-sheet supersymmetry*, *Phys. Rev. D* **72**, 085017 (2005) [arXiv:hep-th/0501211].
- [17] M. Edalati and D. Tong, *Heterotic vortex strings*, *JHEP* **0705**, 005 (2007) [arXiv:hep-th/0703045].
- [18] M. Shifman and A. Yung, *Heterotic Flux Tubes in $\mathcal{N} = 2$ SQCD with $\mathcal{N} = 1$ Preserving Deformations*, *Phys. Rev. D* **77**, 125016 (2008) Erratum: [*Phys. Rev. D* **79**, 049901 (2009)] [arXiv:0803.0158 [hep-th]].
- [19] E. Ievlev and A. Yung, *Non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD*, *Phys. Rev. D* **95**, 125004 (2017) [arXiv:1704.03047 [hep-th]].
- [20] E. Ievlev and A. Yung, *Non-Abelian strings in $N = 1$ supersymmetric QCD (Conference Paper)*, *EPJ Web Conf.* **191**, 06003 (2018)
- [21] E. Ievlev and A. Yung, *What Become of Semilocal non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ SQCD*, *Phys. Rev. D* **98**, 094033 (2018) [arXiv:1810.07149 [hep-th]].
- [22] A. Gorsky, E. Ievlev and A. Yung, *Dynamics of non-Abelian strings in the*

- theory interpolating from $\mathcal{N} = 2$ to $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **101**, 014013 (2020) [arXiv:1911.08328 [hep-th]].
- [23] D. Tong, *The quantum dynamics of heterotic vortex strings*, JHEP **0709**, 022 (2007) [arXiv:hep-th/0703235].
- [24] M. Shifman and A. Yung, *Large- N Solution of the Heterotic $N=(0,2)$ Two-dimensional $CP(N-1)$ Model*, Phys. Rev. D **77**, 125017 (2008) Erratum: [Phys. Rev. D **81**, 089906 (2010)] [arXiv:0803.0698 [hep-th]].
- [25] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Description of the Heterotic String Solutions in $U(N)$ SQCD*, Phys. Rev. D **79**, 085015 (2009) [arXiv:0901.4603 [arXiv:hep-th]].
- [26] E. Witten, *Instantons, the Quark Model, and the $1/N$ Expansion*, Nucl. Phys. B **149**, 285 (1979).
- [27] E. Ievlev, M. Shifman and A. Yung, *String Baryon in Four-Dimensional $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD from the 2D-4D Correspondence*, Phys. Rev. D **102**, 054026 (2020) [arXiv:2006.12054 [hep-th]].
- [28] P. Fayet and J. Iliopoulos, *Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors*, Phys. Lett. B **51**, 461 (1974).
- [29] M. Shifman and A. Yung, *Critical String from Non-Abelian Vortex in Four Dimensions*, Phys. Lett. B **750**, 416 (2015) [arXiv:1502.00683 [hep-th]].
- [30] P. Koroteev, M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Vortex in Four Dimensions as a Critical String on a Conifold*, Phys. Rev. D **94** (2016) no.6, 065002 [arXiv:1605.08433 [hep-th]].
- [31] P. Koroteev, M. Shifman and A. Yung, *Studying Critical String Emerging from Non-Abelian Vortex in Four Dimensions*, Phys. Lett. **B759**, 154 (2016) [arXiv:1605.01472 [hep-th]].
- [32] N. Dorey, *The BPS spectra of two-dimensional supersymmetric gauge theories with twisted mass terms*, JHEP **9811**, 005 (1998) [hep-th/9806056].
- [33] D. Tong, *Monopoles in the Higgs phase*, Phys. Rev. D **69**, 065003 (2004) [hep-th/0307302].
- [34] For a review see e.g. A. Achucarro and T. Vachaspati, *Semilocal and electroweak strings*, Phys. Rept. **327**, 347 (2000) [hep-ph/9904229].

- [35] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian semilocal strings in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **73**, 125012 (2006) [arXiv:hep-th/0603134].
- [36] M. Eto, J. Evslin, K. Konishi, G. Marmorini, et al., *On the moduli space of semilocal strings and lumps*, Phys. Rev. D **76**, 105002 (2007) [arXiv:0704.2218 [hep-th]].
- [37] M. Shifman, W. Vinci and A. Yung, *Effective World-Sheet Theory for Non-Abelian Semilocal Strings in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **83**, 125017 (2011) [arXiv:1104.2077 [hep-th]].
- [38] P. Koroteev, M. Shifman, W. Vinci and A. Yung, *Quantum Dynamics of Low-Energy Theory on Semilocal Non-Abelian Strings*, Phys. Rev. D **84**, 065018 (2011) [arXiv:1107.3779 [hep-th]].
- [39] J. Chen, C. H. Sheu, M. Shifman, G. Tallarita and A. Yung, *Long Way to Ricci Flatness*, [arXiv:2006.01188 [hep-th]].
- [40] E. Witten, *Phases of $N = 2$ theories in two dimensions*, Nucl. Phys. B **403**, 159 (1993) [hep-th/9301042].
- [41] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD: Duality and Kinks on Confining Strings*, Phys. Rev. D **81**, 085009 (2010) [arXiv:1002.0322 [hep-th]].
- [42] A. D’Adda, A. C. Davis, P. DiVecchia and P. Salamonsen, *An effective action for the supersymmetric CP^{n-1} models*, Nucl. Phys. **B222** 45 (1983).
- [43] S. Cecotti and C. Vafa, *On classification of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric theories*, Comm. Math. Phys. **158** 569 (1993).
- [44] A. Hanany, K. Hori *Branes and $N=2$ Theories in Two Dimensions*, Nucl. Phys. B **513**, 119 (1998) [arXiv:hep-th/9707192].
- [45] N. Dorey, T. J. Hollowood and D. Tong, *The BPS spectra of gauge theories in two and four dimensions*, JHEP **9905**, 006 (1999) [arXiv:hep-th/9902134].
- [46] A. A. Penin, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov and S. V. Troitsky, *What becomes of vortices in theories with flat directions*, Phys. Lett. B **389**, 13 (1996) [hep-ph/9609257].
- [47] A. Yung, *Vortices on the Higgs Branch of the Seiberg-Witten Theory*, Nucl. Phys. B **562**, 191 (1999) [hep-th/9906243].

- [48] K. Evlampiev and A. Yung, *Flux Tubes on Higgs Branches in SUSY Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **662**, 120 (2003) [hep-th/0303047].
- [49] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Meissner effect in Yang-Mills theories at weak coupling*, Phys. Rev. D **71**, 045010 (2005) [arXiv:hep-th/0412082].
- [50] M. Shifman and A. Yung, *Moduli Space Potentials for Heterotic non-Abelian Flux Tubes: Weak Deformation*, Phys. Rev. D **82**, 066006 (2010) [arXiv:1005.5264 [hep-th]].
- [51] A. Hanany, M. J. Strassler and A. Zaffaroni, *Confinement and strings in MQCD*, Nucl. Phys. B **513**, 87 (1998) [hep-th/9707244].
- [52] A. I. Vainshtein and A. Yung, *Type I superconductivity upon monopole condensation in Seiberg–Witten theory*, Nucl. Phys. B **614**, 3 (2001) [arXiv:hep-th/0012250].
- [53] E. Witten, *Theta Dependence in the Large N Limit of Four-Dimensional Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2862 (1998), [hep-th/9807109].
- [54] A. Hanany, M. J. Strassler and A. Zaffaroni, *Confinement and strings in MQCD*, Nucl. Phys. B **513**, 87 (1998) [arXiv:hep-th/9707244].
- [55] T. Vachaspati and A. Achucarro, *Semilocal cosmic strings*, Phys. Rev. D **44**, 3067 (1991).
- [56] M. Hindmarsh, *Existence and stability of semilocal strings*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1263 (1992).
- [57] M. Hindmarsh, *Semilocal topological defects*, Nucl. Phys. B **392**, 461 (1993) [arXiv:hep-ph/9206229].
- [58] J. Preskill, *Semilocal defects*, Phys. Rev. D **46**, 4218 (1992) [arXiv:hep-ph/9206216].
- [59] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian semilocal strings in $N=2$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **73**, 125012 (2006) [arXiv:hep-th/0603134].
- [60] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Manifestly supersymmetric effective Lagrangians on BPS solitons*, Phys. Rev. D **73**, 125008 (2006) [arXiv:hep-th/0602289].

- [61] M. Eto, J. Evslin, K. Konishi, G. Marmorini, M. Nitta, K. Ohashi, W. Vinci and N. Yokoi, *On the moduli space of semilocal strings and lumps*, Phys. Rev. D **76**, 105002 (2007) [arXiv:0704.2218 [arXiv:hep-th]].
- [62] M. Shifman, W. Vinci and A. Yung, *Effective World-Sheet Theory for Non-Abelian Semilocal Strings in $N = 2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **83**, 125017 (2011) [arXiv:1104.2077 [arXiv:hep-th]].
- [63] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *Revisiting the Faddeev-Skyrme model and Hopf solitons*, Phys. Rev. D **88**, 045026 (2013) [arXiv:1306.2364 [arXiv:hep-th]].
- [64] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *The Higgs and Coulomb/confining phases in 'twisted-mass' deformed $CP(N-1)$ model*, Phys. Rev. D **73**, 065011 (2006) [arXiv:hep-th/0512153].
- [65] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Heterotic $N=(0,2)$ $CP(N-1)$ Model with Twisted Masses*, Phys. Rev. D **81**, 065025 (2010) [arXiv:0907.2715 [hep-th]].
- [66] V. Markov, A. Marshakov and A. Yung, *Non-Abelian vortices in $N = 1^*$ gauge theory*, Nucl. Phys. B **709**, 267 (2005) [arXiv:hep-th/0408235].
- [67] F. Ferrari, *Large N and double scaling limits in two dimensions*, JHEP **0205** 044 (2002) [arXiv:hep-th/0202002].
- [68] F. Ferrari, *Non-supersymmetric cousins of supersymmetric gauge theories: quantum space of parameters and double scaling limits*, Phys. Lett. **B496** 212 (2000) [arXiv:hep-th/0003142]; *A model for gauge theories with Higgs fields*, JHEP **0106**, 057 (2001) [arXiv:hep-th/0102041].
- [69] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Large- N Solution of the Heterotic $CP(N-1)$ Model with Twisted Masses*, Phys. Rev. D **82**, no. 2, 025011 (2010) Erratum: [Phys. Rev. D **89**, no. 2, 029904 (2014)] [arXiv:1001.1757 [hep-th]].
- [70] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein and V. Zakharov, *Two-dimensional sigma models: Modelling non-perturbative effects in quantum chromodynamics*, Physics Reports **116**, 6, 103 (1984)
- [71] T. Appelquist and J. Carazzone, *Infrared Singularities and Massive Fields*, Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).

- [72] E. Ievlev, *Эффективные теории на неабелевой струне в суперсимметричных калибровочных теориях*: выпускная квалификационная работа – Saint Petersburg State University, 2020.
- [73] M. Shifman and A. Yung, *Critical Non-Abelian Vortex in Four Dimensions and Little String Theory*, Phys. Rev. D **96**, no. 4, 046009 (2017) [arXiv:1704.00825 [hep-th]].
- [74] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Duality and Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **79**, 125012 (2009) [arXiv:0904.1035 [hep-th]].
- [75] A. Neitzke and C. Vafa, *Topological strings and their physical applications*, arXiv:hep-th/0410178.
- [76] P. Candelas and X. C. de la Ossa, *Comments on conifolds*, Nucl. Phys. **B342**, 246 (1990).
- [77] K. Ohta and T. Yokono, *Deformation of Conifold and Intersecting Branes*, JHEP **0002**, 023 (2000) [hep-th/9912266].
- [78] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, *Supergravity and a Confining Gauge Theory: Duality Cascades and $chiSB$ -Resolution of Naked Singularities*, JHEP **0008**, 052 (2000) [hep-th/0007191].
- [79] J. Louis, *Generalized Calabi-Yau compactifications with D-branes and fluxes*, Fortsch. Phys. **53**, 770 (2005).
- [80] G. Veneziano and S. Yankielowicz, *An Effective Lagrangian For The Pure $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. B **113**, 231 (1982).
- [81] P. C. Argyres and M. R. Douglas, *New Phenomena in $SU(3)$ Supersymmetric Gauge Theory* Nucl. Phys. **B448**, 93 (1995) [arXiv:hep-th/9505062].
P. C. Argyres, M. R. Plesser, N. Seiberg, and E. Witten, *New $N=2$ Superconformal Field Theories in Four Dimensions* Nucl. Phys. **B461**, 71 (1996) [arXiv:hep-th/9511154].
- [82] M. Shifman, A. Vainshtein and R. Zwicky, *Central charge anomalies in 2-D sigma models with twisted mass*, J. Phys. A **39**, 13005 (2006) [hep-th/0602004].
- [83] M. Shifman, *Supersymmetric Solitons and Topology*, in *Topology and Geometry in Physics*, Eds. E. Bick and F.D. Steffen (Springer-Verlag, Berlin, 2005), p. 237.

- [84] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Confinement in $N=2$ Supersymmetric QCD: Duality and Kinks on Confining Strings*, Phys. Rev. D **81**, 085009 (2010) [arXiv:1002.0322 [hep-th]].
- [85] V. A. Fateev, I. V. Frolov and A. S. Schwarz, *Quantum Fluctuations Of Instantons In Two-Dimensional Nonlinear Theories*, Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 590 (1979) [Yad. Fiz. **30**, 1134 (1979)]; Nucl. Phys. B **154** (1979) 1. See also in A. Polyakov, *Gauge Fields and Strings* (Harwood Press, 1987).
- [86] K. Hori and C. Vafa, *Mirror symmetry*, [arXiv:hep-th/0002222].
- [87] F. Ferrari and A. Bilal, *The Strong coupling spectrum of the Seiberg-Witten theory*, Nucl. Phys. B **469**, 387 (1996) [hep-th/9602082].
- [88] P. Argyres, M. R. Plesser and A. Shapere, *The Coulomb Phase of $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD* Phys. Rev. Lett. **75**, 1699 (1995) [hep-th/9505100].
- [89] P. Argyres, M. Plesser and N. Seiberg, *The Moduli Space of $\mathcal{N} = 2$ SUSY QCD and Duality in $\mathcal{N} = 1$ SUSY QCD*, Nucl. Phys. **B471**, 159 (1996) [hep-th/9603042].
- [90] E. Gerchkovitz and A. Karasik, *New Vortex String World-sheet Theories from Super-Symmetric Localization*, JHEP **03**, 090 (2019) [arXiv:1711.03561 [hep-th]].
- [91] J. Song, *4d/2d correspondence: instantons and W-algebras*, <https://thesis.library.caltech.edu/7103/>. PhD thesis.
- [92] Y. Tachikawa, *$N=2$ supersymmetric dynamics for pedestrians*, Lect. Notes Phys. **890** (2014) [arXiv:1312.2684 [hep-th]].
- [93] M. Shifman and A. Yung, *Hadrons of $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD in Four Dimensions from Little String Theory*, Phys. Rev. D **98**, no. 8, 085013 (2018) [arXiv:1805.10989 [hep-th]].
- [94] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Duality and Confinement in $N=2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **79**, 125012 (2009) [arXiv:0904.1035 [hep-th]].
- [95] M. Shifman and A. Yung, *r Duality and 'Instead-of-Confinement' Mechanism in $N=1$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **86**, 025001 (2012) [arXiv:1204.4165 [hep-th]].

- [96] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, (Perseus Books, Massachusetts, 1995).
- [97] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (Mcgraw-hill, New York, 1980)
- [98] K. Chandrasekharan, *Elliptic Functions*, (Springer-Verlag, Berlin, 1985).

SAINT PETERSBURG STATE UNIVERSITY

PETERSBURG NUCLEAR PHYSICS INSTITUTE
NAMED BY B.P. KONSTANTINOV OF NATIONAL RESEARCH CENTRE
KURCHATOV INSTITUTE

Manuscript copyright

Ievlev Evgenii Albertovich

Dynamics of non-Abelian strings in supersymmetric gauge theories

Specialisation 01.04.02 — Theoretical physics

Dissertation is submitted for the degree
of Candidate of Physical and Mathematical Sciences

Translation from Russian

Thesis supervisor:
Alexei Viktorovich Yung
Doctor in Physical and Mathematical Sciences

Saint Petersburg
2020

Contents

Introduction	222
Chapter 1 Review of non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD	232
1.1 Four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ SQCD	232
1.2 World-sheet sigma model	235
1.3 2D-4D correspondence	237
Chapter 2 Non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD	239
2.1 Outline	239
2.2 μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD	241
2.3 Non-Abelian strings	246
2.3.1 Equations of motion	246
2.3.2 String profile functions	248
2.3.3 Non-equal quark masses	251
2.4 World sheet effective theory	253
2.4.1 $\mathbb{CP}(N - 1)$ model on the string world sheet	253
2.4.2 World-sheet potential at large μ	256
2.4.3 Mass spectrum on the string	259
2.5 Fermion zero modes	260
2.5.1 Superorientational modes in $\mathcal{N} = 2$ limit	261
2.5.2 Small μ expansion for fermion orientational zero modes	263
2.5.3 Lifted fermion orientational modes	267
2.5.4 Effective action in the orientational sector	268
2.5.5 Supertranslational zero modes	268
2.6 Physics of the world sheet theory and confined monopoles	270
Chapter 3 $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD: investigating the semilocal string	274
3.1 Theoretical setup	275
3.1.1 Bulk theory	275
3.1.2 Mass spectrum	278
3.2 Semilocal non-Abelian vortices	280
3.2.1 BPS semilocal non-Abelian string	280
3.2.2 Deformed world-sheet theory	282

3.3	Summary of results	284
Chapter 4	Large N solution of the worldsheet theory	287
4.1	Review of $\mathbb{CP}(N - 1)$ sigma models	288
4.1.1	Non-supersymmetric model	288
4.1.2	$\mathcal{N} = (2, 2)$ model	290
4.1.3	μ -Deformed $\mathbb{CP}(N - 1)$ model	292
4.2	One loop effective potential.....	296
4.2.1	Derivation of the effective potential	296
4.2.2	Vacuum equations	299
4.3	Strong coupling regime	300
4.3.1	Equal mass case, small deformations	301
4.3.2	Effective action	305
4.3.3	Second order phase transition	312
4.3.4	Large deformations	314
4.3.5	Split mass case	316
4.4	Higgs regime	316
4.4.1	Quasivacua	318
4.4.2	Strong - Higgs phase transition	322
4.5	Phase diagram of the worldsheet theory	325
Chapter 5	String “baryon” of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD	328
5.1	Overview.....	328
5.2	Massless 4D baryon from string theory	331
5.3	Kink mass from the exact superpotential	334
5.3.1	Exact central charge.....	334
5.3.2	$\mathbb{CP}(1)$ limit.....	337
5.4	Weak coupling spectrum.....	339
5.5	Mirror description and the strong coupling spectrum.....	340
5.5.1	Mirror superpotential.....	341
5.5.2	Kinks at intermediate β	342
5.5.3	Kinks near the origin $\beta = 0$	345
5.6	Curves of marginal stability	347
5.6.1	Primary curves in the β plane	348
5.7	Instead-of-confinement phase	350
5.8	Stringy baryon from field theory	351
5.9	Detailing the 2D-4D correspondence.....	354
5.9.1	Relation between the couplings	354

5.9.2	Dualities	358
5.10	Discussion	360
Conclusion	363
Appendix A	Useful formulas in two spacetime dimensions	366
Appendix B	Solution of the Dirac equation for superorientational modes	369
Appendix C	Coefficients of the effective action of the $\mathbb{CP}(N-1)$ model	372
C.1	Brief overview	372
C.2	Fermionic loops	373
C.2.1	Photon kinetic term	374
C.2.2	$\text{Re } \sigma$ kinetic term	377
C.2.3	$\text{Im } \sigma$ kinetic term	380
C.2.4	$A_\mu - \text{Im } \sigma$ mixing	381
C.2.5	Would-be $A_\mu - \text{Re } \sigma$ mixing	384
C.3	Bosonic loops	385
C.3.1	Preliminaries	385
C.3.2	Photon kinetic term	386
C.3.3	$\text{Re } \sigma$ kinetic term	389
C.3.4	$\text{Im } \sigma$ kinetic term	390
C.3.5	Would-be mixings	390
C.4	Final result	390
Appendix D	Photon propagator in two spacetime dimensions	391
D.1	Photon propagator in the generalized gauge	391
D.2	Photon masses	392
D.3	Our model	393
Appendix E	Modular functions	395
E.1	θ functions	395
E.2	The \mathbf{h} function	396
E.3	The $\mathbf{\lambda}$ function	397
Appendix F	More on the central charge of the $\text{WC}\mathbb{P}(2,2)$ model	398
F.1	Secondary curves	398
F.1.1	“Extra” kink decays	398
F.1.2	Decay of strong coupling tower of higher winding states	401

F.2	Central charge windings at strong coupling	402
F.2.1	Winding along θ_{2d}	402
F.2.2	From positive to negative β	403
Appendix G	More on self-dual couplings	405
References		407

Introduction

Understanding confinement phenomenon is one of the major unsolved problems in modern theoretical physics. This phenomenon is a feature of strongly interacting particles, and the underlying mechanism is still undetermined.

Quantum chromodynamics (QCD) is a well-established theory of strong interactions. Confinement of quarks and gluons, or color confinement, is a low energy effect, but at low energies QCD is in the strong coupling regime. This circumstance is a serious obstruction to a detailed theoretical study of the confinement phenomenon from the point of view of the QCD itself. However, one of the promising approaches that can nevertheless help us to understand strong coupling phenomena is consideration of supersymmetric cousins of QCD.

In the seminal works of Seiberg and Witten [1, 2] it was shown that in theories with $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry it is possible to observe monopole condensation. This is a realization of the so-called dual Meißner effect suggested by 't Hooft and Mandelstam [3, 4]. The effect is that when magnetic charges condense, the electric field between two probes is compressed in a thin tube, which results in a linear potential between the electric charges. However, confinement in this model is inherently Abelian.

Non-Abelian flux tubes (strings) were discovered in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric quantum chromodynamics (SQCD) with the gauge group $U(N)$ and $N_f = N$ flavors of quark hypermultiplets [5, 6, 7, 8] (see also [9, 10, 11, 12] for a review). When the theory under consideration is in the Higgs phase with respect to the scalar quarks (i.e. in the so-called quark vacuum), non-Abelian strings are formed. They lead to the confinement of monopoles at weak coupling, and to the so-called “instead-of-confinement” phase at strong coupling, see [13] for a review. Thus, it is a non-Abelian generalization of the Seiberg-Witten mechanism [1, 2].

Apart from usual translational zero modes that are characteristic of Abrikosov-

Nielsen-Olesen (ANO) vortices [14], the non-Abelian strings possess also orientational zero modes. Dynamically these new modes can be described by an $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric sigma model with $\mathbb{CP}(N-1)$ target space. Of course, the coordinate space of this model is the two-dimensional string world sheet [5, 6, 7, 8].

Since the bulk SQCD is in the Higgs phase for scalar quarks monopoles are confined by non-Abelian strings. However, the monopoles cannot be attached to the string endpoints. In fact, in the $U(N)$ theories confined monopoles are junctions of two distinct elementary non-Abelian strings. From the point of view of $\mathbb{CP}(N-1)$ model living on the string world sheet confined monopoles are seen as kinks interpolating between different vacua of $\mathbb{CP}(N-1)$ model [7, 8, 15] (see [11] for a review).

The aim of this work is to generalize these constructions to the theories with less supersymmetry, and also to deepen the understanding of the non-Abelian string in the $\mathcal{N} = 2$ theory. We start with the first of these goals.

The $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric quantum chromodynamics is a nice theoretical laboratory to study non-perturbative non-Abelian dynamics. However, since we wish to learn more about the “real world”, we are interested in studying more realistic theories. $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD is one of the most promising examples. Much in the same way as the real world QCD it has no adjoint scalars and no Abelianization of the theory can occur due to their condensation.

A lot of work has been done to generalize the construction of non-Abelian strings to QCD-like theories with less supersymmetry, in particular to $\mathcal{N} = 1$ SQCD [16, 17, 18, 19] see [11] for a review. The author of this thesis also had a hand in these developments, see [19, 20, 21, 22]. One promising approach is to deform $\mathcal{N} = 2$ SQCD by the mass μ of the adjoint matter (one then obtains the so-called μ -deformed SQCD) and study what happens to non-Abelian strings upon this deformation. This deformation breaks $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry. In the limit $\mu \rightarrow \infty$ the adjoint matter decouples and the theory flows to $\mathcal{N} = 1$ QCD.

We started this journey in Chapter 2 from the simplest case when the number of flavors of quark hypermultiplets is the same as the number of colors, $N_f = N$. The μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ SQCD equipped with the Fayet-Iliopoulos (FI) D -term was already considered in the literature [16, 17, 18, 23, 24, 25]. In this case, the solitonic vortex string saturates the Bogomol’nyi–Prasad–Sommerfield (BPS) bound, which

simplifies the analysis. However, in the large μ limit this theory does not flow to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD.

Here we take a different route and consider the μ -deformation of $\mathcal{N} = 2$ QCD without a FI term in a quark vacuum. It is more “realistic” theory, since there is no FI term in the $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD. And indeed, in the large μ limit this deformed theory flows to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD. The squark condensate here is triggered by $\sqrt{\mu m}$, where m is a quark mass. This makes the non-Abelian strings to lose their BPS saturation property. This makes it a lot harder to investigate such solitons, but still it can be done.

The question of the crucial physical importance is whether monopoles survive the limit of large μ when the bulk theory flows to $\mathcal{N} = 1$ QCD. From a quasiclassical point of view, the very existence of ’t Hooft-Polyakov monopoles relies on the presence of adjoint scalars which develop vacuum expectation values (VEV). These adjoint scalar VEVs make possible such solitonic solutions of classical equations of motion. The adjoint fields are also essential in the Seiberg-Witten picture, where the adjoint field VEV leads to formation of monopoles, which in turn condense and are responsible for confinement. At large μ adjoint fields become heavy and decouple in our bulk theory, and their VEVs go to zero. So, quasiclassically we do not expect monopoles to survive.

In the large μ limit we managed to derive the effective theory on the string world sheet. Translational sector again trivial, but something happens with the orientational modes of the string. Turns out, that while the bosonic sector of this theory is still given by the $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ model, the fermionic sector completely decouples. This happens because the string superorientational fermionic zero modes acquire mass and become lifted. This ensures that the world sheet theory is in the Coulomb/confinement phase, at least at large N , see [26]. Moreover, quark mass differences induce a potential in the effective theory, which effectively destroys the monopoles. Therefore, in order for monopoles to survive, the bulk quarks must have equal masses.

These results show that non-Abelian strings and confined monopoles of the μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ SQCD can survive the large μ limit when the bulk theory flows to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD, which is an important and somewhat unexpected result. It serves as an evidence for a physically important conclusion made previously (see e.g.

[13] for a review) that the “instead-of-confinement” phase survives the large μ limit in the quark vacuum of deformed SQCD.

Next, we move on and consider the case $N_f > N$ in Chapter 3. Here, the non-Abelian string acquires new size moduli and turns into the so-called semilocal string. We study the fate of the semilocal string in the μ -deformed SQCD. As could be anticipated, we find that the solitonic vortex under consideration is again no longer BPS saturated. The world sheet theory is no longer supersymmetric.

Somewhat surprising is the fact, that the “semilocality” of the string is also lost. The string size moduli acquire a potential and become heavy, which makes the string to shrink and become “local”. In the large μ limit the world sheet theory becomes exactly the same as in the $N_f = N$ case. And again, the presence of monopoles connected to non-Abelian string supports the “instead-of-confinement” picture.

Next logical step on this road is a closeup consideration of the world sheet effective theory. This is done in Chapter 4 by means of the $1/N$ expansion. Large N approximation was first used by Witten to solve both non-supersymmetric and $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric two-dimensional $\mathbb{CP}(N - 1)$ models [26].

Here we use the large N approximation to study a phase structure of the world sheet theory on the non-Abelian string in μ -deformed SQCD with respect to the deformation parameter μ and quark mass differences Δm . We find a rich phase structure which includes two strong coupling phases and two Higgs phases.

The $\mathcal{N} = (2, 2)$ theory has a family of degenerate vacua, which correspond to different non-Abelian strings in the bulk. It turns out that if we start from small μ and go on to increase the deformation parameter, the world sheet theory inevitably goes through one or more phase transitions.

At large Δm the former degenerate vacua split and become quasivacua, which eventually disappear when the deformation parameter μ is sufficiently large. On the contrary, when we set Δm to zero, the splitting quasivacua do not disappear. Even in the large μ limit the theory still has N quasivacua corresponding to non-Abelian strings with different tensions. The kinks interpolating between these vacua survive.

This allows us to conclude that the confined monopoles survive the μ -deformation if the quark masses are equal to each other. Thus we confirm the results obtained from the bulk SQCD. This also serves as a consistency check of our approach.

The second goal pursued in this work is a better understanding of non-Abelian

strings in the $\mathcal{N} = 2$ case [27].

Consider the $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the $U(N = 2)$ gauge group, $N_f = 4$ flavors of quarks and a Fayet-Iliopoulos D -term [28]. It was discovered earlier in [29] that the non-Abelian semilocal string in this theory is very special. In the bulk, the gauge coupling renormalization exactly cancels, and the β -function is zero. The world sheet theory turns out to be both superconformal and critical.

From the analysis of the non-Abelian vortex, a “thin string” hypothesis was put forward [29]. Basically it states that in the strong coupling limit, the vortex string transverse size goes to zero, and the string can be treated as the critical superstring. This allows one to apply the advanced machinery of string theory to calculating e.g. the spectrum of states in this theory. The vortex string at hand was identified as the string theory of Type IIA [30].

Hadrons of the $\mathcal{N} = 2$ SQCD are pictured as closed string states¹. In particular, in [30, 31] a massless hypermultiplet was found, which was identified with a baryon of the four dimensional $\mathcal{N} = 2$ SQCD. It was called the b -baryon.

In view of these stringy results, we would like to test and explain them from the field theory point of view. In the present work we do just that, see Chapter 5. In order to do that we exploit the so-called 2D-4D correspondence, i.e. the coincidence of BPS spectra in four-dimensional (4D) $\mathcal{N} = 2$ SQCD and in the string world-sheet theory [7, 8, 32]. This allows us to essentially study only the two dimensional effective theory and then translate the results into the four dimensional language.

We explore the BPS protected sector of the world-sheet $WCP(2, 2)$ model, starting from the weak coupling regime where we can compare with quasiclassical results. After we’ve established firm ground there, we progress into the strong coupling regime. We confirm that the theory enters the so-called “instead-of-confinement” phase found earlier, see [13] for a review. This phase is qualitatively similar to the conventional QCD confinement: the quarks and gauge bosons screened at weak coupling, at strong coupling evolve into monopole-antimonopole pairs confined by non-Abelian strings. They form mesons and baryons.

At very strong coupling a new short BPS massless hypermultiplet arises, which

¹There are no open strings in our theory since the non-Abelian string cannot end on a monopole. Instead, the monopole always is a junction of two vortices. This is a fortunate circumstance; otherwise, we would have $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry in four dimensions instead of $\mathcal{N} = 2$.

turns out to be the b -baryon found earlier from the string theory picture. In this way we demonstrate that the massless “baryon” state which had been previously observed using string theory arguments [30] is seen in the field-theoretical approach too. We believe this is the first example of this type.

These results also serve as another confirmation of the “thin string hypothesis” mentioned above. Treatment of the solitonic vortex as a critical superstring appears to be consistent. Thus, on this strong coupling voyage, we seem to have pretty good paddles to travel.

The statements and results put forward for defense

The statements and results are:

1. It is shown that non-Abelian strings and confined monopoles of the μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ SQCD can survive the large μ limit when the bulk theory flows to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD. They survive if the SQCD quarks have equal masses.
2. It is shown that the low energy effective theory on the world sheet of the non-Abelian string in the $\mathcal{N} = 1$ SQCD with the $U(N)$ gauge group and $N_f = N$ quark hypermultiplets is the non-supersymmetric sigma model with the $\mathbb{CP}(N - 1)$ target space in the orientational sector. The translational sector is trivial and decoupled.
3. It is shown that the semilocal string of the μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ SQCD with $N < N_f < 2N$ degenerates in the large μ limit when the bulk theory flows to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD. Namely, the size moduli develop a potential and decouple, while the semilocal string becomes a local one. The world sheet theory in this limit is the same as in the $N_f = N$ case.
4. The low energy effective theory on the world sheet of the non-Abelian string in the theory interpolating from $\mathcal{N} = 2$ to $\mathcal{N} = 1$ SQCD is solved to the leading order in the large N approximation. The solution of this world sheet model confirms the results derived from the bulk theory, namely, that the non-Abelian strings and confined monopoles survive in the limit of equal quark masses. Moreover, the phase diagram of the world sheet model is obtained.

5. The massless b -baryon hypermultiplet of the $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the $U(2)$ gauge group and $N_f = 4$ flavors of quark hypermultiplets, derived previously using the string theory approach, is found here by pure field theory methods. This is yet another confirmation of the “thin string” hypothesis for the non-Abelian string in this theory.
6. The “instead-of-confinement” mechanism is demonstrated explicitly in the $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the $U(2)$ gauge group and $N_f = 4$ flavors of quark hypermultiplets. It is shown that, after a wall-crossing, the screened quarks and gauge bosons of weak coupling are replaced by the confined monopole-antimonopole pairs of strong coupling.

Thesis structure

The thesis consists of Introduction, five Chapters, Conclusion, seven Appendices and a list of references. The thesis contains 199 pages, 29 figures. The list of references includes 98 items.

- In **Introduction** we describe the general idea of this thesis. Also, the main statements to defend are formulated, and the approbation of this research is discussed.
- In **Chapter 1** we review the necessary background on non-Abelian string in supersymmetric gauge theories.
- In **Chapter 2** we consider the μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the number of colors equal to the number of flavors, $N_f = N$. We focus on the large μ limit, when the theory flows to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD. We investigate the fate of the non-Abelian strings and confined monopoles in this limit.
- In **Chapter 3** we generalize the construction of Chapter 2 and move on to the $N_f > N$ case. We investigate what happens to the semilocal non-Abelian strings in the $\mathcal{N} = 1$ limit.
- **Chapter 4** presents the study of the low energy effective theory on the non-Abelian string of SQCD that interpolates between $\mathcal{N} = 2$ and $\mathcal{N} = 1$ super-

symmetry. We focus on the $N_f = N$ case. Using the large N expansion, we solve the world sheet theory and obtain a phase diagram of the model.

- In **Chapter 5** we move in another direction and consider again the $\mathcal{N} = 2$ bulk theory, that is $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the $U(2)$ gauge group and $N_f = 4$ quark hypermultiplets. In this case, the world sheet theory is superconformal. We find there a massless state corresponding to the b -baryon found previously by using string theory methods. We also study the “instead-of-confinement” mechanism in action.
- **Conclusion** presents the main results of this work and outlines possible future directions.
- Quite extensive **Appendices** contain useful information and additional results. They explain and complement some of the material presented in the core of this thesis, while at the same time not obstructing reading of the main text.

Personal contribution of the author

All of the main findings submitted for defense were obtained personally by the applicant or in work of joint authorship.

Approbation of the research

The findings of the investigation were reported and discussed at the following conferences:

1. 2015 09-12 November, SPbSU: International Student Conference "Science and Progress"
2. 2016 29 February - 05 March, Roschino, Russia: 50th PNPI Winter School
3. 2016 17-21 October, SPbSU: International Student Conference "Science and Progress"
4. 2018 27 May - 2 June, Valday, Russia: XXth International Seminar on High Energy Physics "Quarks-2018"

5. 2018 14-23 June, Erice, Italy: 56th Course of the International School of Subnuclear Physics "From gravitational waves to QED, QFD and QCD"
6. 2018 27-31 August, SPbSU: VI International Conference "Models in Quantum Field Theory"
7. 2019 2-7 March, Roschino, Leningrad Oblast, Russia: 53th PNPI Winter School
8. 2019 21-30 June, Erice, Italy: 57th Course of the International School of Subnuclear Physics on "In Search for the Unexpected"
9. 2020 10-15 March, Roschino, Leningrad Oblast, Russia: 54th PNPI Winter School
10. 2020 13-24 July, online: "QFT and Geometry Summer School"
11. 2020 24-28 August, online: "Hamilton School on Mathematical Physics"
12. 2020 9-13 November, online: "The XXIV International Scientific Conference of Young Scientists and Specialists"
13. 2020 16-20 November, online: International Conference "YITP workshop Strings and Fields"

In addition, the results were reported and discussed at the meetings of the Theory Division of the NRC Kurchatov Institute — PNPI and at the meetings of the High Energy and Elementary Particles Physics Department Department of Saint Petersburg State University.

The results obtained within this study were published in 5 articles (and are included in the RSCI, Web of Science and Scopus databases):

1. E. Ievlev, A. Yung, *Non-Abelian strings in $N=1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **95**, 125004 (2017)
2. E. Ievlev, A. Yung, *What Becomes of Semilocal non-Abelian strings in $N=1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **98**, 094033 (2018)

3. E. Ievlev, A. Yung, *Non-Abelian strings in $N=1$ supersymmetric QCD (Conference Paper)*, EPJ Web of Conferences **191**, 06003 (2018)
4. A. Gorsky, E. Ievlev, A. Yung, *Dynamics of non-Abelian strings in the theory interpolating from $N=2$ to $N=1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **101**, 014013 (2020)
5. E. Ievlev, M. Shifman, A. Yung, *String Baryon in Four-Dimensional $N=2$ Supersymmetric QCD from the 2D-4D Correspondence*, Phys. Rev. D **102**, 054026 (2020)

Acknowledgments

The author would like to express his deepest gratitude to his advisor Dr. Alexei Viktorovich Yung for his patience, friendly attitude and support. Over the years he guided me towards understanding modern theoretical physics and shared countless ideas. The applicant would also like to thank his article co-authors, Mikhail Arkadyevich Shifman and Aleksandr Sergeevich Gorsky, without whom this work would also have been hardly possible.

This work was supported by the Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics “BASIS” according to the research project No. 19-1-5-106-1 “PhD Student”, and by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR) according to the research projects No. 18-32-00015 (for young scientists) and No. 18-02-00048. The author wishes that RFBR would continue to support small research groups and ambitious young scientists.

The applicant appreciates the hospitality of Saint Petersburg State University and NRC Kurchatov Institute — Petersburg Nuclear Physics Institute, where this work was carried out. The applicant also thanks the members of the PNPI Theory Division and SPbSU High Energy and Elementary Particles Physics Department, who participated in discussions of the results presented here.

CHAPTER 1

Review of non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD

This Chapter complements the Introduction. It presents a more detailed background on the subject of the non-Abelian strings.

1.1 Four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ SQCD

Non-Abelian vortex strings were first found in 4D $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the gauge group $U(N)$ and $N_f \geq N$ quark flavors [5, 6, 7, 8], see [9, 10, 11, 12] for review. In particular, the matter sector of the $U(N)$ theory contains N_f quark hypermultiplets each consisting of the complex scalar fields q^{kA} and \tilde{q}_{Ak} (squarks) and their fermion superpartners – all in the fundamental representation of the $SU(N)$ gauge group. Here $k = 1, \dots, N$ is the color index while A is the flavor index, $A = 1, \dots, N_f$. We also introduce quark masses m_A . In addition, we introduce the Fayet–Iliopoulos parameter ξ corresponding to the D -term in the $U(1)$ factor of the gauge group. It does not break $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry.

At weak coupling, $g^2 \ll 1$ (here g^2 is the $SU(N)$ gauge coupling), this theory is in the Higgs regime in which squarks develop vacuum expectation values. The squark VEV's are

$$\langle q^{kA} \rangle = \sqrt{\xi} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \tilde{q}^{kA} \rangle = 0,$$

$$k = 1, \dots, N, \quad A = 1, \dots, N_f, \quad (1.1.1)$$

where the squark fields are presented as matrices in the color (k) and flavor (A) indices (the small Latin letters mark the lines in this matrix while capital letters

mark the rows).

These VEVs break the $U(N)$ gauge group. As a result, all gauge bosons are Higgsed. The Higgsed gauge bosons combine with the screened quarks to form long $\mathcal{N} = 2$ multiplets, with the mass

$$m_G \sim g\sqrt{\xi}. \quad (1.1.2)$$

In addition to the $U(N)$ gauge symmetry, the squark condensate (1.1.1) breaks also the flavor $SU(N_f)$ symmetry. If the quark masses vanish, a diagonal global $SU(N)$ combining the gauge $SU(N)$ and an $SU(N)$ subgroup of the flavor $SU(N_f)$ group survives, however. This is a well known phenomenon of color-flavor locking.

Thus, the unbroken global symmetry of our 4D SQCD is

$$SU(N)_{C+F} \times SU(\tilde{N}) \times U(1)_B. \quad (1.1.3)$$

Above,

$$\tilde{N} = N_f - N.$$

This $U(1)$ in (1.1.3) is associated with \tilde{N} quarks with the flavor indices $A = N + 1, N + 2, \dots, N_f$, see [11] for more details. More exactly, our $U(1)_B$ is an unbroken (by the squark VEVs) combination of two $U(1)$ symmetries: the first is a subgroup of the flavor $SU(N_f)$ and the second is the global $U(1)$ subgroup of $U(N)$ gauge symmetry.

The unbroken global $U(1)_B$ factor in Eq. (1.1.3) is identified with a ‘‘baryonic’’ symmetry. Note that what is usually identified as the baryonic $U(1)$ charge is a *part* of our 4D SQCD *gauge* group.

The 4D theory has a Higgs branch \mathcal{H} formed by massless quarks which are in the bifundamental representation of the global group (1.1.3) and carry baryonic charge, see [30] for more details. The dimension of this branch is

$$\dim \mathcal{H} = 4N\tilde{N}. \quad (1.1.4)$$

This perturbative Higgs branch is an exact property of the theory and can be continued all the way to strong coupling.

As was already noted, we consider $\mathcal{N} = 2$ SQCD in the Higgs phase: N squarks condense. Therefore, the non-Abelian vortex strings at hand confine monopoles. In

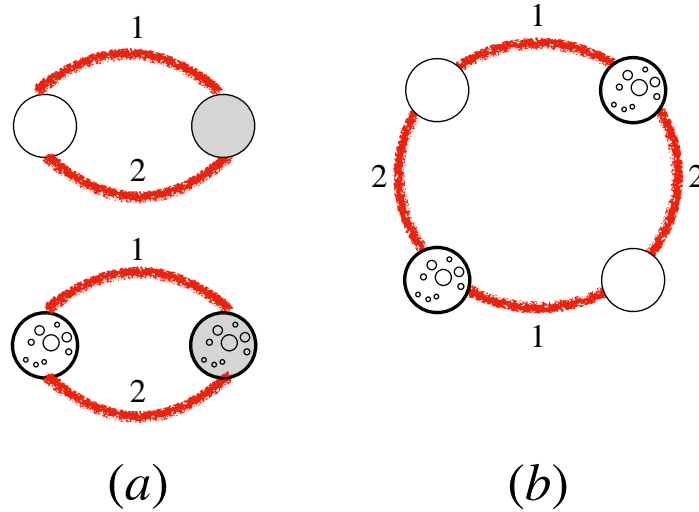


Figure 1.1: Examples of the monopole “necklaces”: (a) mesonic; (b) baryonic. 1,2 refer to two types of strings corresponding to two vacua on the string world sheet. The shaded circles are antimonopoles. The two types of kinks are the n^P -kinks and ρ^K -kinks.

the $\mathcal{N} = 2$ 4D bulk theory the above strings are 1/2 BPS-saturated; hence, their tension is determined exactly by the FI parameter,

$$T = 2\pi\xi. \quad (1.1.5)$$

However, the monopoles cannot be attached to the string endpoints because in $U(N)$ theories strings are topologically stable. In fact, in the $U(N)$ theories confined monopoles are junctions of two distinct elementary non-Abelian strings [7, 8, 33] (see [11] for a review). As a result, in 4D $\mathcal{N} = 2$ SQCD we have monopole-antimonopole mesons in which monopole and antimonopole are connected by two confining strings, see Fig. 1.1a. In addition, in the $U(N)$ gauge theory we can have baryons appearing as a closed “necklace” configurations of $N \times (\text{integer})$ monopoles [11]. For the $U(2)$ gauge group the important example of a baryon consists of four monopoles as shown in Fig. 1.1b.

Both stringy monopole-antimonopole mesons and monopole baryons with spins $J \sim 1$ have masses determined by the string tension, $\sim \sqrt{\xi}$ and are heavier at weak coupling $g^2 \ll 1$ than perturbative states with masses $m_G \sim g\sqrt{\xi}$. Thus they can decay into perturbative states¹ and in fact at weak coupling we do not expect them to appear as stable states.

Only in the strong coupling domain $g^2 \sim 1$ we can expect that (at least some

¹Their quantum numbers with respect to the global group (1.1.3) allow these decays, see [11].

of) stringy mesons and baryons shown in Fig. 1.1 become stable.

1.2 World-sheet sigma model

The presence of the color-flavor locked group $SU(N)_{C+F}$ is the reason for the formation of the non-Abelian vortex strings [5, 6, 7, 8]. The most important feature of these vortices is the presence of the orientational zero modes. As was already mentioned, in $\mathcal{N} = 2$ SQCD these strings are 1/2 BPS saturated.

Let us briefly review the model emerging on the world sheet of the non-Abelian string [11].

The translational moduli fields are described by the Nambu–Goto action² and decouple from all other moduli. Below we focus on internal moduli.

If $N_f = N$ the dynamics of the orientational zero modes of the non-Abelian vortex, which become orientational moduli fields on the world sheet, are described by two-dimensional (2D) $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ model.

If one adds additional quark flavors, non-Abelian vortices become semilocal – they acquire size moduli [34]. For the non-Abelian semilocal vortex in $U(N)$ $\mathcal{N} = 2$ SQCD with N_f flavors, in addition to the complex orientational moduli n^P (here $P = 1, \dots, N$), we must add the size moduli ρ^K (where $K = N + 1, \dots, N_f$), see [5, 8, 34, 35, 36, 37]. The size moduli are also complex.

The effective theory on the string world sheet is a two-dimensional $\mathcal{N} = (2, 2)$ weighted $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ sigma model, which we denote $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(N, \tilde{N})$ ³ [29, 30, 31]. This model describes internal dynamics of the non-Abelian semilocal string. For details see e.g. the review [11].

The $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(N, \tilde{N})$ sigma model can be defined as a low energy limit of the $U(1)$

²In the supersymmetrized form.

³Both the orientational and the size moduli have logarithmically divergent norms, see e.g. [35]. After an appropriate infrared regularization, logarithmically divergent norms can be absorbed into the definition of relevant two-dimensional fields [35]. In fact, the world-sheet theory on the semilocal non-Abelian string is not exactly the $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(N, \tilde{N})$ model [37], there are minor differences. The actual theory is called the zn model. Nevertheless it has the same infrared physics as the model (1.2.1) [38], see also [39].

gauge theory [40]. The bosonic part of the action reads ⁴

$$S = \int d^2x \left\{ |\nabla_\alpha n^P|^2 + |\tilde{\nabla}_\alpha \rho^K|^2 + \frac{1}{4e^2} F_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{e^2} |\partial_\alpha \sigma|^2 \right. \\ \left. + 2 \left| \sigma + \frac{m_P}{\sqrt{2}} \right|^2 |n^P|^2 + 2 \left| \sigma + \frac{m_K}{\sqrt{2}} \right|^2 |\rho^K|^2 + \frac{e^2}{2} (|n^P|^2 - |\rho^K|^2 - r)^2 \right\}, \quad (1.2.1)$$

$$P = 1, \dots, N, \quad K = N + 1, \dots, N_f.$$

Here, m_A ($A = 1, \dots, N_f$) are the so-called twisted masses (they come from 4D quark masses), while r is the inverse coupling constant (2D FI term). Note that r is the real part of the complexified coupling constant introduced in Eq. (1.2.5),

$$r = \text{Re } \beta.$$

The fields n^P and ρ^K have charges $+1$ and -1 with respect to the auxiliary $U(1)$ gauge field, and the corresponding covariant derivatives in (1.2.1) are defined as

$$\nabla_\alpha = \partial_\alpha - iA_\alpha, \quad \tilde{\nabla}_\alpha = \partial_\alpha + iA_\alpha, \quad (1.2.2)$$

respectively. The complex scalar field σ is a superpartner of the $U(1)$ gauge field A_α .

The number of real bosonic degrees of freedom in the model (1.2.1) is $2N_f - 1 - 1 = 2(N_f - 1)$. Here $2N_f$ is the number of real degrees of freedom of n^P and ρ^K fields and we subtracted one real constraint imposed by the last term in (1.2.1) in the limit $e^2 \rightarrow \infty$ and one gauge phase eaten by the Higgs mechanism.

Apart from the $U(1)$ gauge symmetry, the sigma model (1.2.1) in the massless limit has a global symmetry group

$$SU(N) \times SU(\tilde{N}) \times U(1)_B, \quad (1.2.3)$$

i.e. exactly the same as the unbroken global group in the 4D theory (1.1.3). The fields n and ρ transform in the following representations:

$$n : (\mathbf{N}, \mathbf{1}, 0), \quad \rho : (\mathbf{1}, \tilde{\mathbf{N}}, 1). \quad (1.2.4)$$

Here the global ‘‘baryonic’’ $U(1)_B$ symmetry is a classically unbroken (at $\beta > 0$) combination of the global $U(1)$ group which rotates n and ρ fields with the same

⁴Equation (1.2.1) and similar expressions below are given in Euclidean notation.

phases plus $U(1)$ gauge symmetry which rotates them with the opposite phases, see [30] for details. Non-zero twisted masses m_A break each of the SU factors in (1.2.3) down to a product of $U(1)$'s.

The 2D coupling constant r can be naturally complexified if we include the θ term in the action,

$$\beta = r + i \frac{\theta_{2d}}{2\pi}, \quad (1.2.5)$$

where θ_{2d} is the two-dimensional θ angle.

1.3 2D-4D correspondence

Previous studies of the vortex strings supported in four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ super-QCD at weak coupling showed that the non-Abelian vortices confine monopoles. The elementary monopoles are junctions of two distinct elementary non-Abelian strings [7, 8]. In the 4D bulk theory we have monopole-antimonopole mesons in which monopole and antimonopole are connected by two confining strings (see Fig. 1.1). For the $U(N)$ gauge group we can have also “baryons” consisting of N number of monopoles rather than of the monopole-antimonopole pair.

The monopoles acquire quantum numbers with respect to the global group (1.1.3) of the 4D SQCD, see [11] for a review. Indeed, in the world-sheet model on the vortex string, confined monopoles are seen as kinks interpolating between two different vacua [7, 8]. These kinks are described at strong coupling by n^P and ρ^K fields [26, 41] (for $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ model $P = 1, \dots, N$, $K = N + 1, \dots, N_f$). These two types of kinks correspond to two types of monopoles – both have the same magnetic charge but different global charges. This is seen from the fact that the global symmetry in the world-sheet theory on the string is exactly the same as given in Eq. (1.1.3) and the $U(1)$ charges of the n^P and ρ^K fields are 0 and 1, respectively. One of them is a fundamental field in the first SU group and the other in the second, see (1.2.4). This refers to confined 4D monopoles too.

As was mentioned above confined monopoles of 4D SQCD are junctions of two different elementary non-Abelian strings. In the world-sheet theory they are seen as kinks interpolating between different vacua of $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ model. This ensures 2D-4D correspondence: the coincidence between the BPS spectrum of monopoles in 4D SQCD at a particular singular point on the Coulomb branch (which becomes the

quark vacuum (1.1.1) once we introduce non-zero ξ) and the spectrum of kinks in 2D $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ model. The masses of (dyonic) monopoles in 4D SQCD are given by the exact Seiberg-Witten solution [2], while the kink spectrum in $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ model can be derived from exact twisted effective superpotential [32, 40, 42, 43, 44, 45]. This effective superpotential is written in terms of the twisted chiral superfield which has the complex scalar field σ (see (1.2.1)) as its lowest component [40], see Sec. 5.3 where we introduce this superpotential and study the kink spectrum for the $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ model.

This coincidence was observed in [32, 45] and explained later in [7, 8] using the picture of confined bulk monopoles which are seen as kinks in the world sheet theory. A crucial point is that both the monopoles and the kinks are BPS-saturated states⁵, and their masses cannot depend on the non-holomorphic parameter ξ [7, 8]. This means that, although the confined monopoles look physically very different from unconfined monopoles on the Coulomb branch of 4D SQCD (in a particular singular point that becomes the isolated vacuum at nonzero ξ), their masses are the same. Moreover, these masses coincide with the masses of kinks in the world-sheet theory.

Note that VEVs of σ given by the exact twisted superpotential coincide with the double roots of the Seiberg-Witten curve [2] in the quark vacuum of 4D SQCD [32, 45]. This is the key technical reason that leads to the coincidence of the 2D and 4D BPS spectra.

⁵Confined monopoles, being junctions of two distinct 1/2-BPS strings, are 1/4-BPS states in 4D SQCD [7].

CHAPTER 2

Non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD

In much the same way as the real world QCD, $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD does not have adjoint scalars. Therefore it is believed to have an essentially non-Abelian dynamics. On the other hand, due to supersymmetry it is more tractable than non-supersymmetric QCD. One may hope that, starting from $\mathcal{N} = 2$ QCD and decoupling the adjoint scalars, one can arrive at a non-Abelian regime. In particular, it was shown that the non-Abelian "instead-of-confinement" phase survives in the limit where the adjoint matter (present in $\mathcal{N} = 2$ QCD) decouples, see review [13] and references therein.

In this Chapter we make this step and study what happens to the non-Abelian confining strings upon decoupling of the adjoint matter. Namely, we consider a deformation of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with the $U(N)$ gauge group and $N_f = N$ quark flavors by a mass term μ of the adjoint matter. The μ -deformation breaks the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry and in the limit of large μ the theory flows to $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD.

2.1 Outline

In addition to the translational zero modes typical for ANO strings, non-Abelian strings have orientational moduli associated with rotations of their fluxes inside the non-Abelian $SU(N)$ group. The dynamics of the orientational moduli in $\mathcal{N} = 2$ QCD is described by the two dimensional $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ model living on the world sheet of the non-Abelian string. In this Chapter we study the solution for the non-Abelian string and derive an effective theory on the string world sheet in the limit of large μ .

Similar problem was addressed in [16, 17, 18, 23, 24, 25] where the μ -deformation

was considered in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with the $U(N)$ gauge group and $N_f = N$ flavors of massless quarks supplemented by the Fayet-Iliopoulos D -term. In the limit of large μ this theory flows to a theory which differs from $\mathcal{N} = 1$ QCD by the presence of the FI term. In particular, in this theory a scalar quark (squark) condensation is triggered by the FI D -term.

It was shown in the aforementioned papers that bosonic profile functions of the non-Abelian string stay intact upon the μ -deformation, while the fermionic zero modes are changed as compared to the ones in the $\mathcal{N} = 2$ limit. The string remains BPS saturated and the world sheet theory becomes the heterotic $\mathbb{CP}(N - 1)$ model with $\mathcal{N} = (0, 2)$ supersymmetry [17, 18, 23, 25]. In this model, the supertranslational fermionic moduli interact with the superorientational ones. Large N solution of the world sheet model shows that $\mathcal{N} = (0, 2)$ supersymmetry is spontaneously broken [24]. The model has N vacua corresponding to N different non-Abelian strings and the discrete Z_{2N} symmetry is spontaneously broken.

In this Chapter we consider the μ -deformation of $\mathcal{N} = 2$ QCD without a FI term in a quark vacuum. Squark condensate is determined by $\sqrt{\mu m}$, where m is a quark mass. Note that while in the presence of the FI D -term it was not really possible to introduce quark masses, in the present setup quarks are massive. Moreover, as was mentioned above, this theory is more “realistic” also because there is no FI term. In the large μ limit the theory flows to $\mathcal{N} = 1$ QCD in the quark vacuum. Non-Abelian strings cease to be BPS saturated and both bosonic and fermionic profile of the string are modified.

We study solutions for the non-Abelian string profile functions in the large μ limit and derive the effective theory on the string world sheet. The bosonic sector of this theory is still given by the $\mathbb{CP}(N - 1)$ model. The $\mathbb{CP}(N - 1)$ model is asymptotically free, and it is determined by its scale Λ_{CP} (position of the infra-red pole of the coupling constant). At small μ $\Lambda_{CP} = \Lambda_{\mathcal{N}=2}$, where $\Lambda_{\mathcal{N}=2}$ is the scale of four dimensional $\mathcal{N} = 2$ QCD, see, for example, review [11]. We show that in the in the large μ limit Λ_{CP} is exponentially small. We also derive a potential in two dimensional world sheet theory induced by quark mass differences.

Next we study the fermionic sector of the world sheet theory. Upon the μ -deformation the fermionic superorientational zero modes are all lifted. This leaves us with the pure bosonic $\mathbb{CP}(N - 1)$ model on the string world sheet in the limit

when the bulk theory becomes $\mathcal{N} = 1$ QCD. This ensures that the world sheet theory is in the Coulomb/confinement phase, at least at large N , see [26].

We also address a question of what happens to the confined 't Hooft-Polyakov monopoles present in the $\mathcal{N} = 2$ limit, when we go to the large μ . Studying the world sheet potential we show that confined monopoles seen in the world sheet theory as kinks [7, 8] become unstable at large μ if quark masses are not equal. However, if quarks have equal masses the confined monopoles survive in the limit of $\mathcal{N} = 1$ QCD.

2.2 μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD

In this section we review our four dimensional bulk theory, see review [11] for more details. The bulk theory is μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with the gauge group $U(N) = SU(N) \times U(1)$. The field content of the theory is as follows. The $\mathcal{N} = 2$ vector multiplet consists of the $U(1)$ gauge field A_μ and $SU(N)$ gauge field A_μ^a , complex scalar fields $a^{U(1)}$ and a^a in the adjoint representation, and their fermion superpartners $(\lambda_\alpha^1, \lambda_\alpha^2)$ and $(\lambda_\alpha^{1a}, \lambda_\alpha^{2a})$. The adjoint index a runs from 1 to $N^2 - 1$, while the spinorial index $\alpha = 1, 2$. The adjoint scalars and fermions λ^2 can be combined into the $\mathcal{N} = 1$ adjoint matter chiral multiplets $\mathcal{A}^{U(1)}$ and $\mathcal{A}^{SU(N)} = \mathcal{A}^a T^a$, where T^a are generators of the $SU(N)$ gauge group normalized as $\text{Tr}(T^a T^b) = (1/2) \delta^{ab}$.

The matter sector consists of $N_f = N$ flavors of quark hypermultiplets in the fundamental representation and scalar components (squarks) q^{kA} and \tilde{q}_{Ak} , while the fermions are represented by ψ^{kA} and $\tilde{\psi}_{Ak}$. Here $A = 1, \dots, N$ is a flavor index and $k = 1, \dots, N$ is a color index.

The superpotential of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD reads

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=2} = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{q}_A \mathcal{A}^{U(1)} q^A + \tilde{q}_A \mathcal{A}^a T^a q^A \right\} + m_A \tilde{q}_A q^A, \quad (2.2.1)$$

where we use the same notations for quark multiplets q^A and \tilde{q}_A and their scalar components, while m_A are quark masses.

The μ -deformation is the mass term for the adjoint matter

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\mu_1}{2} \left(\mathcal{A}^{U(1)} \right)^2 + \frac{\mu_2}{2} \left(\mathcal{A}^a \right)^2, \quad (2.2.2)$$

which breaks $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry down to $\mathcal{N} = 1$.

In the special case when

$$\mu \equiv \mu_2 = \mu_1 \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad (2.2.3)$$

superpotential (2.2.2) becomes a single trace operator

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \mu \text{Tr}(\Phi^2) \quad (2.2.4)$$

where we defined a scalar adjoint matrix as

$$\Phi = \frac{1}{2} a^{U(1)} + T^a a^a. \quad (2.2.5)$$

We will consider bulk QCD in the limit of large μ_1 and μ_2 , when the adjoint matter decouples and the theory becomes $\mathcal{N} = 1$ QCD. Integrating out the adjoint matter in a sum of superpotentials (2.2.1) and (2.2.2) we get a quark superpotential of our μ -deformed bulk theory

$$\mathcal{W}(q, \tilde{q}) = -\frac{1}{2\mu_2} \left[(\tilde{q}_A q^B)(\tilde{q}_B q^A) - \frac{\alpha}{N} (\tilde{q}_A q^A)^2 \right] + m_A (\tilde{q}_A q^A), \quad (2.2.6)$$

where

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (2.2.7)$$

In the case of single trace deformation (2.2.3) $\alpha = 0$.

The bosonic action of the theory is ¹

$$S_{\text{bos}} = \int d^4x \left(\frac{1}{2g_2^2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{\text{SU}(N)} \right)^2 + \frac{1}{4g_1^2} \left(F_{\mu\nu}^{\text{U}(1)} \right)^2 + \left| \nabla_\mu q^A \right|^2 + \left| \nabla_\mu \tilde{q}^A \right|^2 + V(q^A, \tilde{q}_A) \right). \quad (2.2.8)$$

Here ∇_μ is a covariant derivative

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{\text{U}(1)} - i A_\mu^a T^a, \quad (2.2.9)$$

¹From here further on in this Chapter we use a Euclidean notation, that is $F_{\mu\nu}^2 = 2F_{0i}^2 + F_{ij}^2$, $(\partial_\mu a)^2 = (\partial_0 a)^2 + (\partial_i a)^2$, etc. Furthermore, the sigma-matrices are defined as $\sigma^{\alpha\dot{\alpha}} = (1, -i\vec{\tau})$, $\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha} = (1, i\vec{\tau})$. Lowering and raising of spinor indices are performed by virtue of an anti-symmetric tensor defined as $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1$, $\varepsilon^{12} = \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1$. The same raising and lowering convention applies to the flavor $\text{SU}(N)$ indices f, g , etc.

while the scalar potential $V(q^A, \tilde{q}_A)$ is a sum of the D -term and F -term potentials,

$$V(q^A, \tilde{q}_A) = V_D(q^A, \tilde{q}_A) + V_F(q^A, \tilde{q}_A). \quad (2.2.10)$$

The D -term potential reads

$$V_D = \frac{g_2^2}{2} (\bar{q}_A T^a q^A - \tilde{q}_A T^a \tilde{q}^A)^2 + \frac{g_1^2}{8} (|q^A|^2 - |\tilde{q}^A|^2)^2, \quad (2.2.11)$$

while the F term potential is determined by superpotential (2.2.6). It has the form

$$\begin{aligned} V_F = \frac{1}{|\mu_2|^2} & \left\{ (\bar{q}_A q^B) \left[(\bar{q}_C \tilde{q}^A) - \frac{\bar{\alpha}}{N} \delta_C^A (\bar{q}_F \tilde{q}^F) - \bar{\mu}_2 \bar{m}_A \delta_C^A \right] \right. \\ & \times \left[(\tilde{q}_B q^C) - \frac{\alpha}{N} \delta_B^C (\tilde{q}_F q^F) - \mu_2 m_B \delta_B^C \right] \\ & + (\tilde{q}_A \tilde{q}^B) \left[(\bar{q}_B \tilde{q}^C) - \frac{\bar{\alpha}}{N} \delta_B^C (\bar{q}_F \tilde{q}^F) - \bar{\mu}_2 \bar{m}_B \delta_B^C \right] \\ & \left. \times \left[(\tilde{q}_C q^A) - \frac{\alpha}{N} \delta_C^A (\tilde{q}_F q^F) - \mu_2 m_A \delta_C^A \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

In this work we will consider the vacuum (zero of the potential (2.2.10)) where the maximal possible number of quark flavors equal to N condense (the so called $r = N$ vacuum, where r is the number of condensed squark flavors at weak coupling, see [13] for a review). In this vacuum squark VEVs are given by

$$\langle q^{kA} \rangle = \langle \tilde{q}^{kA} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\xi_1} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \sqrt{\xi_N} \end{pmatrix}, \quad (2.2.13)$$

where we wrote down the squark field as an $N \times N$ matrix in color and flavor indices, and the parameters ξ_A are defined as

$$\xi_A = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 (m_A - \hat{m}) \right), \quad (2.2.14)$$

while

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N m_A. \quad (2.2.15)$$

For single trace deformation (2.2.3) expressions for the parameters ξ_A simplify:

$$\xi_A = 2 \mu_2 m_A \quad (2.2.16)$$

In this Chapter we will mostly consider the non-Abelian limit when all quark masses are equal,

$$m_1 = m_2 = \dots = m_N \equiv m, \quad (2.2.17)$$

so that the parameters ξ_A degenerate, $\xi_A \equiv \xi$, and the squark VEVs become

$$\langle q^{kA} \rangle = \langle \bar{q}^{kA} \rangle = \sqrt{\frac{\xi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

Note that if we take the limit $\mu \rightarrow \infty$ (keeping the quark masses fixed) the parameters $\xi \sim \mu m$ also go to infinity, and our quark vacuum becomes a run-away vacuum (all the r vacua with the non-zero r become run-away vacua). In this case $\mathcal{N} = 1$ QCD is a theory with only N vacua which originate from N monopole vacua ($r = 0$ vacua) of $\mathcal{N} = 2$ QCD.

Here we define $\mathcal{N} = 1$ QCD in a different way. By taking the limit of large μ we make the quark masses small so that the product μm (and the quark VEVs) are fixed,

$$\mu \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow 0, \quad \mu m = \text{fixed}. \quad (2.2.19)$$

This way we keep track of all the r vacua present in $\mathcal{N} = 2$ QCD. In this Chapter we will study non-Abelian strings particularly in the $r = N$ quark vacuum (2.2.18) assuming the limit of large μ when the bulk theory flows to the generalized $\mathcal{N} = 1$ QCD defined above.

In order to keep our bulk theory at weak coupling we assume that the squark VEVs are large as compared with the scale $\Lambda_{\mathcal{N}=1}$ of the $SU(N)$ sector of $\mathcal{N} = 1$ QCD. Namely, we assume that

$$\sqrt{\mu m} \gg \Lambda_{\mathcal{N}=1}. \quad (2.2.20)$$

Squark VEVs (2.2.18) result in a spontaneous breaking of both gauge and flavor $SU(N)$'s. The diagonal global $SU(N)$ survives, however,

$$U(N)_{\text{gauge}} \times SU(N)_{\text{flavor}} \rightarrow SU(N)_{C+F}, \quad (2.2.21)$$

cf. (1.1.3). A color-flavor locking takes place in the vacuum. This fact leads to an emergence of non-Abelian strings, see [11] for a review.

Let us briefly summarize a perturbative spectrum of our bulk theory in the large μ limit, cf. [11]. Consider for simplicity the case of equal quark masses. The $U(N)$ gauge group is completely Higgsed and the masses of the gauge bosons are

$$m_G^{SU(N)} = g_2 |\sqrt{\xi}| \quad (2.2.22)$$

for the $SU(N)$ gauge bosons and

$$m_G^{U(1)} = g_1 \sqrt{\frac{N}{2}} |\sqrt{\xi}| \quad (2.2.23)$$

for the $U(1)$ one. Below we also assume that the gauge boson masses are of the same order,

$$m_G^{U(1)} \sim m_G^{SU(N)} \equiv m_G \quad (2.2.24)$$

Extracting a quark mass matrix from potentials (2.2.11), (2.2.12) we find that out of $4N^2$ real degrees of freedom of the q^{kA} and \bar{q}^{kA} squarks N^2 phases are eaten by the Higgs mechanism, $(N^2 - 1)$ real squarks have mass (2.2.22), while one real squark has mass (2.2.23). These squarks are scalar superpartners of the $SU(N)$ and $U(1)$ gauge bosons in massive vector $\mathcal{N} = 1$ supermultiplets, respectively.

Other $2N^2$ squarks become much lighter in the large μ limit. The masses of $2(N^2 - 1)$ of them forming the adjoint representation of the global color-flavor $SU_{C+F}(N)$ (2.2.21) are given by

$$m_L^{SU(N)} = \left| \frac{\xi}{\mu_2} \right|, \quad (2.2.25)$$

while two real $SU_{C+F}(N)$ color-flavor singlets have mass

$$m_L^{U(1)} = \sqrt{\frac{N}{2}} \left| \frac{\xi}{\mu_1} \right|, \quad (2.2.26)$$

If μ_2 and μ_1 are of the same order (more exactly, we assume below that $\alpha = \text{const}$, see (2.2.7)), then

$$m_L^{U(1)} \sim m_L^{SU(N)} \equiv m_L \sim m \ll m_G. \quad (2.2.27)$$

Below we will heavily use this mass hierarchy of the perturbative spectrum.

In particular, in the limit (2.2.19) $m_L \rightarrow 0$, and $2N^2$ squarks become massless. This reflects the presence of the Higgs branch which develops in this limit. The presence of massless scalars developing VEVs makes the string solution ill-defined

[46, 47], see also next section. Below we use the μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ QCD at large μ as an infra-red (IR) regularization of $\mathcal{N} = 1$ QCD. At large but finite μ the Higgs branch present in $\mathcal{N} = 1$ QCD is lifted and the IR divergences are regularized, cf. [48].

2.3 Non-Abelian strings

In this section we derive a vortex solution, assuming the equal quark mass limit (2.2.17). First we review a general *ansatz* for the non-Abelian string and present equations for string profile functions. Then we solve these equations assuming the mass hierarchy (2.2.27) in the large μ limit.

2.3.1 Equations of motion

We consider a static string stretched along the x_3 axis so that the corresponding profile functions depend only on coordinates in the (x_1, x_2) plane. Closely following the strategy developed for $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD (see review [11]) we first assume that only those squark fields which develop VEVs have non-trivial profile functions in a string solution. Therefore we set

$$q^{kA} = \bar{q}^{kA} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi^{kA}. \quad (2.3.1)$$

and look for the string solutions using the following *ansatz* [6, 7, 11]:

$$\begin{aligned} \varphi &= \phi_2 + n\bar{n}(\phi_1 - \phi_2) \\ &= \frac{1}{N}(\phi_1 + (N-1)\phi_2) + (\phi_1 - \phi_2) \left(n\bar{n} - 1/N \right), \\ A_i^{\text{SU}(N)} &= \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f_W(r) \left(n\bar{n} - 1/N \right), \\ A_i^{\text{U}(1)} &= \frac{2}{N} \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f(r), \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

where the index i runs over 1, 2. The profile functions $\phi_1(r)$ and $\phi_2(r)$ determine the profiles of the squarks in the plane orthogonal to the string at rest, while $f(r)$ and $f_W(r)$ are the profiles of the gauge fields. The profile functions depend on the distance r from a given point x^i to the center of the string x_0^i in the (x_1, x_2) plane.

Here we have also introduced the orientational complex vector n^l , $l = 1, \dots, N$, subject to the condition

$$\bar{n}_l \cdot n^l = 1. \quad (2.3.3)$$

Vector n^l parametrizes the orientational modes of the non-Abelian vortex string. It arises due to a possibility to rotate a given particular string solution with respect to the unbroken color-flavor global group $SU(N)_{C+F}$, see (2.2.21).

Boundary conditions for the gauge and scalar profile functions are

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= 0, & \phi_2(0) &\neq 0, & \phi_1(\infty) &= \sqrt{\xi}, & \phi_2(\infty) &= \sqrt{\xi}, \\ f_W(0) &= 1, & f(0) &= 1, & f_W(\infty) &= 0, & f(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Substituting *ansatz* (2.3.2) into action (2.2.8) we get an energy functional (tension of the string):

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \int r dr \left(\frac{2}{g_1^2 N^2} \frac{f'^2}{r^2} + \frac{N-1}{N} \frac{1}{g_2^2} \frac{f_W'^2}{r^2} + \phi_1'^2 + (N-1)\phi_2'^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{N^2} \frac{[f + (N-1)f_W]^2}{r^2} \phi_1^2 + \frac{N-1}{N^2} \frac{[f - f_W]^2}{r^2} \phi_2^2 + V(\phi_1, \phi_2), \right) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

where the potential $V(\phi_1, \phi_2)$ is

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{4|\mu_2|^2} \left(\phi_1^2 \left[\phi_1^2 + \frac{\alpha}{N} (\phi_1^2 + (N-1)\phi_2^2) - 2\mu_2 m \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + (N-1)\phi_2^2 \left[\phi_2^2 + \frac{\alpha}{N} (\phi_1^2 + (N-1)\phi_2^2) - 2\mu_2 m \right]^2 \right) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

and we assume that $\mu_2 m$ is real ².

String tension functional (2.3.5) gives equations for the profile functions. We get

$$\begin{aligned} f'' - \frac{f'}{r} - \frac{g_1^2}{2} (f + (N-1)f_W)\phi_1^2 - (N-1)\frac{g_1^2}{2} (f - f_W)\phi_2^2 &= 0 \\ f_W'' - \frac{f_W'}{r} - \frac{g_2^2}{N} (f + (N-1)f_W)\phi_1^2 + \frac{g_2^2}{N} (f - f_W)\phi_2^2 &= 0 \\ \phi_1'' + \frac{\phi_1'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f + (N-1)f_W)^2}{r^2} \phi_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= 0 \\ \phi_2'' + \frac{\phi_2'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f - f_W)^2}{r^2} \phi_2 - \frac{1}{2(N-1)} \frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

²If it is in fact a complex quantity, we should modify relation (2.3.1) inserting there the phase of $\mu_2 m$.

These equations are of the second order rather than the first order. This is because our string is not BPS saturated. Note, that for a BPS string the masses of the scalars forming the string are equal to masses of the gauge bosons (2.2.22) and (2.2.23), see [11]. For our μ -deformed theory this is not the case. Masses of singlet and adjoint scalars in the scalar matrix φ^{kA} in (2.3.1) are given by (2.2.25) and (2.2.26), and in the large μ limit they are much smaller than the masses of gauge bosons. In particular, as we mentioned already, in the limit (2.2.19) $m_L \rightarrow 0$, and our μ -deformed theory develops a Higgs branch.

2.3.2 String profile functions

It is quite often that supersymmetric gauge theories have Higgs branches. These are flat directions of the scalar potential on which charged scalar fields can develop VEVs breaking the gauge symmetry. In many instances this breaking provides topological reasons behind formation of vortex strings. A dynamical side of the problem of the vortex string formation in theories with Higgs branches was addressed in [46, 47, 48]. A priori it is not clear at all whether or not stable string solutions exist in this class of theories. The fact is that a theory with a Higgs branch represents a limiting case of type I superconductor with vanishing Higgs mass. In particular, it was shown in [46] that infinitely long strings cannot be formed in this case due to infrared divergences.

Later this problem was studied in [47, 48]. It was shown that vortices on Higgs branches become logarithmically "thick" due to the presence of massless scalars in the bulk. Still, they are well defined if IR divergences are regularized. One way of regularization is to consider a vortex string of the finite length L [47]. This setup is typical for the confinement problem. It was shown in [47] that confining potential between heavy trial charges becomes nonlinear,

$$V(L) \sim \frac{L}{\log L}, \quad (2.3.8)$$

in theories with Higgs branches.

Another way of IR regularization is to lift the Higgs branch so that scalar fields forming the string have small but non-zero masses m_L , cf. [48]. We use this approach here, see Eqs. (2.2.25) and (2.2.26), assuming that μ is large but finite.

To the leading order in $\log m_G/m_L$ the vortex solution has the following structure in the (x_1, x_2) plane [47]. The gauge fields are localized inside the core region of the radius R_g and almost zero outside this region³. In contrast, scalar profiles are almost constant inside the core. In particular, the ϕ_1 profile function associated with winding of the vortex is almost zero inside the core (see (2.3.4)),

$$\begin{aligned}\phi_1 &\approx 0 \\ \phi_2 &\approx (1-c)\sqrt{\xi},\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

where c is a constant to be determined.

Then the two first equations for gauge profile functions in (2.3.7) have solutions

$$f = f_W \approx 1 - \frac{r^2}{R_g^2}\tag{2.3.10}$$

inside the core.

Outside the core in a logarithmically wide region

$$1/m_G \lesssim r \lesssim 1/m_L\tag{2.3.11}$$

gauge fields are almost zero and two last equations in (2.3.7) reduce to the equations for free massless scalars. Their solutions have a logarithmic form

$$\begin{aligned}\phi_1 &\approx \sqrt{\xi} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{m_L R_g}} \\ \ln \frac{1}{m_L R_g} \end{pmatrix}, \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi} \begin{pmatrix} 1 - c \cdot \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{m_L R_g}} \\ \ln \frac{1}{m_L R_g} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.3.12}$$

where the normalization is fixed by matching with the behavior inside the core (2.3.9) and with the boundary conditions at infinity (2.3.4).

In the region of very large r , $r \gg 1/m_L$, the scalar fields exponentially approach their VEVs ($\sim \exp\{-m_L r\}$), see (2.3.4)). This region gives a negligible contribution to the string tension and a particular form of the scalar potential (2.3.6) is not important.

³We will determine R_g shortly.

Upon a substitution of the above solution into tension functional (2.3.5) one arrives at

$$T \approx \frac{\text{const}}{R_g^2} \left(\frac{2}{g_1^2 N^2} + \frac{N-1}{g_2^2 N} \right) + \frac{2\pi|\xi|}{\ln \frac{1}{R_g m_L}} [1 + (N-1)c^2], \quad (2.3.13)$$

where the first term comes from the gauge fields inside the core while the second term is produced by the logarithmic integral over the region (2.3.11) coming from the kinetic terms of scalars.

Minimization of this expression with respect to the constant c yields

$$c = 0, \quad (2.3.14)$$

so that the profile function ϕ_2 does not depend on r and is given by its VEV $\sqrt{\xi}$.

Minimizing (2.3.13) with respect to R_g we find

$$R_g \sim \frac{\text{const}}{m_G} \ln \frac{m_G}{m_L}. \quad (2.3.15)$$

The solutions for string profile functions in the intermediate region (2.3.11) becomes

$$\begin{aligned} \phi_1 &\approx \sqrt{\xi} \left(1 - \frac{\ln \frac{1}{r m_L}}{\ln \frac{m_G}{m_L}} \right), \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi}, \\ f &\approx f_W \approx 0, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

while the final result for the tension of a non-Abelian string takes the form

$$T = \frac{2\pi|\xi|}{\ln \frac{m_G}{m_L}} + \dots, \quad (2.3.17)$$

where corrections are suppressed by powers of large logarithm $\log m_G/m_L$. The leading term here comes from quark kinetic energy $((\phi'_1)^2)$ integrated over intermediate region (2.3.11), see (2.3.5). Note, that the logarithmic suppression of the string tension is not specific for non-Abelian strings. Similar expression was found for the ANO string on a Higgs branch [47, 48].

2.3.3 Non-equal quark masses

In this section we relax condition (2.2.17) and consider a string solution assuming that quark mass differences are small,

$$\Delta m_{AB} = m_A - m_B \ll \widehat{m}, \quad (2.3.18)$$

where \widehat{m} is the average quark mass, (2.2.15).

Non-equal quark masses break color-flavor symmetry (2.2.21) down to $U(1)^N$, so the orientational modes of the non-Abelian string are no longer zero modes. They become quasizero modes in the approximation of small quark mass differences (2.3.18), cf. [11]. In fact, in Sect. 2.4.2 we will derive a shallow world sheet potential with N extreme points associated with Z_N strings.

Now we generalize the *ansatz* for the string solution (2.3.2) as follows. First we set an orientational vector

$$n^l = \delta^{lA_0}, \quad A_0 = 1, \dots, N \quad (2.3.19)$$

separating the A_0 -th Z_N string (the string associated with the winding of A_0 squark flavor, see [11]).

We expect that, much in the same way as for the equal quark masses case, the main contribution to the string tension comes from logarithmically wide intermediate region (2.3.11), while the string core does not contribute to the leading order. Then taking into account (2.3.18) we can neglect mass differences of different gauge bosons setting

$$m_G \approx g_2 \sqrt{|\widehat{\xi}|}, \quad (2.3.20)$$

where

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N \xi_A. \quad (2.3.21)$$

In this approximation we can use the same *ansatz* for the gauge fields as for the case of equal quark masses, see two last equations in (2.3.2) with n^l from (2.3.19). Gauge fields are still parametrized by only two gauge profile functions $f(r)$ and f_W , which are non-zero inside the string core determined by m_G (2.3.20).

The *ansatz* for the squark fields in (2.3.2) is generalized as follows

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi_1(r) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi_2(r) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \phi_{A_0}(r) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \phi_N(r) \end{pmatrix}, \quad (2.3.22)$$

where we introduce the profile functions ϕ_1, \dots, ϕ_N for non-winding flavors $A \neq A_0$ while the profile function ϕ_{A_0} is associated with A_0 -th winding flavor.

Boundary conditions for gauge profile functions are the same as in (2.3.4) while for quarks we require

$$\phi_{A_0}(0) = 0 \quad (2.3.23)$$

$$\phi_A(\infty) = \sqrt{\xi_A}, \quad A = 1, \dots, N, \quad (2.3.24)$$

where ξ_A are given by (2.2.14).

Equations for the profile functions now read

$$\begin{aligned} f'' - \frac{f'}{r} - \frac{g_1^2}{2}(f + (N-1)f_W)\phi_{A_0}^2 - \frac{g_1^2}{2}(f - f_W) \sum_{A \neq A_0} \phi_A^2 &= 0 \\ f_W'' - \frac{f_W'}{r} - \frac{g_2^2}{N}(f + (N-1)f_W)\phi_{A_0}^2 \\ &+ \frac{g_2^2}{N(N-1)}(f - f_W) \sum_{A \neq A_0} \phi_A^2 = 0 \quad (2.3.25) \\ \phi_{A_0}'' + \frac{\phi_{A_0}'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f + (N-1)f_W)^2}{r^2} \phi_{A_0} - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi_{A_0}} &= 0 \\ \text{For } A \neq A_0, \quad \phi_A'' + \frac{\phi_A'}{r} - \frac{1}{N^2} \frac{(f - f_W)^2}{r^2} \phi_A - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \phi_A} &= 0. \end{aligned}$$

Solving these equations in much the same way as we did in the previous subsection we get

$$\phi_A \approx \sqrt{\xi_A}, \quad A \neq A_0. \quad (2.3.26)$$

Moreover, gauge profile functions are determined by (2.3.10) inside the core, while they are zero outside it. Here the size of the core is still given by (2.3.15).

In much the same way as for the case of equal quark masses the profile function ϕ_1 is almost zero inside the core and is given by

$$\phi_{A_0} \approx \sqrt{\xi_{A_0}} \left(1 - \frac{\ln \frac{1}{r m_L}}{\ln \frac{m_G}{m_L}} \right) \quad (2.3.27)$$

in the region (2.3.11) of intermediate r .

The results for the string tensions of Z_N strings have the form

$$T_{A_0} = \frac{2\pi |\xi_{A_0}|}{\ln \frac{m_G}{m_L}} + \dots, \quad A_0 = 1, \dots, N. \quad (2.3.28)$$

We see that now string tensions of N Z_N strings are split.

2.4 World sheet effective theory

A non-Abelian string has both translational and orientational zero modes. If we allow a slow dependence of the associated moduli on the world sheet coordinates $z = x_3$ and t they become fields in the effective two dimensional low energy theory on the string world sheet [6, 7], see [11] for a review. Namely, we will have translational moduli $x_0^i(t, z)$ (position of the string in the (x_1, x_2) plane, $i = 1, 2$) and orientational moduli $n^l(t, z)$, $l = 1, \dots, N$. Translational sector is free and decouples therefore we will focus on the orientational sector.

In this section we will derive the bosonic part of the effective world sheet theory on the string.

2.4.1 $\mathbb{CP}(N - 1)$ model on the string world sheet

First we consider the limit of equal quark masses (2.2.17). In this limit color-flavor symmetry (2.2.21) is unbroken and the orientational moduli n^l describe the zero modes of the non-Abelian string. Namely, consider a particular Z_N solution (2.3.2) with $n^l = \delta^{l A_0}$, $A_0 = 1, \dots, N$. It breaks the $SU(N)_{C+F}$ group down to $SU(N - 1) \times U(1)$. Therefore the $SU(N)_{C+F}$ rotation of the Z_N string solution generates the whole family of solutions (non-Abelian string) parametrized by the vector n^l from the moduli space

$$\frac{SU(N)_{C+F}}{SU(N - 1) \times U(1)} = \mathbb{CP}(N - 1). \quad (2.4.1)$$

Since for equal quark masses the $SU(N)_{C+F}$ group is unbroken there is no world sheet potential for orientational moduli n^l . To derive the kinetic term we closely follow the general procedure developed in [6, 7] (see [11] for a review) for the $\mathcal{N} = 2$ case. We substitute solution (2.3.2) into four-dimensional action (2.2.8) assuming slow t and z dependence of the orientational moduli n^l .

Once the moduli n^l cease to be constant, the gauge field components $A_0^{\text{SU}(N)}$ and $A_3^{\text{SU}(N)}$ also become non-vanishing. We use the *ansatz* [6, 7, 49]

$$A_k^{\text{SU}(N)} = -i \left[\partial_k n \cdot \bar{n} - n \cdot \partial_k \bar{n} - 2n \cdot \bar{n} (\bar{n} \partial_k n) \right] \rho(r), \quad k = 0, 3, \quad (2.4.2)$$

for these components, where we assume a contraction of the color indices inside the parentheses in the third term. We also introduced a new profile function $\rho(r)$ which will be determined through a minimization procedure.

Substituting (2.3.2) and (2.4.2) into (2.2.8) we get $\mathbb{CP}(N-1)$ model

$$S^{(1+1)} = 2\beta \int dt dz \left\{ (\partial_k \bar{n} \partial_k n) + (\bar{n} \partial_k n)^2 \right\}, \quad (2.4.3)$$

with the coupling constant β given by

$$\beta = \frac{2\pi}{g_2^2} I, \quad (2.4.4)$$

where I is a normalization integral determined by the string profile functions integrated over (x_1, x_2) plane.

$$I = \int_0^\infty r dr \left\{ \left(\frac{d}{dr} \rho(r) \right)^2 + \frac{1}{r^2} f_W^2 (1 - \rho)^2 + g_2^2 \left[\frac{\rho^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) + (1 - \rho) (\phi_2 - \phi_1)^2 \right] \right\}. \quad (2.4.5)$$

The above functional determines an equation of motion for ρ ,

$$-\frac{d^2}{dr^2} \rho - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \rho - \frac{1}{r^2} f_W^2 (1 - \rho) + \frac{g_2^2}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) \rho - \frac{g_2^2}{2} (\phi_1 - \phi_2)^2 = 0, \quad (2.4.6)$$

while boundary conditions for ρ read

$$\rho(\infty) = 0, \quad \rho(0) = 1, \quad (2.4.7)$$

see [11] for the details.

The formulas above are valid for a non-Abelian string in both $\mathcal{N} = 2$ QCD and μ -deformed QCD. For our large μ limit we use the string profile functions found in Sec. 2.3.2. To find the solution for ρ we first note that inside the core $\rho \approx 1$. In the intermediate region (2.3.11) $f_W \approx 0$. The terms of equation (2.4.6) which involve derivatives of ρ are negligible compared to the others (we will check that afterwards), and so an approximate solution can be easily found:

$$\rho \approx \frac{(\phi_1 - \phi_2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} \approx \frac{\left(\frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{Rg m_L}}\right)^2}{2 - 2 \frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{Rg m_L}} + \left(\frac{\ln \frac{1}{rm_L}}{\ln \frac{1}{Rg m_L}}\right)^2}, \quad (2.4.8)$$

where we used solutions (2.3.16) for quark profile functions.

It is easy to check that $\rho' \sim m_L \rho$ and $\rho'' \sim m_L^2 \rho$, so it was indeed consistent to drop the derivatives out of the equation (2.4.6).

Our next step is to substitute this solution into the (2.4.5) and calculate I . As we will see, only the region $r \lesssim 1/m_L$ gives a significant contribution to this integral. We have:

$$\begin{aligned} I &\approx g_2^2 \int r dr \left(\frac{1}{2} \frac{(\phi_1 - \phi_2)^4}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} + \frac{2\phi_1\phi_2(\phi_1 - \phi_2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} \right) \\ &= \frac{g_2^2}{2} \int r dr \frac{(\phi_1^2 - \phi_2^2)^2}{(\phi_1^2 + \phi_2^2)} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Calculation yields

$$I \approx c \frac{m_G^2}{m_L^2} \frac{1}{\ln^2 \frac{m_G^2}{m_L^2}} \sim \frac{g^2 |\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2 |\mu|}{|m|}}, \quad (2.4.10)$$

where we used Eqs. (2.2.22) and (2.2.25) while the constant c is associated with the ambiguity of the upper limit ($\sim 1/m_L$) of the integral above. As for the region of large r , $r \gg 1/m_L$, the function ρ falls off exponentially, and a contribution from this region is therefore negligible.

Substituting (2.4.10) into (2.4.4) we get the final result for the coupling β of the world sheet $\mathbb{CP}(N-1)$ model (2.4.3)

$$\beta \approx c \frac{2\pi}{g_2^2} \frac{m_G^2}{m_L^2} \frac{1}{\ln^2 \frac{m_G^2}{m_L^2}} \sim \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2 |\mu|}{|m|}}. \quad (2.4.11)$$

$\mathbb{CP}(N - 1)$ model (2.4.3) is a low energy effective theory on the string world sheet. It describes the dynamics of massless orientational moduli at energies much below the inverse thickness of the string proportional to m_L . If we go to higher energies we have to take into account higher derivative corrections to (2.4.3).

Relation (2.4.11) is derived at the classical level. In quantum theory the coupling constant β runs. Relation (2.4.11) defines the $\mathbb{CP}(N - 1)$ model coupling at a scale of the ultra-violet (UV) cutoff of the world sheet theory equal to m_G . In fact, $\mathbb{CP}(N - 1)$ model is an asymptotically free theory. Its coupling at the UV scale $m_G \sim \sqrt{\xi}$ at one loop is given by

$$4\pi\beta(\sqrt{\xi}) = N \ln \frac{\sqrt{\xi}}{\Lambda_{CP}}, \quad (2.4.12)$$

where Λ_{CP} is the scale of the $\mathbb{CP}(N - 1)$ model. This gives for the scale Λ_{CP}

$$\Lambda_{CP} \approx \sqrt{\xi} \exp \left\{ -\text{const} \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2|\mu|}{|m|}} \right\}. \quad (2.4.13)$$

We see that the scale of $\mathbb{CP}(N - 1)$ model Λ_{CP} is exponentially small, so the world sheet theory is weakly coupled in a wide region of energies $\gg \Lambda_{CP}$. This should be contrasted to non-Abelian string in $\mathcal{N} = 2$ QCD where world sheet theory has a scale Λ_{CP} equal to scale $\Lambda_{\mathcal{N}=2}$ of the bulk QCD [11].

2.4.2 World-sheet potential at large μ

In this subsection we relax the condition of equal quark masses (2.2.17) and consider the effect of quark mass differences to the leading order in Δm_{AB} , see (2.3.18). Non-equal quark masses break color-flavor symmetry (2.2.21) down to $U(1)^N$ so as we already mentioned above the orientational modes of the non-Abelian string are no longer zero modes. They become quazero modes in the approximation of small quark mass differences (2.3.18). We still can introduce the orientational quasimoduli n^l , $l = 1, \dots, N$ and consider a shallow potential in the $\mathbb{CP}(N - 1)$ world sheet theory (2.4.3) generated by the mass differences. We neglect effects of small mass differences in the kinetic term assuming that it is still given by Eq. (2.4.3).

Our general strategy is to take string solution (2.3.2) with the unperturbed string profile functions of Sec. 2.3.2 and substitute it into potential (2.2.12) taking into

account explicit m_A dependence of this potential to the leading order in Δm_{AB} . After a rather involved calculation we arrive at the potential of the world sheet theory

$$\delta V_{1+1} = \chi \sum_{A=1}^N \frac{\text{Re} \left[(\xi_A - \hat{\xi}) \hat{\xi} \right]}{|\hat{\xi}|} |n^A|^2, \quad (2.4.14)$$

where δV_{1+1} is the potential up to a constant, ξ_P are given by (2.2.14), while the factor χ is determined by the string profile functions integrated over (x_1, x_2) plane,

$$\chi = \frac{\pi}{|\mu_2|^2} \int_0^\infty r dr (\phi_2^2 - \phi_1^2) \left[\phi_1^2 - \frac{\alpha}{N} (\phi_1^2 - \phi_2^2) \right]. \quad (2.4.15)$$

Now we use our solutions for ϕ_1 and ϕ_2 (see Sect. 2.3.2) and integrate here over the region $r \lesssim 1/m_L$. We also assume that μ_1 and μ_2 scale in such a way that the parameter α in (2.2.7) is fixed. More explicitly, we assume that

$$\mu \equiv \mu_2 = \text{const} \cdot \mu_1 \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad (2.4.16)$$

This gives for χ

$$\chi \approx \text{const} \cdot \frac{2\pi}{\ln \frac{m_G}{m_L}}. \quad (2.4.17)$$

Moreover, the region of integration $r \gg 1/m_L$ in (2.4.15) does not contribute to the leading order. The unknown constant above appears due to an ambiguity of the upper limit of the integral over r , $r \sim 1/m_L$.

Substituting this into (2.4.14) we get

$$\delta V_{1+1} \approx \text{const} \cdot 2\pi \sum_{A=1}^N \frac{\text{Re} \left[(\xi_A - \hat{\xi}) \hat{\xi} \right]}{|\hat{\xi}| \ln \frac{m_G}{m_L}} |n^A|^2. \quad (2.4.18)$$

Now let us fix the unknown constant in the equation above comparing it with expressions (2.3.28) for the string tensions of Z_N strings. Z_N strings are extreme points of the world sheet potential V_{1+1} , therefore a value of V_{1+1} at the extreme point $n^l = \delta^{lA_0}$ corresponding to A_0 -th Z_N string should be equal to string tension (2.3.28). This gives $\text{const} = 1$ in (2.4.18) and leads us to the final expression for the

potential in the world sheet $\mathbb{CP}(N - 1)$ theory⁴

$$V_{1+1} \approx \frac{4\pi}{\ln \frac{m_G}{m_L}} \left| \sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 \left(\sum_{A=1}^N m_A |n^A|^2 - \hat{m} \right) \right|. \quad (2.4.19)$$

This potential integrated over world sheet coordinates t and z should be added to the kinetic term in (2.4.3). Note, that this potential is a generalization of our result in (2.4.18) since it includes all terms in the expansion in powers of $(m_A - \hat{m})/\hat{m}$. For the single trace μ -deformation (2.2.3) the world sheet potential takes a particularly simple form

$$V_{1+1} \approx \frac{4\pi}{\ln \frac{m_G}{m_L}} |\mu_2| \left| \sum_{A=1}^N m_A |n^A|^2 \right|. \quad (2.4.20)$$

The potential (2.4.19) has only one minimum and one maximum at generic Δm_{AB} . Other $(N - 2)$ extreme points are saddle points. All these extreme points are located at

$$n^A = \delta^{AA_0}, \quad A_0 = 1, \dots, N, \quad (2.4.21)$$

and associated with the Z_N strings. A value of the potential at a given extreme point coincides with the tension of the A_0 -th Z_N string,

$$V_{1+1}(n^A = \delta^{AA_0}) = T_{A_0}, \quad A_0 = 1, \dots, N. \quad (2.4.22)$$

Absolute minimum (the unique vacuum) of (2.4.19) corresponds to the Z_N string associated with winding of a squark with the smallest mass.

Note that our derivation of Eq. (2.4.18) reproduced the logarithmic suppression typical for string tensions in extreme type I superconductors (with small Higgs mass m_L), see (2.3.28) and [47].

Potential (2.4.19) is similar to the potential in the world sheet theory on the non-Abelian string derived in [50] for μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ QCD in the limit of small μ . In this case the world sheet theory is heterotic $\mathbb{CP}(N - 1)$ model with $\mathcal{N} = (0, 2)$ supersymmetry. For small μ the world sheet potential obtained in [50] can be written in the form

$$V_{1+1}^{\mu \rightarrow 0} = 4\pi \left| \sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 \left(\sum_{A=1}^N m_A |n^A|^2 - \hat{m} \right) \right|. \quad (2.4.23)$$

⁴Although (2.4.19) seems to be logical, it cannot be correct for arbitrary mass differences Δm_{AB} . This can be seen from e.g. considering the $U(N = 2)$ model with masses $m_1 = -m_2$. The resolution of this issue is still unknown, but note that at large Δm_{AB} it makes less sense to even introduce the moduli n^A .

It differs from the one in (2.4.19) by the absence of the logarithmic suppression. This has a natural explanation. At small μ in much the same way as in our case the saddle points of the world sheet potential correspond to the Z_N strings and relation (2.4.22) is still valid. On the other hand in the limit of small μ the Z_N strings are BPS saturated and their tensions are given by $T_{A_0}^{\mu \rightarrow 0} = 2\pi|\xi_{A_0}|$, see [50]. This explains the absence of the logarithmic suppression in the potential (2.4.23).

2.4.3 Mass spectrum on the string

Let us assume that m_1 is the smallest quark mass. Then the vacuum of the world sheet potential (2.4.19) is located at

$$n^A = \delta^{A1} \quad (2.4.24)$$

and the minimum value $V_{1+1}^{\min} = T_{A=1}$. Let us calculate a perturbative mass spectrum of the world sheet theory in this vacuum. Expanding

$$|n^1|^2 = 1 - \sum_{A \neq 1} |n^A|^2 \quad (2.4.25)$$

and extracting the quadratic in fluctuations n^A terms from potential (2.4.19), we get masses of world sheet excitations n^A , $A \neq 1$

$$m_{A \neq 1}^2 = \frac{\pi}{\beta \ln \frac{m_G}{m_L}} \frac{\text{Re} [(\xi_A - \xi_1)\bar{\xi}_1]}{|\xi_1|}. \quad (2.4.26)$$

Note the factor $1/(2\beta)$ here that comes from the kinetic term in (2.4.3). Substituting here the coupling β from (2.4.11) we see that the masses of the perturbative world sheet excitations behave as

$$m_{A \neq 1}^2 \sim m(m_A - m_1) \ln \frac{m_G}{m_L}. \quad (2.4.27)$$

The coupling constant of $\mathbb{CP}(N-1)$ model grows at low energies and gets frozen at the scale of the masses calculated above. If these masses are much larger than Λ_{CP} (2.4.13) then the world sheet theory is at weak coupling. Since Λ_{CP} is exponentially small we see that world sheet theory is at weak coupling even at rather small mass differences Δm_{AB} . However in the equal quark mass limit (2.2.17) when $\Delta m_{AB} = 0$ the world sheet $\mathbb{CP}(N-1)$ model becomes strongly coupled.

Our result (2.4.19) for the world sheet potential on the non-Abelian string in μ -deformed theory can be compared with the world sheet potential for the non-Abelian string in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with FI D -term generated by quark mass differences, see [11] for a review. In the $\mathcal{N} = 2$ case all the Z_N strings are degenerate, with tensions given by the FI parameter. The world sheet potential in this case has N minima located at (2.4.21) separated by shallow barriers quadratic in Δm_{AB} . The world sheet theory has $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetry and the presence of N vacua is ensured by the Witten index for $\mathbb{CP}(N - 1)$ supersymmetric model. There are kinks interpolating between these vacua which are interpreted as confined monopoles of bulk QCD [7, 8], see Sec. 2.6 and [11] for a review.

In the limit of large μ potential (2.4.19) dominates over the quadratic in Δm_{AB} potential, and one can neglect the latter one. We see that most of the vacua present in the $\mathcal{N} = 2$ case are lifted and the world sheet theory has a single vacuum at non-zero Δm_{AB} . Moreover, the lifted vacua are saddle points rather than local minima and therefore classically they are unstable. This means that there are no kinks in the world sheet theory.

Thus we come to the conclusion that confined monopoles present in $\mathcal{N} = 2$ QCD with FI term do not survive large μ limit when μ -deformed theory flows to $\mathcal{N} = 1$ QCD, provided that Δm_{AB} are non-zero. Only when $\Delta m_{AB} = 0$, the potential (2.4.19) vanishes (and the world sheet theory enters into the strong coupling), and we can consider kinks/confined monopoles. We will discuss this case below in Sec. 2.6.

2.5 Fermion zero modes

In this section we consider the fermion zero modes of the non-Abelian string. First we briefly review the limit of small μ , see [11] for a more detailed review. In this limit deformation superpotential (2.2.2) reduces to the FI F -term and does not break $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry [51, 52]. In the $\mathcal{N} = 2$ limit both superorientational and supertranslational fermion zero modes of the non-Abelian string can be obtained by a supersymmetry transformation of the bosonic string solution [7, 18, 25]. Next we gradually increase μ and study perturbations of superorientational zero modes at small μ . We show that all the superorientational fermion zero modes are lifted by the μ -deformation. As a result fermionic moduli which become fermion fields

in the two dimensional low energy $\mathbb{CP}(N - 1)$ model on the string acquire masses. Eventually they disappear from the world sheet theory in the large μ limit. Finally we comment on supertranslational fermion zero modes which in much the same way as in $\mathcal{N} = 2$ theory can be obtained by supersymmetry transformations from the bosonic string solution.

2.5.1 Superorientational modes in $\mathcal{N} = 2$ limit

The fermionic part of the $\mathcal{N} = 2$ QCD defined by superpotentials (2.2.1) and (2.2.2) (before integrating out adjoint fields) is as follows:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{4d} = & \frac{2i}{g_2^2} \text{Tr} \overline{\lambda_f^{\text{SU}(N)}} \not{D} \lambda_f^{\text{SU}(N)} + \frac{i}{g_1^2} \overline{\lambda_f^{\text{U}(1)}} \not{D} \lambda_f^{\text{U}(1)} + \text{Tr} i \overline{\psi} \not{\nabla} \psi + \text{Tr} i \tilde{\psi} \not{\nabla} \tilde{\psi} \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{q_f} \lambda_f^{\text{U}(1)} \psi + \tilde{\psi} \lambda_f^{\text{U}(1)} q^f + \overline{\psi} \lambda_f^{\text{U}(1)} q^f + q^f \lambda_f^{\text{U}(1)} \tilde{\psi} \right) \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{q_f} \lambda_f^{\text{SU}(N)} \psi + \tilde{\psi} \lambda_f^{\text{SU}(N)} q^f + \overline{\psi} \lambda_f^{\text{SU}(N)} q^f + q^f \lambda_f^{\text{SU}(N)} \tilde{\psi} \right) \quad (2.5.1) \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \tilde{\psi} \left(\frac{1}{2} a^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^{\text{SU}(N)} \right) \psi \\
& + i\sqrt{2} \text{Tr} \overline{\psi} \left(\frac{1}{2} \overline{a}^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{\text{SU}(N)} \right) \tilde{\psi} \\
& - 2\sqrt{\frac{N}{2}} \mu_1 \left[\left(\lambda^{2\text{U}(1)} \right)^2 + \left(\overline{\lambda}_2^{\text{U}(1)} \right)^2 \right] - \mu_2 \text{Tr} \left[\left(\lambda^{2\text{SU}(N)} \right)^2 + \left(\overline{\lambda}_2^{\text{SU}(N)} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

where derivatives acting on fermion fields are defined by the σ -matrices, for example $\not{\nabla} = \nabla_\mu \overline{\sigma}_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$, and a color-flavor matrix notation is used for the quark fermions ψ_α^{kA} , $\tilde{\psi}_{Ak}^\alpha$. Index f is $\text{SU}(2)_R$ index of the $\mathcal{N} = 2$ theory, $q^f = (q, \tilde{q})$, $\lambda_\alpha^f = (\lambda_\alpha^1, \lambda_\alpha^2)$. Note the μ -deformation mass terms for the $f = 2$ gauginos in (2.5.1). In the $\mathcal{N} = 2$ limit these terms vanish.

A string solution in the $\mathcal{N} = 2$ limit at small μ is 1/2 BPS, which means that half of the supercharges of the $\mathcal{N} = 2$ theory act trivially on solution (2.3.2), provided the orientational vector n^l is a constant vector. Namely, the four supercharges (out of eight supercharges $Q^{\alpha f}$) that satisfy the constraints

$$Q^{21} = Q^{22}, \quad Q^{11} = -Q^{12}. \quad (2.5.2)$$

act trivially on the BPS string in the $\mathcal{N} = 2$ theory with the FI F -term [7, 11, 52].

The other four supercharges generate four supertranslational modes which are superpartners of the two translational modes.

However once the orientational vector n^l acquires a slow t and z dependence, the supercharges selected by (2.5.2) become supersymmetry generators acting in the $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model on the string world sheet [7]. This allows one to obtain the orientational fermionic zero modes from a bosonic solution using supersymmetry transformations selected by (2.5.2) [7, 11]. The result is

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_2 &= \frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{\phi_2} \cdot n \bar{\xi}_L, \\
 \tilde{\psi}_1 &= - \frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{\phi_2} \cdot \xi_R \bar{n}, \\
 \lambda^{11 \text{ SU}(N)} &= i \frac{\phi_1}{\phi_2} f_W \frac{x^1 - i x^2}{r^2} \cdot n \bar{\xi}_L \\
 \lambda^{22 \text{ SU}(N)} &= - i \frac{\phi_1}{\phi_2} f_W \frac{x^1 + i x^2}{r^2} \cdot \xi_R \bar{n} \\
 \lambda^{12 \text{ SU}(N)} &= \lambda^{11 \text{ SU}(N)}, \quad \lambda^{21 \text{ SU}(N)} = - \lambda^{22 \text{ SU}(N)},
 \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

where we suppress color and flavor indices while superscripts of adjoint fermions mean $\lambda^{\alpha f}$.

Note that the bosonic profile functions of the string $\phi_{1,2}(r)$, $f(r)$ and f_W in this section are the profile functions of the BPS string in the $\mathcal{N} = 2$ limit of small μ rather than the string profile functions of Sec. 2.3.2, which corresponds to the large μ limit. Former are solutions of first order equations rather than second order equations (2.3.7). They satisfy boundary conditions (2.3.4) and were found numerically in [6], see [11] for a review.

The Grassmann variables $\xi_{R,L}^l$, $l = 1, \dots, N$ in (2.5.3) are proportional to the parameters of the supersymmetry transformations $\epsilon^{\alpha f}$ selected by (2.5.2), namely

$$\xi_L^l \sim \epsilon^{21} + \epsilon^{22}, \quad \xi_R^l \sim \epsilon^{12} - \epsilon^{11}. \tag{2.5.4}$$

These parameters become fermion fields (superpartners of n^l) in the effective world sheet $\mathbb{CP}(N - 1)$ model once we allow their slow dependence on the world sheet

coordinates t and z [7, 11]. They are subject to the conditions

$$\bar{n}_l \xi_{L,R}^l = 0, \quad (2.5.5)$$

which are a supersymmetric generalization of the $\mathbb{CP}(N-1)$ condition $|n|^2 = 1$.

2.5.2 Small μ expansion for fermion orientational zero modes

As we switch on the mass terms for the $f = 2$ gauginos (see the last line in (2.5.1)), the theory becomes $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric and half of the supercharges $Q^{\alpha f=2}$ are lost. There are no SUSY transformations which act trivially on the string with constant n^l (they were used to generate superorientational modes in $\mathcal{N} = 2$ limit), and the string is no longer BPS. Therefore, to calculate zero modes one has to solve the Dirac equations.

Note that for the case of the massless μ -deformed theory with FI D -term considered in [25] the supercharges that act trivially on the string with constant n^l in the $\mathcal{N} = 2$ limit are Q^{12} and Q^{21} instead of the linear combinations selected by (2.5.2). Therefore as we switch on the μ -deformation only one (two real) of the above supercharges is lost, namely Q^{12} . The other one (two real), Q^{21} , still acts trivially and ensures that the string is still BPS-saturated. In our case all four supercharges of $\mathcal{N} = 1$ theory $Q^{\alpha 1}$ act non-trivially on the string. This is the reason why the string ceases to be a BPS one as we switch on μ .

Dirac equations which follow from action (2.5.1) read

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{g_1^2} \left(\overleftarrow{\mathcal{D}} \lambda^{fU(1)} \right) + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{\psi} q^f + \overline{q}^f \widetilde{\psi} \right) - 4 \delta_2^f \sqrt{\frac{N}{2}} \mu_1 \overline{\lambda}_2^{U(1)} = 0, \\
& \frac{i}{g_2^2} \left(\overleftarrow{\mathcal{D}} \lambda^{fSU(N)} \right)^a + i\sqrt{2} \text{Tr} \left(\overline{\psi} T^a q^f + \overline{q}^f T^a \widetilde{\psi} \right) - \delta_2^f \mu_2 \overline{\lambda}_2^{aSU(N)} = 0, \\
& -i \overline{\psi} \overleftarrow{\nabla} + i\sqrt{2} \left[\overline{q}^f \left\{ \lambda^{fU(1)} + \lambda^{fSU(N)} \right\} + \widetilde{\psi} \left\{ \frac{1}{2} \overline{a}^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{SU(N)} \right\} \right] = 0, \\
& i \nabla \widetilde{\psi} + i\sqrt{2} \left[\left\{ \lambda_f^{U(1)} + \lambda_f^{SU(N)} \right\} q^f + \left\{ \frac{1}{2} \overline{a}^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \overline{a}^{SU(N)} \right\} \psi \right] = 0, \\
& \hspace{20em} (2.5.6) \\
& i \overline{\nabla} \psi + i\sqrt{2} \left[\left\{ \overline{\lambda}_f^{U(1)} + \overline{\lambda}_f^{SU(N)} \right\} q^f + \left\{ \frac{1}{2} a^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^{SU(N)} \right\} \widetilde{\psi} \right] = 0, \\
& -i \widetilde{\psi} \overleftarrow{\nabla} + i\sqrt{2} \left[\overline{q}^f \left\{ \overline{\lambda}_f^{U(1)} + \overline{\lambda}_f^{SU(N)} \right\} + \overline{\psi} \left\{ \frac{1}{2} a^{U(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^{SU(N)} \right\} \right] = 0.
\end{aligned}$$

To simplify the problem we will use below the following strategy. We consider the region of small μ and look for solutions of the Dirac equations above perturbatively in μ . Of course, zero modes (2.5.3) satisfy Dirac equations (2.5.6) [18, 25] at $\mu = 0$. We take these modes as a zero order solutions and solve for perturbations proportional to μ .

Similar method was used in [18, 25] for a massless μ -deformed theory with a FI D -term. In that case it was shown that the orientational fermion zero modes survive the μ -deformation, however, their profile functions become deformed. Below we will show that in our case of μ -deformed theory with massive quarks without the FI D -term the answer is different: orientational fermion zero modes do not survive the μ -deformation.

In analogy with the method of [25] we will use an *ansatz* for the superorientational modes:

$$\begin{aligned}
\lambda^{1f SU(N)} &= 2 \frac{x^1 - ix^2}{r} \lambda_+^{1f}(r) n \overline{\xi}_L + 2 \lambda_-^{1f}(r) \xi_L \overline{n}, \\
\lambda^{2f SU(N)} &= 2 \frac{x^1 + ix^2}{r} \lambda_+^{2f}(r) \xi_R \overline{n} + 2 \lambda_-^{2f}(r) n \overline{\xi}_R,
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}_1 &= 2\widetilde{\psi}_{1+}(r)\xi_R\bar{n} + 2\frac{x^1 - ix^2}{r}\widetilde{\psi}_{1-}(r)n\bar{\xi}_R. \\
\widetilde{\psi}_2 &= 2\widetilde{\psi}_{2+}(r)n\bar{\xi}_L + 2\frac{x^1 + ix^2}{r}\widetilde{\psi}_{2-}(r)\xi_L\bar{n}. \\
\bar{\psi}_1 &= 2\bar{\psi}_{1+}(r)\xi_R\bar{n} + 2\frac{x^1 - ix^2}{r}\bar{\psi}_{1-}(r)n\bar{\xi}_R. \\
\bar{\psi}_2 &= 2\bar{\psi}_{2+}(r)n\bar{\xi}_L + 2\frac{x^1 + ix^2}{r}\bar{\psi}_{2-}(r)\xi_L\bar{n}.
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Here $\lambda_+(r)$ and $\psi_+(r)$ represent "undeformed" profile functions present in the $\mathcal{N} = 2$ case, while $\lambda_-(r)$ and $\psi_-(r)$ are the "perturbations" due to μ -deformation. Of course this terminology makes sense only in the small μ limit, then "-" -components will be of order μ . More generally, the "+" profile functions are expanded in even powers of μ , while "-" components are expanded in odd powers of μ .

Let us consider the equations for the perturbative "-" -components (solutions for the "+" -components are given by (2.5.3) up to the $O(\mu^2)$ terms). Half of them are very similar to those solved in [25]. If we denote

$$\lambda_-^{22} - \lambda_-^{21} \equiv \lambda_- ,$$

then two of these equations for λ_- and $\widetilde{\psi}_{1-}$ take the form

$$\begin{aligned}
\partial_r \widetilde{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{r} \widetilde{\psi}_{1-}(r) - \frac{1}{Nr} (f + f_W(N-1)) \widetilde{\psi}_{1-}(r) + i\phi_2 \lambda_- &= 0 \\
-\partial_r \lambda_- - \frac{f_W}{r} \lambda_- + i g_2^2 \phi_2 \widetilde{\psi}_{1-}(r) - \mu_2 g_2^2 \frac{i}{2} \frac{f_W}{r} \frac{\phi_1}{\phi_2} &= 0
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

These equations can be solved in much the same way as in [25]. The solutions are

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}_{1-} &= -\mu_2 g_2^2 \frac{r}{8\phi_1} (\phi_1^2 - \phi_2^2) + O(\mu^3), \\
\lambda_- &= \lambda_-^{22} - \lambda_-^{21} = -\mu_2 g_2^2 \frac{i}{4} \left[(f_W - 1) \frac{\phi_2}{\phi_1} + \frac{\phi_1}{\phi_2} \right] + O(\mu^3).
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

Another pair of the profile functions $\bar{\psi}_{2-}$ and $(\lambda_-^{12} + \lambda_-^{11})$ satisfies the same equations (2.5.9). Hence the solution reads

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_{2-} &= \widetilde{\psi}_{1-}, \\
\lambda_-^{12} + \lambda_-^{11} &= \lambda_-.
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Let us study behavior of these solutions in the limits $r \rightarrow \infty$ and $r \rightarrow 0$. The bosonic profile functions fall off exponentially at infinity

$$f_W(r) \sim \exp\{-m_G r\}, \quad \phi_{1,2} - \sqrt{\xi} \sim \exp\{-m_G r\}, \quad (2.5.12)$$

while their behavior at $r \rightarrow 0$ is as follows:

$$f_W(r) - 1 \sim r^2, \quad \phi_1 \sim r, \quad \phi_2 \sim \text{const}, \quad (2.5.13)$$

see (2.3.4).

From this behavior we see that fermion zero modes (2.5.10), (2.5.11) are normalizable. They fall off exponentially at $r \rightarrow \infty$ and are regular at $r \rightarrow 0$.

Now consider solutions for the other components. They turn out to be more complicated. Denoting

$$\lambda_-^{22} + \lambda_-^{21} \equiv \lambda_{(1)},$$

one gets:

$$\begin{aligned} \partial_r \bar{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{r} \bar{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{Nr} (f - f_W) \bar{\psi}_{1-}(r) + i \phi_1 \lambda_{(1)} &= 0, \\ -\partial_r \lambda_{(1)} - \frac{f_W}{r} \lambda_{(1)} + i g_2^2 \phi_1 \bar{\psi}_{1-}(r) - \mu_2 g_2^2 \frac{i}{2} \frac{f_W}{r} \frac{\phi_1}{\phi_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

So far solutions for our equations were given by certain algebraic combinations of the bosonic profile functions. However, for the functions $\bar{\psi}_{1-}$ and $\lambda_{(1)}$ it is not the case. The above equations are solved in Appendix B. The solutions are given by Eqs. (B.1.6) and (B.1.7).

Two remaining modes $\widetilde{\psi}_{2-}$ and $(\lambda_-^{12} - \lambda_-^{11})$ satisfy the same equations (2.5.14). Therefore these modes are given by the same expressions,

$$\widetilde{\psi}_{2-}(r) = \bar{\psi}_{1-}(r), \quad \lambda_-^{12} - \lambda_-^{11} = \lambda_{(1)}(r). \quad (2.5.15)$$

Solutions (B.1.6) and (B.1.7) fall off exponentially at infinity, however, the behavior of the field λ in (B.1.7) is singular at $r \rightarrow 0$, namely it is proportional to $1/r$. This means that these modes are non-renormalizable. Our perturbative approach does not work: the corrections to (2.5.3) proportional to μ turn out to be non-normalizable. We will show in the next subsection that the resolution of this puzzle is that the fermion orientational modes get lifted by the μ -deformation.

2.5.3 Lifted fermion orientational modes

Let us consider instead of Dirac equations (2.5.6) equations with a non-zero eigenvalue for quark fermions, namely

$$\begin{aligned}
 -i\bar{\psi}\overleftarrow{\nabla} + i\sqrt{2}\left(\bar{q}_f\left\{\lambda^{f\text{U}(1)} + \lambda^{f\text{SU}(N)}\right\}\right. \\
 \left. + \tilde{\psi}\left\{\frac{1}{2}\bar{a}^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \bar{a}^{\text{SU}(N)}\right\}\right) = -m_{or}\tilde{\psi}, \quad (2.5.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\nabla\bar{\psi} + i\sqrt{2}\left(\left\{\lambda_f^{\text{U}(1)} + \lambda_f^{\text{SU}(N)}\right\}q^f\right. \\
 \left. + \left\{\frac{1}{2}\bar{a}^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + \bar{a}^{\text{SU}(N)}\right\}\psi\right) = -m_{or}\psi. \quad (2.5.17)
 \end{aligned}$$

with the mass m_{or} to be determined from the condition of normalizability of super-orientational modes.

Proceeding exactly as it was done in the previous subsection, instead of Eqs. (2.5.14) we arrive at

$$\begin{aligned}
 \partial_r\bar{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{r}\bar{\psi}_{1-}(r) + \frac{1}{Nr}(f - f_N)\bar{\psi}_{1-}(r) + i\phi_1\lambda_{(1)} &= m_{or}\frac{\phi_1^2 - \phi_2^2}{2\phi_2}, \\
 -\partial_r\lambda_{(1)} - \frac{f_N}{r}\lambda_{(1)} + ig_2^2\phi_1\bar{\psi}_{1-}(r) - \mu_2g_2^2\frac{i}{2}\frac{f_N}{r}\frac{\phi_1}{\phi_2} &= 0.
 \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

We consider these equations in the Appendix B. The solutions are given by (B.1.8) and (B.1.9). The condition of regularity of these solutions at $r \rightarrow 0$ gives the eigenvalue

$$m_{or} = -\frac{\mu_2g_2^2\int_0^\infty dy\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}}{1 - 2\int_0^\infty dy\frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)}}. \quad (2.5.19)$$

Solutions for $\bar{\psi}_{2-}$ and the combination $(\lambda_-^{12} - \lambda_-^{11})$ satisfy the same equations (2.5.18) and are related to solutions (B.1.8) and (B.1.9) via (2.5.15).

2.5.4 Effective action in the orientational sector

Now to see the effect of lifting of the orientational fermion zero modes let us derive a fermionic part of the two-dimensional effective action on the string world sheet with the $O(\mu)$ accuracy. In order to do so, we assume a slow t and z dependence of the fermionic moduli $\xi_{L,R}^l$, substitute our *ansatz* (2.5.7), (2.5.8) into the four dimensional fermion action (2.5.1) and integrate over x_1, x_2 . Kinetic terms for bulk fermions (containing derivatives ∂_0 and ∂_3) produce corresponding kinetic terms for two-dimensional fermions, and mass terms are generated because fermionic modes are now lifted. The result for the quadratic terms in the two dimensional fermionic action is

$$\mathcal{S}_{2d} = \int dt dz \left\{ \frac{4\pi}{g_2^2} (\bar{\xi}_L i \partial_R \xi_L + \bar{\xi}_R i \partial_L \xi_R) + m_{or} \gamma (\bar{\xi}_R \xi_L + \bar{\xi}_L \xi_R) + \dots \right\}, \quad (2.5.20)$$

where dots stand for higher order terms in fields and

$$\gamma = -4 \int dx_1 dx_2 \bar{\psi}_{1+} \bar{\psi}_{2+} = 4 \int dx_1 dx_2 |\bar{\psi}_{2+}|^2, \quad (2.5.21)$$

while

$$\partial_R = \partial_0 + i \partial_3, \quad \partial_L = \partial_0 - i \partial_3.$$

We see that all two-dimensional fermionic fields $\xi_{L,R}^l$ become massive with mass m_{or} proportional to μ . We expect that in the limit of large μ these fermions decouple from bosonic $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ model (2.4.3).

2.5.5 Supertranslational zero modes

As we already mentioned, supertranslational modes can be obtained via a supersymmetry transformation from bosonic string solution even in the μ -deformed theory. String solution ceases to be a BPS one, and all of the four remaining supercharges $Q^{\alpha 1}$ of the $\mathcal{N} = 1$ theory act non-trivially on the string solution. Much in the same way as the bosonic translational modes, the supertranslational ones decouple from orientational $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ model and are described by free fermions on the string world sheet. This can be anticipated on general grounds. To see this note that the orientational fermion fields $\xi_{L,R}^l$ become heavy at large μ and without them we cannot construct interaction terms of n^l and supertranslational moduli $\zeta_{L,R}$

compatible with symmetries of the theory (if we do not consider higher derivative corrections).

For the sake of completeness we construct explicitly supertranslational zero modes in the large μ limit, acting by $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry transformations on the string solution of Sec. 2.3. The $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry transformations have the form

$$\begin{aligned}\delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{kA} &= i\sqrt{2}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}\alpha}q^{kA}\epsilon^{\alpha} + \sqrt{2}\bar{\epsilon}^{\alpha}\bar{F}^{kA}, \\ \delta\bar{\psi}_{\dot{\alpha}Ak} &= i\sqrt{2}\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}\alpha}\bar{q}_{Ak}\epsilon^{\alpha} + \sqrt{2}\bar{\epsilon}^{\alpha}\bar{F}_{kA},\end{aligned}\tag{2.5.22}$$

where the F -terms are given by derivatives of the superpotential (2.2.6),

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Ak} &= -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial q^{kA}} = \frac{i}{\mu_2}\left(\tilde{q}_{Ck}(\tilde{q}_Aq^C) - \frac{\alpha}{N}(\tilde{q}_Cq^C)\tilde{q}_{Ak}\right) + m\tilde{q}_{Ak} \\ &= \frac{i}{\mu_2}\left(\varphi_{Ck}(\varphi_A\varphi^C) - \frac{\alpha}{N}(\varphi_C\varphi^C)\varphi_{Ak}\right) + m\varphi_{Ak},\end{aligned}\tag{2.5.23}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}^{kA} &= -\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\tilde{q}_{Ak}} = \frac{i}{\mu_2}\left(q^{kC}(\tilde{q}_Cq^A) - \frac{\alpha}{N}(\tilde{q}_Cq^C)q^{kA}\right) + mq^{kA} \\ &= \frac{i}{\mu_2}\left(\varphi^{kC}(\varphi_C\varphi^A) - \frac{\alpha}{N}(\varphi_C\varphi^C)\varphi^{kA}\right) + m\varphi^{kA},\end{aligned}\tag{2.5.24}$$

where we also used (2.3.1).

Consider first the region of intermediate r , in the range $1/m_G \lesssim r \lesssim 1/m_L$. As we will see, the fermion zero modes behave as $1/r$. This will give us leading logarithmic contributions to the kinetic terms for fermions of two dimensional effective theory on the string world sheet.

To calculate the fermionic modes one should substitute bosonic solutions (2.3.16) into the transformations (2.5.22). In (2.5.22), the first terms in the first and second lines give $1/r$ contributions, whereas the F -terms adds constant and logarithmic terms, which does not produce leading logarithmic terms in the effective action. We

neglect these last terms, and get non-zero fermionic profiles

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_1 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 - i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_R, \\
\bar{\psi}_2 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 + i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_L, \\
\widetilde{\bar{\psi}}_1 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 - i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_R, \\
\widetilde{\bar{\psi}}_2 &\approx (n\bar{n}) \frac{x^1 + i x^2}{r} \frac{1}{r} \frac{\sqrt{\xi}}{\ln \frac{g_2 \sqrt{\xi}}{m_L}} \zeta_L.
\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

One can see that these modes are indeed proportional to $1/r$. Here $\zeta_{L,R}$ are the Grassmann parameters generated by supersymmetry transformations, $\zeta_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^1$, $\zeta_R = -\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^2$. These parameters become fermionic fields in the two dimensional effective theory on the string world sheet.

The region of small r , $r \ll 1/m_G$ does not contribute because quark fields vanish in this limit.

To find the effective world sheet action, one should substitute solutions (2.5.25) into four-dimensional fermionic action (2.5.1). For the kinetic term, we obtain:

$$\mathcal{L}_{2d} = 2\pi\xi I_\xi (\bar{\zeta}_L i \partial_R \zeta_L + \bar{\zeta}_R i \partial_L \zeta_R), \tag{2.5.26}$$

where the normalization constant is

$$I_\xi = \frac{2N}{\ln \frac{m_W}{m_L}}. \tag{2.5.27}$$

As we already mentioned, deriving this effective action we integrated over the transversal coordinates in the range $1/m_G \lesssim r \lesssim 1/m_L$. The integral over r is logarithmically enhanced. The contributions of other regions do not have logarithmic enhancement and can be neglected.

We see that (2.5.26) is the action for free fermions which decouples from the orientational sector given by $\mathbb{CP}(N-1)$ model (2.4.3).

2.6 Physics of the world sheet theory and confined monopoles

As we have seen above the fermionic fields ξ^l of the effective world sheet theory become heavy in the large μ limit and decouple. Moreover, the translational sector

is free and does not interact with the orientational sector. Thus, our effective world sheet theory on the non-Abelian string is given by bosonic $\mathbb{CP}(N-1)$ model (2.4.3) without fermions in the large μ limit. If quark masses are small but not equal, the orientational moduli n^l are lifted by shallow potential (2.4.19).

As we already mentioned, our four dimensional bulk theory is in the Higgs phase where squarks develop condensate (2.2.18). Therefore 't Hooft-Polyakov monopoles present in the theory in the $\mathcal{N} = 2$ limit of small μ are confined by non-Abelian strings. In fact in $U(N)$ gauge theories confined monopoles are junctions of two distinct strings [7, 8, 33]. In the effective world sheet theory on the non-Abelian string they are seen as kinks interpolating between different vacua of $\mathbb{CP}(N - 1)$ model, see [11] for a review.

The question of the crucial physical importance is whether monopoles survive the limit of large μ when the the bulk theory flows to $\mathcal{N} = 1$ QCD. Quasiclassically we do not expect this to happen. From a quasiclassical point of view, the very existence of 't Hooft-Polyakov monopoles relies on the presence of adjoint scalars which develop VEVs. At large μ adjoint fields become heavy and decouple in our bulk theory, so quasiclassically we do not expect monopoles to survive.

We will see now that in quantum theory the story becomes more interesting. Confined monopoles are represented by kinks of $\mathbb{CP}(N - 1)$ model on the non-Abelian string. Therefore to address the above problem we have to study kinks in the world sheet theory. Certain results in this direction were already obtained. As we mentioned before, in the framework of massless μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ QCD with FI D -term it was shown that the effective theory on the string world sheet is heterotic $\mathcal{N} = (0, 2)$ supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model [17, 18, 23, 25]. This model has N degenerative vacua and kinks interpolating between them. This means that kinks/confined monopoles do survive the large μ limit in the above mentioned theory.

In this Chapter we study a more "realistic" version of μ -deformed theory without the FI D -term. This theory flows to $\mathcal{N} = 1$ QCD in the large μ -limit. As we have shown the world sheet theory on the non-Abelian string reduces to non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model without fermions in the large μ limit. If quark mass differences are non-zero, a potential (2.4.19) is generated. It does not have multiple local minima, therefore kinks (confined monopoles of the bulk theory) become unstable and disappear.

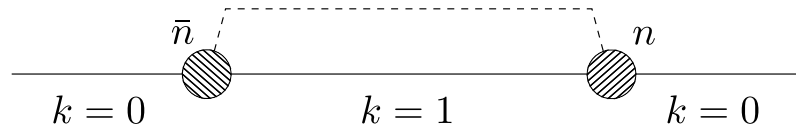


Figure 2.1: Configuration of a string with kink and anti-kink on it. $k = 0$ and $k = 1$ is the notation for the true vacuum and the first quasi-vacuum respectively.

Consider the case when quark masses are equal. Then $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ model is at strong coupling. This model was solved by Witten [26] in the large N approximation. It was shown that kinks in this model are in a confinement phase. In terms more suitable for application to monopole physics of the bulk theory this can be understood as follows, see also [11] for a more detail review.

The vacuum structure of the $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ model was studied in [53]. It was shown that the genuine vacuum is unique. There are, however, of order N quasi-vacua, which become stable in the limit $N \rightarrow \infty$, since an energy split between the neighboring quasi-vacua is $O(1/N)$. Thus, one can imagine a kink interpolating between the true vacuum and the first quasi-vacuum and the anti-kink returning to the true vacuum as in Fig.(2.1). Linear confining potential between kink and anti-kink is associated with excited quasi-vacuum.

This two dimensional confinement of kinks was interpreted in terms of strings and monopoles of the bulk theory in [49]. The fine structure of vacua in $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ model on the non-Abelian string means that N elementary strings are split by quantum effects and have slightly different tensions. The difference between the tensions of "neighboring" strings is proportional to Λ_{CP}^2 , see (2.4.13). Therefore monopoles, in addition to the four dimensional confinement (which ensures that they are attached to the string), acquire two-dimensional confinement along the string. Monopole and antimonopole connected by a string with larger tension form a mesonic bound state.

Fig. 2.1 represents a monopole-antimonopole pair interpolating between strings 0 and 1. Energy of the excited part of the string (labeled as 1) is proportional to the distance R between the kink and anti-kink as

$$V(R) \sim \Lambda_{CP}^2 R. \quad (2.6.1)$$

When it exceeds the mass of two monopoles which is of order of Λ_{CP} then the second monopole-antimonopole pair emerges breaking the excited part of the string. This gives an estimate for the typical length of the excited part of the string, $R \sim$

N/Λ_{CP} . Since this length grows in the large N limit, kinks are metastable with an exponentially small decay rate $\exp\{-N\}$.

The results of this Chapter are published in the papers [19, 20].

CHAPTER 3

$\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD: investigating the semilocal string

In the previous Chapter we studied μ -deformed $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with the gauge group $U(N)$ and $N_f = N$ flavors. To the leading order in small μ the mass term for the adjoint matter reduces to Fayet-Iliopoulos F -term which does not break $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry [52, 54]. In the quark vacuum squark condensate is determined by $\sqrt{\mu m}$, where m is a quark mass. In this setup non-Abelian strings were first found [5, 6, 7, 8] and their dynamics was well studied, see [11] for a review. In addition to the translational zero modes typical for Abelian ANO vortex strings [14], non-Abelian strings have orientational moduli associated with rotations of their fluxes inside the non-Abelian $SU(N)$ group. The dynamics of the orientational moduli in $\mathcal{N} = 2$ QCD is described by the two dimensional $\mathbb{C}P(N - 1)$ model living on the world sheet of the non-Abelian string.

It turns out that at large μ the non-Abelian string ceases to be BPS, and world sheet supersymmetry is completely lost. Fermionic sector of the low energy world sheet theory decouples at large μ , while the bosonic sector is given by two dimensional $\mathbb{C}P(N - 1)$ model. It was also shown in Chapter 2 that in the case of equal quark masses confined monopoles seen in the world sheet theory as kinks [7, 8] survive μ deformation and present in the limit of $\mathcal{N} = 1$ SQCD. The potential in two dimensional world sheet theory induced by quark mass differences was also found.

Non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 2$ SQCD with “extra” quark flavors ($N_f > N$) were well studied in the literature. In this setting the string develops size moduli and becomes semilocal. In particular, in the Abelian case these strings interpolate between ANO local strings and sigma-model lumps [34, 55, 56, 57, 58]. World-sheet theory on the semilocal non-Abelian string was first considered from a D-brane prospective [5, 8], and later from a field theory side [59, 60, 61, 62]. In

particularly, in [62] it was found that the world sheet theory is the so-called $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric zn model.

In this Chapter we continue studies of non-Abelian strings in SQCD with additional quark flavors, $N_f > N$ and consider μ deformed theory. In particular, we study what becomes of semilocal non-Abelian strings as we increase μ and take the large μ limit where the theory flows to $\mathcal{N} = 1$ SQCD. First we found that much in the same way as for $N_f = N$ case of Chapter 2 the string is no longer BPS and the world sheet supersymmetry is lost.

Moreover, as we switch on the deformation parameter μ the string itself ceases to be semilocal. Considering the world sheet theory at small μ we show that string size moduli develop a potential which forces them to shrink. Eventually in the large μ limit size moduli decouple and the effective theory on the string reduces to $\mathbb{CP}(N - 1)$ model.

We also briefly discuss the physics of confined monopoles.

3.1 Theoretical setup

3.1.1 Bulk theory

In this section we briefly describe our initial theory in the bulk. The basic model is four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with the gauge group $SU(N) \times U(1)$. The field content of the theory is as follows. The matter consists of $N_f = N + \tilde{N}$ flavors of quark hypermultiplets in the fundamental representation, scalar components being q^{kA} and \tilde{q}_{Ak} . Here, $A = 1, \dots, N_f$ is the flavor index and $k = 1, \dots, N$ is the color index. The vector multiplets consist of $U(1)$ gauge field A_μ and $SU(N)$ gauge field A_μ^a , complex scalar fields a and a^a in the adjoint representation of the color group, and their Weyl fermion superpartners. Index a runs from 1 to $N^2 - 1$, and the spinorial index $\alpha = 1, 2$.

Superpotential of the $\mathcal{N} = 2$ SQCD is

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=2} = \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{q}_A \mathcal{A}^{U(1)} q^A + \tilde{q}_A \mathcal{A}^a T^a q^A \right\} + m_A \tilde{q}_A q^A, \quad (3.1.1)$$

which includes adjoint matter chiral $\mathcal{N} = 1$ multiplets $\mathcal{A}^{U(1)}$ and $\mathcal{A}^{SU(N)} = \mathcal{A}^a T^a$, and the quark chiral $\mathcal{N} = 1$ multiplets q^A and \tilde{q}_A (here we use the same notation for

the quark superfields and their scalar components). The μ deformation considered in this Chapter is given by the superpotential (2.2.2),

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \sqrt{\frac{N}{2}} \frac{\mu_1}{2} \left(\mathcal{A}^{\text{U}(1)} \right)^2 + \frac{\mu_2}{2} (\mathcal{A}^a)^2 .$$

We assume the deformation parameters to be of the same order, $\mu_1 \sim \mu_2 \sim \mu$. When we increase $\mu \rightarrow \infty$, $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry becomes broken, and the theory flows to $\mathcal{N} = 1$ SQCD. Instead in the limit of small μ this superpotential does not break the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry and reduces to a Fayet–Iliopoulos F -term [52, 54].

In order to control the theory and stay at weak coupling as we take this limit, we require the product $\sqrt{\mu m}$ to stay fixed and well above $\Lambda_{\mathcal{N}=1}$, which is the scale of the $\text{SU}(N)$ sector of $\mathcal{N} = 1$ QCD .

The bosonic part of the action is basically the same as (2.2.8):

$$\begin{aligned} S_{\text{bos}} = \int d^4x & \left(\frac{1}{2g_2^2} \text{Tr} \left(F_{\mu\nu}^{\text{SU}(N)} \right)^2 + \frac{1}{4g_1^2} \left(F_{\mu\nu}^{\text{U}(1)} \right)^2 + \right. & (3.1.2) \\ & \frac{2}{g_2^2} \text{Tr} \left| \nabla_\mu a^{\text{SU}(N)} \right|^2 + \frac{1}{g_1^2} \left| \partial_\mu a^{\text{U}(1)} \right|^2 + \left| \nabla_\mu q^A \right|^2 + \left| \nabla_\mu \tilde{q}^A \right|^2 + \\ & \left. V(q^A, \tilde{q}_A, a^{\text{SU}(N)}, a^{\text{U}(1)}) \right) . \end{aligned}$$

Here ∇_μ is the covariant derivative in the corresponding representation:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^{\text{adj}} &= \partial_\mu - i [A_\mu^a T^a, \cdot] , \\ \nabla_\mu^{\text{fund}} &= \partial_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^{\text{U}(1)} - i A_\mu^a T^a , \end{aligned}$$

with the $\text{SU}(N)$ generators normalized as $\text{Tr} (T^a T^b) = (1/2) \delta^{ab}$. Superpotentials (3.1.1), (3.1.1) contribute to the scalar potential V which is given by the sum of F

and D terms,

$$\begin{aligned}
V(q^A, \tilde{q}_A, a^{\text{SU}(N)}, a^{\text{U}(1)}) &= \\
&= \frac{g_2^2}{2} \left(\frac{1}{g_2^2} f^{abc} \bar{a}^b a^c + \bar{q}_A T^a q^A - \tilde{q}_A T^a \tilde{q}^A \right)^2 \\
&+ \frac{g_1^2}{8} (\bar{q}_A q^A - \tilde{q}_A \tilde{q}^A)^2 \tag{3.1.3} \\
&+ 2g_2^2 \left| \tilde{q}_A T^a q^A + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{W}_{N=1}}{\partial a^a} \right|^2 + \frac{g_1^2}{2} \left| \tilde{q}_A q^A + \sqrt{2} \frac{\partial \mathcal{W}_{N=1}}{\partial a^{\text{U}(1)}} \right|^2 \\
&+ 2 \sum_{A=1}^{N_f} \left\{ \left| \left(\frac{1}{2} a^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^a T^a \right) q^A \right|^2 + \right. \\
&\quad \left. \left| \left(\frac{1}{2} a^{\text{U}(1)} + \frac{m_A}{\sqrt{2}} + a^a T^a \right) \tilde{q}^A \right|^2 \right\},
\end{aligned}$$

where summation is implied over the repeated flavor indices A (and over omitted color indices, too).

Consider the case when we have one “extra” flavor, $N_f = N + 1$. Scalar potential (3.1.3) has a set of supersymmetric vacua, but in this Chapter we concentrate on a particular vacuum where the maximal number of squarks equal to N condense. Up to a gauge transformation, the squark vacuum expectation values are given by

$$\langle q^{kA} \rangle = \langle \tilde{q}^{kA} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \sqrt{\xi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \sqrt{\xi_{N-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\xi_N} & 0 \end{array} \right), \tag{3.1.4}$$

where we write quark fields as a rectangular matrices $N \times N_f$ and ξ_P are defined as (2.2.14),

$$\xi_P = 2 \left(\sqrt{\frac{2}{N}} \mu_1 \hat{m} + \mu_2 (m_P - \hat{m}) \right), \tag{3.1.5}$$

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N m_P. \tag{3.1.6}$$

If we define a scalar adjoint matrix as (2.2.5),

$$\Phi = \frac{1}{2} a + T^a a^a,$$

then the adjoint fields VEVs are given by

$$\langle \Phi \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & m_N \end{pmatrix}. \quad (3.1.7)$$

The vacuum field (3.1.4) results in the spontaneous breaking of both gauge $U(N)$ and flavor $SU(N)$. However, in the equal mass limit $m_A \equiv m$, $A = 1, \dots, N_f$ all parameters ξ become equal, $\xi_P \equiv \xi$, $P = 1, \dots, N$ and a diagonal global $SU(N)_{C+F}$ survives, or, more exactly (cf. (2.2.21), (1.1.3)):

$$U(N)_{\text{gauge}} \times SU(N)_{\text{flavor}} \rightarrow SU(N)_{C+F} \times SU(\tilde{N})_F \times U(1).$$

Thus, a color-flavor locking takes place in the vacuum. The presence of the color-flavor $SU(N)_{C+F}$ global symmetry is the reason for the formation of non-Abelian strings, see [11] for a review.

In the special case when

$$\mu_2 = \mu_1 \sqrt{2/N} \equiv \mu,$$

superpotential (3.1.1) is simplified and becomes a single-trace operator

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}=1} = \mu \text{Tr}(\Phi^2). \quad (3.1.8)$$

3.1.2 Mass spectrum

In this section we review the mass spectrum of our bulk SQCD taking all quark masses equal, cf. [11, 25, 52]. Due to squark condensation, the gauge bosons acquire masses¹

$$\begin{aligned} m_{U(1)} &= g_1 \sqrt{\frac{N}{2}} \xi, \\ m_{SU(N)} &= g_2 \sqrt{\xi}. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Scalar states masses are to be read off from the potential (3.1.3). Expanding and diagonalizing the mass matrix one can find $N^2 - 1$ real scalars with the masses $m_{SU(N)}$ and one scalar with the mass $m_{U(1)}$. These are $\mathcal{N} = 1$ superpartners of $SU(N)$ and $U(1)$ gauge bosons. Other N^2 components are eaten by the Higgs

¹Here we assume for simplicity that ξ, μ_1, μ_2 are real

mechanism. Another $2 \times 2N^2$ real scalars (adjoint scalars a^a , a and the half of squarks) become scalar components of the following $\mathcal{N} = 1$ chiral multiplets: one with mass

$$m_{\mathbf{U}(1)}^+ = g_1 \sqrt{\frac{N}{2} \xi \lambda_1^+}, \quad (3.1.10)$$

and another one with mass

$$m_{\mathbf{U}(1)}^- = g_1 \sqrt{\frac{N}{2} \xi \lambda_1^-}. \quad (3.1.11)$$

The remaining $2(N^2 - 1)$ chiral multiplets have masses

$$m_{\mathbf{SU}(N)}^+ = g_2 \sqrt{\xi \lambda_2^+}, \quad (3.1.12)$$

$$m_{\mathbf{SU}(N)}^- = g_2 \sqrt{\xi \lambda_2^-}. \quad (3.1.13)$$

Here λ_i^\pm are roots of the quadratic equation [11, 52]

$$\lambda_i^2 - \lambda_i(2 + \omega_i^2) + 1 = 0 \quad (3.1.14)$$

with

$$\omega_1 = \frac{g_1 \mu_1}{\sqrt{\xi}}, \quad \omega_2 = \frac{g_2 \mu_2}{\sqrt{\xi}}. \quad (3.1.15)$$

Once $N_f > N$ apart from the above massive scalars, we also have $4N(N_f - N)$ scalars which come from the extra squark flavors q^K and \tilde{q}_K , $K = (N + 1), \dots, N_f$. In the equal mass limit these extra scalars are massless, and the theory enjoys a Higgs branch

$$\mathcal{H} = T^* \text{Gr}^{\mathbb{C}}(N_f, N) \quad (3.1.16)$$

of real dimension

$$\dim \mathcal{H} = 4N(N_f - N), \quad (3.1.17)$$

cf. (1.1.4).

In the large μ limit, states with masses $m_{\mathbf{U}(1)}^+$ and $m_{\mathbf{SU}(N)}^+$ become heavy with masses $\sim g^2 \mu$ and decouple. They correspond to the adjoint matter multiplets. Instead states with masses $m_{\mathbf{U}(1)}^-$ and $m_{\mathbf{SU}(N)}^-$ become light with masses $\sim \xi/\mu$. Scalar components of these multiplets are Higgs scalars. They develop VEVs (3.1.4). In the opposite limit of small μ their masses are given by

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{U}(1)}^- &= g_1 \sqrt{\frac{N}{2} \xi} \left(1 - \frac{g_1 \mu_1}{2\sqrt{\xi}} + \dots \right), \\ m_{\mathbf{SU}(N)}^- &= g_2 \sqrt{\xi} \left(1 - \frac{g_2 \mu_2}{2\sqrt{\xi}} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

As we already mentioned $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry is not broken in our theory to the leading order at small μ [52, 54]. The leading order corresponds to sending parameters ω in (3.1.15) to zero while keeping FI parameter $\xi \sim \mu m$ fixed. One can see that in the $\mathcal{N} = 2$ limit Higgs scalars are degenerate with the gauge fields², but become lighter as we switch on the μ -deformation.

The ratio of squares of Higgs and gauge boson masses β is an important parameter³ in the theory of superconductivity. Type I superconductors correspond to $\beta < 1$, while type II superconductors correspond to $\beta > 1$. BPS strings arise on the border at $\beta = 1$. We see that in our theory both parameters β ,

$$\beta_{U(1)} = \left(\frac{m_{U(1)}^-}{m_{U(1)}} \right)^2, \quad \beta_{SU(N)} = \left(\frac{m_{SU(N)}^-}{m_{SU(N)}} \right)^2, \quad (3.1.19)$$

are less than unity, and thus our theory is in the type I superconducting phase at non-zero μ . This will turn out to be important later.

3.2 Semilocal non-Abelian vortices

In this section we study a vortex string solution in the equal quark mass limit. First we review previous results [62] for the BPS semilocal non-Abelian vortex string and then consider a small μ -deformation. We derive the world-sheet effective theory for the string moduli fields in this case. For simplicity we consider the theory with one extra quark flavor, $N_f = N + 1$.

3.2.1 BPS semilocal non-Abelian string

We start by reviewing the semilocal non-Abelian string in the $\mathcal{N} = 2$ limit [62]. Once number of flavors exceed number of colors vortices have no longer the conventional exponentially small tails of the profile functions. The presence of the Higgs branch and associated massless fields in the bulk makes them semilocal, see detail review of the Abelian case in [34]. The semilocal strings have a power fall-off at large distances from the string axis. For example, the semilocal Abelian BPS string interpolates between ANO string [14] and two-dimensional O(3) sigma-model

²They belong to the same long vector $\mathcal{N} = 2$ supermultiplet [52]

³To avoid confusion we clarify, that in this Chapter the 2D inverse coupling is denoted as γ , whereas the letter β is reserved for the Higgs-gauge mass ratio.

instanton uplifted to four dimensions (also known as the lump). For one extra flavor the semilocal string possesses two additional zero modes parametrized by the complex modulus ρ . The string's transverse size is associated with $|\rho|$. In the limit $|\rho| \rightarrow 0$ in the Abelian case we recover the ANO string while at $|\rho| \gg 1/m_{U(1)}$ it becomes a lump.

Consider an infinite static string stretched along the x_3 axis. We can start with basically the same ansatz as (2.3.1), (2.3.2):

$$q^{kA} = \bar{q}^{kA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi^{kA}, \quad (3.2.1)$$

$$\varphi = \left(\phi_2(r) + n\bar{n}(\phi_1(r) - \phi_2(r)) \mid n \phi_3(r) e^{-i\alpha} \right) \quad (3.2.2)$$

for quarks, while the gauge fields are given by

$$\begin{aligned} A_i^{\text{SU}(N)} &= \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f_G(r) \left(n\bar{n} - 1/N \right), \\ A_i^{\text{U}(1)} &= \frac{2}{N} \varepsilon_{ij} \frac{x^j}{r^2} f(r). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Index i runs $i = 1, 2$, all other components are zero; α, r are polar angle and radius in the (x_1, x_2) plane respectively. The complex parameters $n^l, l = 1, \dots, N$ obey the $\mathbb{CP}(N-1)$ constrain $\bar{n}n = 1$. They parametrize the orientational zero modes of the non-Abelian string which appear due to the presence of the color-flavor group (3.1.1), see [11] for a review.

The string profile functions entering (3.2.2) and (3.2.3) satisfy first order BPS equations. For the case

$$\frac{g_1^2}{2} = \frac{g_2^2}{N} \equiv \frac{g^2}{N} \quad (3.2.4)$$

the solution is particularly simple [62]. It is parametrized by a complex size modulus ρ :

$$\begin{aligned} \phi_1 &\approx \sqrt{\xi} \frac{r}{\sqrt{r^2 + |\rho|^2}}, \\ \phi_2 &\approx \sqrt{\xi}, \\ \phi_3 &= \frac{\rho}{r} \phi_1 \approx \sqrt{\xi} \frac{\rho}{\sqrt{r^2 + |\rho|^2}}, \\ f &= f_G \approx \frac{|\rho^2|}{r^2 + |\rho|^2}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

This solution is valid in the limit $|\rho| \gg 1/(g_2\sqrt{\xi}|\rho|)$, i.e. when the scalar fields approach the vacuum manifold (Higgs branch). Tension of the BPS string is given by

$$T_{BPS} = 2\pi\xi. \quad (3.2.6)$$

To obtain the low energy effective two dimensional theory living on the string world sheet, one should assume n^P and ρ to be slowly varying functions of the transversal coordinates t, z , and substitute the solution (3.2.5) into the action (3.1.2). This procedure yields the effective action

$$S_{SUSY}^{2d} = \int d^2x \left\{ 2\pi\xi |\partial_k(\rho n_P)|^2 \ln \frac{L}{|\rho|} + \frac{4\pi}{g^2} \left[|\partial_k n_P|^2 + (\bar{n}_P \partial_k n_P)^2 \right] \right\}, \quad (3.2.7)$$

where the integration is carried over the coordinates x_0, x_3 , see the detailed derivation in [62]. Here $k = 0, 3$, and L is an infra-red cutoff introduced for the regularization of the logarithmic divergences of orientational and size zero modes of the string. More exactly we introduce the string of a large but finite length L . This also regularize the spread of string profile functions in the transverse plane [59]. The IR divergences arise due to the slow (power) fall-off of the string profile functions associated with the presence of the Higgs branch [59, 62].

3.2.2 Deformed world-sheet theory

When we take into account higher order μ -corrections, supersymmetry in the bulk reduces to $\mathcal{N} = 1$, and as we already explained our theory becomes that of the type I superconductor, cf. [52]. The string is no longer BPS saturated. To mimic this we consider a simplified version of our theory with the bosonic action given by

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4g_2^2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4g_1^2} (F_{\mu\nu})^2 + |\nabla_\mu \varphi^A|^2 + \lambda_N (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A)^2 + \lambda_1 (|\varphi^A|^2 - N\xi)^2 \right\}. \quad (3.2.8)$$

This model depends on two parameters – ratios of the squares of U(1) and SU(N) Higgs and gauge boson masses given by

$$\beta_{U(1)} = \frac{8\lambda_1}{g_1^2}, \quad \beta_{SU(N)} = \frac{2\lambda_N}{g_2^2}, \quad (3.2.9)$$

which we identify with β -parameters (3.1.19) of our original theory . The model above is a non-Abelian generalization the one considered in [63], where the scalar QED was studied see also [34].

In $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD parameters β are exactly equal to one. In this case the the Bogomol'nyi representation produces first order equations for the string profile functions. World sheet theory in this case is given by (3.2.7).

As we switch on μ -corrections parameters β are no longer equal to unity. Let us write the Bogomol'nyi representation for the tension of the string

$$T_\beta = \int d^2x_\perp \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2}g_2} F_{12}^a + \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A) \right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}g_1} F_{12} + \frac{g_1}{2\sqrt{2}} (|\varphi^A|^2 - N\xi) \right]^2 + |\nabla_1 \varphi^A + i\nabla_2 \varphi^A|^2 + \frac{N}{2} \xi F_3^* + \frac{g_2^2}{2} (\beta_{SU(N)} - 1) (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A)^2 + \frac{g_1^2}{8} (\beta_{U(1)} - 1) (|\varphi^A|^2 - N\xi)^2 \right\}, \quad (3.2.10)$$

where \vec{x}_\perp represents the coordinates in the transverse plane. Two extra terms written in the last line above appear. The Bogomol'nyi bound is no longer valid. But if the values $\beta_{U(1)}$ and $\beta_{SU(N)}$ only slightly differ from unity, then we can use the first order equations to rewrite expressions in these extra terms as follows

$$g_2^2 (\bar{\varphi}_A T^a \varphi^A) = -F_{12}^a, \quad \frac{g_1^2}{2} (|\varphi^A|^2 - N\xi) = -F_{12}. \quad (3.2.11)$$

In the case (3.2.4) we can use (3.2.5) to calculate the effective action. Substituting (3.2.2), (3.2.3), (3.2.5) into (3.2.11), (3.2.10) one arrives at the deformed world-sheet theory,

$$S_\beta^{2d} = \int d^2x \left\{ 2\pi\xi |\partial_k(\rho n_P)|^2 \ln \frac{L}{|\rho|} + \frac{4\pi}{g^2} [|\partial_k n_P|^2 + (\bar{n}_P \partial_k n_P)^2] + \frac{\beta - 1}{g^2} \frac{4\pi}{3|\rho|^2} + \dots \right\}, \quad (3.2.12)$$

where now $\beta \equiv \beta_{U(1)} = \beta_{SU(N)}$ and the dots represent corrections in powers of $1/g^2\xi|\rho|^2$.

We see that for non-BPS string ρ is no longer a modulus. It develops a potential proportional to the deviation of β from unity. In particular, for type I superconductor ($\beta < 1$) the size ρ tends to shrink, while for type II superconductor ($\beta > 1$) the size ρ tends to expand making the vortex unstable, cf. [34].

In our case, the value of β is less than unity and is given by (3.1.18) at small μ , namely

$$\beta = 1 - \frac{g\mu}{\sqrt{\xi}} + \dots \quad (3.2.13)$$

This gives the effective world sheet action on the string

$$S_{\beta}^{2d} = \int d^2x \left\{ 2\pi\xi |\partial_k(\rho n_P)|^2 \ln \frac{L}{|\rho|} + \frac{4\pi}{g^2} \left[|\partial_k n_P|^2 + (\bar{n}_P \partial_k n_P)^2 \right] - 4\pi \frac{\mu}{3g\sqrt{\xi}} \frac{1}{|\rho|^2} + \dots \right\}. \quad (3.2.14)$$

We see that the size of the semilocal string tends to shrink and at large μ we expect that the long-range tails of the string are not developed. The string becomes a local non-Abelian string with only orientational moduli n^l , whose world sheet dynamics is described by $\mathbb{CP}(N-1)$ model.

In fact we can argue on general grounds that as we turn on μ and make it large the semilocal string becomes unstable. The semilocal string solution (3.2.5) is "made" of massless fields associated with the Higgs branch of the theory. As we already mentioned, in the Abelian case this solution corresponds to the instanton of the two dimensional $O(3)$ sigma model uplifted to four dimensions. The instanton is essentially a BPS solution and therefore it is natural to expect that it becomes unstable once we increase μ breaking the world sheet supersymmetry.

In particular, as we see from Bogomol'ny representation (3.2.10) extra terms arising at $\beta < 1$ reduce the tension of the string. This is forbidden for BPS lump (uplifted instanton) since its tension is exactly determined by the central charge and given by $2\pi\xi$, see (3.2.6). As we increase μ the string is no longer BPS, ρ develops instability and shrinks leading at large μ to much lower tension, see (3.3.1) below.

3.3 Summary of results

In this Chapter we studied what happens to the non-Abelian semilocal string in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD as we switch on the μ deformation and go to the large μ limit. We showed that the size modulus ρ develops a potential and eventually decouples as the theory flows to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD at large μ . Note that the Higgs branch is still there, just the string is no longer "made" of massless fields, so the long-range "tails" of the string disappear.

Thus, the semilocal string degenerates into the local one. Non-Abelian local strings in the large μ limit of $\mathcal{N} = 1$ SQCD were studied in Chapter 2, and now we see that those results can be directly applied to our case $N_f > N$ as well. Below we briefly summarize these results.

In the large μ limit, the string tension is logarithmically suppressed,

$$T_{local} = \frac{4\pi|\xi|}{\ln \frac{g^2|\mu|}{|m|}}. \quad (3.3.1)$$

This should be contrasted with the BPS formula (3.2.6) valid to the leading order at small μ .

As usual the world sheet theory contains translational moduli but they decouple from the orientational sector. The orientational sector is described by $\mathbb{CP}(N - 1)$ model with the action (2.4.3),

$$S^{(1+1)} = \int dt dz \left\{ \gamma \left[(\partial_k \bar{n} \partial_k n) + (\bar{n} \partial_k n)^2 \right] + V_{1+1} \right\}.$$

Note, that orientational fermionic zero modes are all lifted (see Chapter 2) and do not enter the low energy world sheet theory. The above world sheet theory is purely bosonic.

Here two dimensional inverse coupling constant γ is large⁴, given by (2.4.11):

$$\gamma \sim \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2|\mu|}{|m|}}.$$

At the quantum level $\mathbb{CP}(N - 1)$ model is asymptotically free, so the coupling γ runs and at the energy E is given by

$$2\pi\gamma(E) = N \log \left(\frac{E}{\Lambda_{CP}} \right), \quad (3.3.2)$$

where the scale of the world sheet theory is given by (2.4.13),

$$\Lambda_{CP} \approx \sqrt{\xi} \exp \left\{ \left(-\text{const} \frac{|\mu|}{|m|} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2|\mu|}{|m|}} \right) \right\}.$$

⁴Only in this Chapter the 2D coupling is denoted as γ . In the Chapters 2 and 4 it's 2β , while in Chapters 1 and 5 it's β .

We see that the scale Λ_{CP} of $\mathbb{CP}(N - 1)$ model above is exponentially small, so the world sheet theory is weakly coupled in a wide region of energies $\gg \Lambda_{CP}$. This should be contrasted to non-Abelian string in $\mathcal{N} = 2$ QCD where world sheet theory has a scale Λ_{CP} equal to scale $\Lambda_{\mathcal{N}=2}$ of the bulk SQCD [11].

In the case when the quark masses entering the Lagrangian (3.1.2) are non-identical, a potential for n^P is generated. In the simplest case when all quark masses are positive, this potential is given by (2.4.19),

$$V_{1+1} \approx \frac{8\pi|\mu|}{\ln \frac{g^2|\mu|}{|m|}} \sum_{P=1}^N m_P |n^P|^2. \quad (3.3.3)$$

The potential (2.4.19) has only one minimum and one maximum at generic Δm_{AB} . Other $(N - 2)$ extreme points are saddle points. For equal quark masses this potential reduces to the constant equal to the tension of the string (3.3.1).

Since our four-dimensional theory is in the Higgs phase for squarks, 't Hooft-Polyakov monopoles present in the theory in the $\mathcal{N} = 2$ limit of small μ are confined by non-Abelian strings and serve as junctions of two distinct strings [7, 8, 33]. In the effective world sheet theory on the non-Abelian string they are seen as kinks interpolating between different vacua of $\mathbb{CP}(N - 1)$ model, see [11] for a review.

In the large μ limit adjoint fields decouple. Therefore we could expect quasiclassically that the confined monopoles disappear in this limit. This indeed happen for non-equal quark masses. If quark mass differences are non-zero, a potential (2.4.19) is generated. It does not have multiple local minima, therefore kinks (confined monopoles of the bulk theory) become unstable and disappear.

However, in the equal quark mass case the potential (2.4.19) is absent and the bosonic $\mathbb{CP}(N - 1)$ model supports kinks. Thus, in this case confined monopoles do survive the large μ limit, as follows from Chapter 2. The monopoles are represented by kinks in the effective $\mathbb{CP}(N - 1)$ model on the non-Abelian string, see [11] for a detail review.

The results of this Chapter are published in the papers [20, 21].

CHAPTER 4

Large N solution of the worldsheet theory

In this Chapter we present a large N solution of the world sheet theory for the non-Abelian string in the μ -deformed SQCD, which was derived in Chapter 2. Large N approximation was first used by Witten to solve both non-supersymmetric and $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric two-dimensional $\mathbb{CP}(N - 1)$ models [26]. In particular, large- N Witten's solution shows that an auxiliary $U(1)$ gauge field A_μ introduced to formulate $\mathbb{CP}(N - 1)$ model becomes physical. The $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model has N degenerate vacua as dictated by its Witten index. The order parameter which distinguishes between these vacua is the vacuum expectation value of the scalar superpartner σ of the gauge field A_μ [26].

In the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model these vacua are split with splittings proportional to $1/N$ and become quasivacua. The theory has a single true vacuum¹. The order parameter which distinguish between these quasivacua is the value of the constant field strength of the gauge field A_μ which is massless in the non-supersymmetric case [26], see also [49] and review [11].

In this Chapter we use the large N approximation to study a phase structure of the world sheet theory on the non-Abelian string in μ -deformed SQCD with respect to the deformation parameter μ and quark mass differences Δm . We find a rich phase structure which includes two strong coupling phases and two Higgs phases.

Strong coupling phases appear at small Δm . The first strong coupling phase appears at small μ . It is qualitatively similar to $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric phase at $\mu = 0$. Although N vacua are split and become quasivacua the order parameter is still the VEV of the field σ . In the second strong coupling phase at large μ quasivacua are distinguished by the value of the constant electric field. This phase is qualitatively similar to the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model.

¹We assume below that the θ -angle is zero.

At large Δm we find two weakly coupled Higgs phases. At small μ N vacua present in $\mathcal{N} = (2, 2)$ case split and become quasivacua. Still we have kinks interpolating between them. As we increase μ above certain critical value, these lifted quasivacua disappear one by one, so we have a cascade of phase transitions. In the end we are left with a single vacuum and no kinks at all.

From the point of view of the bulk SQCD we interpret this as follows. At large Δm and small μ we have monopoles confined by non-Abelian strings while as we increase μ monopoles disappear.

4.1 Review of $\mathbb{CP}(N - 1)$ sigma models

In this section we review basic $\mathbb{CP}(N - 1)$ models that are of interest to us. First, we will briefly review the non-supersymmetric and the $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric models, which were considered before, see for example [26, 40, 64, 65]. After that, we will introduce the model that we will be working with, namely the μ -deformed $\mathbb{CP}(N - 1)$ model which is an effective theory living on the world sheet of non-Abelian string in μ -deformed SQCD considered in Chapter 2.

4.1.1 Non-supersymmetric model

Throughout this Chapter we will be working with the gauge formulation [26] of the $\mathbb{CP}(N - 1)$ models. In this formalism, the model is formulated via N complex scalar fields n^i , $i = 1, \dots, N$ interacting with auxiliary U(1) gauge field A_μ . The Lagrangian is written as

$$\mathcal{L} = |\nabla_\mu n^i|^2 + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta_0) + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2, \quad (4.1.1)$$

where $\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu$. Fields σ and D come without kinetic energy and are also auxiliary. They can be eliminated via their equations of motion. In particular integrating out D imposes the constraint

$$\bar{n}_i n^i = 2\beta_0, \quad (4.1.2)$$

which together with gauge invariance reduces the number of real degrees of freedom of the n^i field down to $2(N - 1)$.

This is the non-supersymmetric version of the $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ model, and it arises as a world sheet theory on the non-Abelian string in a non-supersymmetric QCD-like theory, see [49] and review [11]. The mass parameters m_i are equal to quark masses in the four-dimensional theory.

Throughout this Chapter we will consider the masses placed uniformly on a circle,

$$m_k = m - \Delta m \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.1.3)$$

Here $m \in \mathbb{R}$ is the average mass, and $\Delta m > 0$ is effectively the mass scale of the model. Note that by a shift of σ one can always add a constant to all m_i . In particular one can get rid of the average mass m .

The bare coupling constant β_0 in quantum theory becomes a running coupling β . It is asymptotically free and defines the scale Λ_{CP} via

$$\Lambda_{CP}^2 = M_{uv}^2 \exp\left(-\frac{8\pi\beta_0}{N}\right), \quad (4.1.4)$$

where M_{uv} is the ultra-violet (UV) cutoff.

Let us review phases of this theory. It is known that in the case of vanishing masses $\Delta m = 0$ this non-supersymmetric $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ model is at strong coupling with vanishing VEV $\langle n^i \rangle = 0$. It can be solved by means of the $1/N$ expansion [26]. It turns out that at the quantum level spontaneous breaking of the global $SU(N)$ (flavor) symmetry present at the classical level disappears. There are no massless Goldstone bosons in the physical spectrum. The n^i fields acquire mass of the order of Λ_{CP} .

Moreover, composite degree of freedom – the would-be auxiliary photon A_μ acquires a kinetic term at the one-loop level and becomes dynamical. The presence of massless photon ensures long range forces in the non-supersymmetric $\mathbb{C}\mathbb{P}(N-1)$ model. The Coulomb potential is linear in two dimensions, namely

$$V(r) \sim \frac{\Lambda_{CP}^2}{N} r, \quad (4.1.5)$$

where r is the separation between the charges. This leads to the Coulomb/confinement phase [26]. Electric charges are confined. The lightest electric charges are the n^i quanta which become kinks at strong coupling [26]. Confinement of kinks means that they are not present in the physical spectrum of the theory in isolation. They form bound states, kink-antikink “mesons”.

Masses of kinks are of order of Λ_{CP} while the confining potential is weak, proportional to $1/N$. Therefore kink and antikink in the "meson" are well separated forming a quasivacuum inside the "meson". Thus, beside the single ground state, there is a family of quasivacua with energy splittings of order $\sim \Lambda_{CP}^2/N$. The order parameter which distinguish different quasivacua is the value of the constant electric field or topological density

$$Q = \frac{i}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu = \frac{1}{8\pi\beta} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\mu \bar{n}_i \partial^\nu n^i \quad (4.1.6)$$

The picture of confinement of n 's is shown on Fig. 4.1.

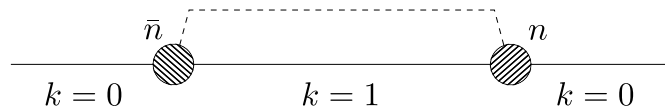


Figure 4.1: Linear confinement of the n - \bar{n} pair. The solid straight line represents the ground state ($k=0$ vacuum). The dashed line shows the vacuum energy density in the first quasivacuum.

The kinks interpolate between the adjacent vacua. They are confined monopoles of the bulk theory. Since the excited string tensions are larger than the tension of the lightest one, these monopoles, besides four-dimensional confinement, are confined also in the two-dimensional sense: a monopole is necessarily attached to an antimonopole on the string to form a meson-like configuration [49, 66]

On the other hand, at large mass scales $\Delta m \gg \Lambda_{CP}$ the coupling constant is small, frozen at the scale Δm , and semiclassical calculations are applicable. The field n^i develops a non-zero VEV, and there is no massless photon and no long-range interactions. That is why this phase is usually called "Higgs phase" as opposed to the Coulomb/confinement strong coupling phase. More exactly $\mathbb{CP}(N-1)$ model in this phase gives a low energy description of a Higgs phase below the scale of the photon mass. Essentially this weakly coupling Higgs phase is similar to the "classical phase" described by the classical Lagrangian (4.1.1).

It was shown that at intermediate mass scales $\Delta m \sim \Lambda_{CP}$ there is a phase transition between the Higgs and Coulomb phases, see [49, 64, 67, 68].

4.1.2 $\mathcal{N} = (2, 2)$ model

Supersymmetric generalization of the above model [26, 40] has additional fermionic field ξ^i , $i = 1, \dots, N$, which are superpartners of the n_i fields. The Euclidean

version of the full $\mathcal{N} = (2, 2)$ Lagrangian is

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{e_0^2} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |\partial_\mu \sigma|^2 + \frac{1}{2} D^2 + \bar{\lambda} i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda \right) + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta_0) \\
& + |\nabla_\mu n^i|^2 + \bar{\xi}_i i \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \xi^i + 2 \sum_i \left| \sigma - \frac{m_i}{\sqrt{2}} \right|^2 |n^i|^2 \\
& + i\sqrt{2} \sum_i \left(\sigma - \frac{m_i}{\sqrt{2}} \right) \bar{\xi}_{Ri} \xi_L^i - i\sqrt{2} \bar{n}_i (\lambda_R \xi_L^i - \lambda_L \xi_R^i) \\
& + i\sqrt{2} \sum_i \left(\bar{\sigma} - \frac{\bar{m}_i}{\sqrt{2}} \right) \bar{\xi}_{Li} \xi_R^i - i\sqrt{2} n^i (\bar{\lambda}_L \bar{\xi}_{Ri} - \bar{\lambda}_R \bar{\xi}_{Li}),
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

where m_i are twisted masses and the limit $e_0^2 \rightarrow \infty$ is implied. Moreover, $\bar{\sigma}^\mu = \{1, i\sigma_3\}$. Fermions ξ_L, ξ_R are respectively left and right components of the ξ field. Here again one can add a uniform constant to all the m_i by shifting the σ field.

The gauge field A_μ , complex scalar superpartner σ , real scalar D and a two-component complex fermion λ form a vector auxiliary supermultiplet. In particular, integrating over D and fermion λ give the constraints

$$\bar{n}_i n^i = 2\beta_0, \tag{4.1.8}$$

$$\bar{n}_i \xi^i = 0, \quad \bar{\xi}_i n^i = 0 \tag{4.1.9}$$

in the limit $e_0 \rightarrow \infty$.

This model was derived as a world sheet theory on the non-Abelian string in $\mathcal{N} = 2$ SQCD. The n_i fields parametrize the orientational moduli of the non-Abelian string [5, 6, 7, 8] The mass parameters m_i are in fact masses of the bulk quark fields. The bare coupling constant β_0 is related to the bulk gauge coupling constant g^2 normalized at the scale of the bulk gauge boson mass $m_G \sim g\sqrt{\mu m}$ via (see e.g. [11])

$$2\beta_0 = \frac{4\pi}{g^2(m_G)} = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{CP}}, \tag{4.1.10}$$

In order to keep the bulk theory at weak coupling we assume that $m_G \gg \Lambda_{CP}$.

Witten solved this model in the large N approximation in the zero mass case [26]. Large- N solution of this model at non-zero masses shows two different regimes at weak and strong coupling [69]. At small mass scales $\Delta m < \Lambda_{CP}$ the theory is in the strong coupling phase with zero VEV $\langle n^i \rangle = 0$ and with a dynamical photon

(Witten's phase). However the photon now is massive due to the presence of the chiral anomaly. There are no long-range forces and no confinement of kinks.

In both strong and weak coupling regimes the theory has N degenerate vacuum states as dictated by its Witten index. They are labeled by the VEV of σ [69]. At $\Delta m < \Lambda_{CP}$ we have

$$\sqrt{2}\sigma = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \times \Lambda_{CP} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.11)$$

This result can be understood as follows. The chiral anomaly breaks $U(1)$ R -symmetry present at zero masses down to Z_{2N} which is then broken spontaneously down to Z_2 by VEV of the σ field (which has R charge equal to two). In particular, from the large- N solution it follows that VEV of $\sqrt{2}|\sigma| = \Lambda_{CP}$. Then Z_{2N} symmetry ensures presence of N vacua as shown in Eq. (4.1.11).

At large masses located on a circle (see (4.1.3)) the Z_{2N} symmetry is still unbroken. This leads to the similar structure of the σ VEVs at $\Delta m > \Lambda_{CP}$, namely

$$\sqrt{2}\sigma = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right) \times \Delta m, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.12)$$

The above formulas show a phase transition at $\Delta m = \Lambda_{CP}$. As follows from the large- N solution the model above this point is in the Higgs phase with a nonzero VEV for say, zero component of n , $\langle n^0 \rangle \neq 0$. In both phases there is no confinement, in contrast to the non-supersymmetric case.

In fact the above phase transition is a consequence of the large- N approximation. At finite N the transition between two regimes is smooth. This follows from the exact effective superpotential known for $\mathcal{N} = (2, 2)$ $\mathbb{CP}(N-1)$ model [40].

4.1.3 μ -Deformed $\mathbb{CP}(N-1)$ model

Now let us pass on to the case of interest, namely, the μ -deformed $\mathbb{CP}(N-1)$ model. This model appears as a world sheet theory on a non-Abelian string in $\mathcal{N} = 2$ SQCD deformed by the adjoint field mass μ . It was derived in Chapter 2 in two cases, for small and large values of the deformation μ . Here and throughout this Chapter we will take the mass parameters to lie on the circle (4.1.3), and we also assume that the deformation parameter is real and positive, $\mu > 0$.

The first effect derived in Chapter 2 is that n_i fields entering the $\mathcal{N} = (2, 2)$ $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.7) develop an additional potential upon μ deformation which

depends on mass differences. This potential in the small μ limit was first found in [50]. The second effect is that superorientational modes of the non-Abelian string are lifted. In other words the two-dimensional fermions ξ^i (fermionic superpartners of n^i) were massless in the supersymmetric version of the model at $\mu = 0$. However, at small μ they acquire a mass $\lambda(\mu) \sim \mu$. At large deformations they become heavy and decouple.

In order to capture these features, we write the following Lagrangian for the deformed $\mathbb{CP}(N-1)$ model:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \left| \nabla_\mu n^i \right|^2 + \bar{\xi}_i i \bar{\sigma}^\mu \nabla_\mu \xi^i + i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta) \\
& + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i0} |n^i|^2 \\
& + i \sum_i \left(\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu) \right) \bar{\xi}_{Ri} \xi_L^i - i\sqrt{2} \bar{n}_i (\lambda_R \xi_L^i - \lambda_L \xi_R^i) \\
& + i \sum_i \left(\sqrt{2}\bar{\sigma} - \bar{m}_i - \overline{\lambda(\mu)} \right) \bar{\xi}_{Li} \xi_R^i - i\sqrt{2} n^i (\bar{\lambda}_L \bar{\xi}_{Ri} - \bar{\lambda}_R \bar{\xi}_{Li}),
\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

where $\Delta m_{i0} = m_i - m_0$, m_i are quark masses $i = 1, \dots, N$, and m_0 is the mass with the smallest real part.

The coefficient functions $v(\mu)$ and $\lambda(\mu)$ were derived in Chapter 2 at the classical level for small and large values of μ :

$$v(\mu) = \begin{cases} \frac{4\pi\mu}{2\beta}, & \mu \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2\beta} \frac{8\pi\mu}{\ln \frac{g^2\mu}{m}}, & \mu \rightarrow \infty \end{cases} \tag{4.1.14}$$

$$\lambda(\mu) = \begin{cases} \lambda_0 \frac{\mu}{2\beta}, & \mu \rightarrow 0, \\ \text{const } g\sqrt{\mu m} \sim m_G, & \mu \rightarrow \infty \end{cases} \tag{4.1.15}$$

Here g^2 is the four-dimensional bulk coupling constant. The numerical value for λ_0 is $\lambda_0 \approx 3.7$ (this can be computed numerically using the formula (2.5.19)). Note that although we can get rid of the explicit dependence on the average quark mass m in (4.1.13) by shift of σ the above formulas show that it enters indirectly through definitions of parameters of μ -deformed $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.13) in terms of parameters of the bulk SQCD.

This model interpolates between the supersymmetric and the non-supersymmetric models briefly described above. In the limit $\mu \rightarrow 0$ supersymmetry

is restored to $\mathcal{N} = (2, 2)$, and we obtain (4.1.7). At large deformations the fermions can be integrated out, and the theory flows to the bosonic model (4.1.1).

Our main tool of investigating this model in the quantum level will be the $1/N$ expansion. In order to have a smooth large N limit, our parameters should scale as

$$\begin{aligned} g^2 &\sim 1/N, & \beta &\sim N, & \mu &\sim N, \\ m &\sim 1, & v(\mu) &\sim 1, & \lambda(\mu) &\sim 1 \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

Below in this Chapter we will use three independent physical parameters to describe our four-dimensional bulk model. The first one is the bulk gauge boson mass

$$m_G^2 = 2g^2\mu m, \quad (4.1.17)$$

which plays a role of the physical UV cutoff in the world sheet $\mathbb{CP}(N-1)$ model on the non-Abelian string, see [11]. The second one is the quark mass differences $(m_i - m_j)$ and the third parameter is the physical mass of the adjoint matter

$$m_{\text{adj}} = g^2\mu = \frac{\mu}{\frac{N}{8\pi^2} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}}} \equiv \tilde{\mu}. \quad (4.1.18)$$

which will be our actual deformation parameter. All three parameters scales as N^0 in the large N limit. Here Λ_{4d} is the scale of $\mathcal{N} = 2$ bulk SQCD.

Thus, in fact, the average quark mass m is not an independent parameter. It can be written as

$$m = \frac{m_G^2}{2\tilde{\mu}}. \quad (4.1.19)$$

At the scale of the gauge boson mass (4.1.17) the world sheet coupling constant for small μ is given by [6, 7], cf. (4.1.10)

$$2\beta = \frac{4\pi}{g^2} = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}}. \quad (4.1.20)$$

For large μ the world sheet coupling normalized at the scale m_G becomes

$$2\beta = \text{const} \frac{\mu}{m} \frac{1}{\ln^2 \frac{g^2\mu}{m}}. \quad (4.1.21)$$

Expressed in terms of the invariant parameters it reads

$$2\beta = \text{const} \frac{N}{\pi} \frac{\tilde{\mu}^2}{m_G^2} \frac{\ln \frac{m_G}{\Lambda_{4d}^{N=1}}}{\ln^2 \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}}, \quad (4.1.22)$$

where we take into account that at large $\tilde{\mu}$ our bulk theory flows to $\mathcal{N} = 1$ SQCD with the scale $(\Lambda_{4d}^{\mathcal{N}=1})^{2N} = \tilde{\mu}^N \Lambda_{4d}^N$.

In terms of the independent parameters the coefficient functions v and λ become

$$v(\tilde{\mu}) = \begin{cases} \tilde{\mu}, & \tilde{\mu} \rightarrow 0, \\ \frac{m_G^2}{\tilde{\mu}} \ln \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}, & \tilde{\mu} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.1.23)$$

$$\lambda(\tilde{\mu}) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_0 \tilde{\mu}, & \tilde{\mu} \rightarrow 0, \\ m_G, & \tilde{\mu} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.1.24)$$

where $\tilde{\lambda}_0 = \lambda_0/4\pi \approx 0.3$.

As we already mentioned the value of the bulk gauge boson mass m_G plays a role of the UV cutoff of our world sheet theory. Below m_G our model is asymptotically free (cf. (4.1.4)) with

$$2\beta(E) = \frac{N}{2\pi} \ln \frac{E}{\Lambda_{2d}} \quad (4.1.25)$$

at the scale E . This fixes the scale Λ_{2d} in terms of the parameters of the bulk theory. At small $\tilde{\mu}$ we have

$$\Lambda_{2d}(\tilde{\mu} \rightarrow 0) = \Lambda_{4d}, \quad (4.1.26)$$

while at large $\tilde{\mu}$

$$\Lambda_{2d} = \Lambda_{4d}^{\mathcal{N}=1} \exp\left(-\text{const} \frac{\tilde{\mu}^2}{m_G^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{2\tilde{\mu}}{m_G}}\right) \quad (4.1.27)$$

Note that at $\tilde{\mu} \rightarrow \infty$ the scale (4.1.27) of our model becomes exponentially small and the model enters the strong coupling regime only at extremely small energies. We will see below that phase transitions with respect to $\tilde{\mu}$ appear at rather small values of $\tilde{\mu}$ where the scale Λ_{2d} is close to its supersymmetric value Λ_{4d} . Since the fermion decoupling occurs at very large $\tilde{\mu} \gg m_G$, we can use small $\tilde{\mu}$ approximation formulas (4.1.23) and (4.1.24) while investigating the phase transition.

In the following sections we are going to investigate different phases and vacuum structure of the world sheet theory. There are two parameters that we can vary – the SUSY breaking parameter $\tilde{\mu}$ and the mass scale Δm . As we already mentioned our model (4.1.13) exhibits a rich phase structure in the $(\Delta m, \tilde{\mu})$ plane.

4.2 One loop effective potential

In this section we proceed with solving the theory (4.1.13) via the $1/N$ expansion. As we already mentioned the $\mathcal{N} = (2, 2)$ model as well as the non supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model (without mass parameters) were solved by Witten [26]. This method was also generalized for the case of heterotic $\mathcal{N} = (0, 2)$ model [24] and for the twisted mass case [64, 69]. Our derivation will closely follow these papers.

4.2.1 Derivation of the effective potential

We want to start by deriving the one-loop effective potential. Our action (4.1.13) is well suited for that since it is quadratic with respect to the dynamical fields n_i and ξ_i . However, we do not to integrate over all of them a priori due to the following reason.

As was stated in the previous section, our model (4.1.13) is, in a sense, an intermediate case between the $\mathcal{N} = (2, 2)$ and the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ models, which were studied before. Therefore we can use the insights derived from these models in order to better understand our case. First of all, we expect that our theory has at least two phases, the strong and weak coupling. The order parameter distinguishing between these two phases is the expectation value of the n_i fields. At weak coupling (so-called Higgs phase [64]) one of the n_i develops a VEV, $\langle n_{i_0} \rangle = 2\beta$. In the strong coupling regime (so-called Coulomb phase), VEVs of all the n_i field vanish.

So, we will use the following strategy. We integrate over $N - 1$ fields n^i with $i \neq 0$ (and over the corresponding fermions ξ_i). The resulting effective action is a functional of $n^0 \equiv n$, D and σ . To find the vacuum configuration, we will minimize the effective action with respect to n , D and σ .

Note that this functional also depends on A_μ and the fermions $\xi_{L,R}^0$, $\lambda_{L,R}$, but the Lorenz invariance imply that these fields have zero VEVs. We also choose to allow n^0 field to have non-zero VEV because the associated mass m_0 has the minimal real part (see (4.1.3)) and as we will see later $\langle n^0 \rangle \neq 0$ corresponds to the true vacuum in the Higgs phase rather than a quasivacuum.

Integrating out the n^i and ξ^i fields, we arrive at the following determinants:

$$\frac{\prod_{i=1}^{N-1} \det \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right)}{\prod_{i=1}^{N-1} \det \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right)}, \quad (4.2.1)$$

which gives for the effective potential:

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

The next step is to calculate the traces entering this expression. At $\tilde{\mu} \rightarrow 0$, the supersymmetry is restored, and this expression is well defined. However at a non-vanishing deformation, this expression diverges quadratically, and a regularization needs to be performed. Below we proceed with the Pauli-Villars regularization (a similar procedure was carried out in [70]). We introduce regulator fields with masses b_a , f_a , $a = 1, 2$, and write the regularized effective potential as

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\ & + \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} B_a \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + b_a^2 \right) \\ & - \sum_{i=1}^{N-1} \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right) \\ & - \sum_{a=1}^2 \sum_{i=1}^{N-1} F_a \text{Tr} \ln \left(-\partial_k^2 + f_a^2 \right) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

where the coefficients satisfy

$$\sum_{a=0}^2 B_a = -1, \quad \sum_{a=0}^2 B_a b_a^2 = -m_{\text{bos}}^2 \quad (4.2.4)$$

These equations imply

$$B_1 = \frac{b_2^2 - m_{\text{bos}}^2}{b_1^2 - b_2^2}, \quad B_2 = -\frac{b_1^2 - m_{\text{bos}}^2}{b_1^2 - b_2^2} \quad (4.2.5)$$

The regulator masses play the role of the UV cutoff. Similar relations hold for the fermionic regulator coefficients.

Moreover, we need to properly normalize our traces by subtracting the contributions in the trivial background, namely $\text{Tr} \ln(-\partial_k^2)$ from the bosonic and the fermionic traces. After this procedure we arrive at

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \int d^2x (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 - 2\beta \int d^2x iD \\ & - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left[\left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \right. \\ & \quad \times \ln \left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\ & \quad \left. - \left(+iD + v(\mu)\Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \frac{b_1^2 \ln b_1^2 - b_2^2 \ln b_2^2}{b_1^2 - b_2^2} \right] \quad (4.2.6) \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left[|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \ln |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \right. \\ & \quad \left. - |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \frac{f_1^2 \ln f_1^2 - f_2^2 \ln f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \right] \end{aligned}$$

This is a quite complex expression. In order to simplify it, let us take the limit [70]

$$b_1^2 = xM_{\text{uv}}^2, \quad b_2^2 = M_{\text{uv}}^2, \quad f_1^2 = xM_{\text{uv}}^2, \quad f_2^2 = M_{\text{uv}}^2, \quad x \rightarrow 1, \quad (4.2.7)$$

where M_{uv} is the UV cutoff. Moreover, recall from the section 4.1.3 that the bare coupling constant can be parametrized as

$$2\beta(M_{\text{uv}}) = \frac{N}{4\pi} \ln \frac{M_{\text{uv}}^2}{\Lambda^2}, \quad (4.2.8)$$

Here, $\Lambda \equiv \Lambda_{2d}$ is the scale of our model. Then the density of the effective potential

becomes

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\text{eff}} = & (iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)|n|^2 \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} iD \left[1 - \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \right] \\
& + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \left(v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2 \right) \\
& \quad \times \left[1 - \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{M_{\text{uv}}^2} \right] \\
& - \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} |\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2 \left[1 - \ln \frac{|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2}{M_{\text{uv}}^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Note that our regularized effective potential depends on the UV cutoff scale M_{uv} . We cannot make a subtraction to get rid of it in the model at hand for the following reason. First, when we consider our $\tilde{\mu}$ -deformed $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.13) as an effective world sheet theory on the non-Abelian string the the UV cutoff has a clear physical meaning, namely

$$M_{\text{uv}} = m_G, \tag{4.2.10}$$

where m_G is the mass of the bulk gauge boson. Moreover, the fermion mass $\lambda(\mu)$ in (4.2.9) interpolates from zero at $\tilde{\mu} = 0$ to $m_G = M_{\text{uv}}$ at $\tilde{\mu} \rightarrow \infty$, see (4.1.24). Thus M_{uv} is in fact a physical parameter in our model and there is no need to get rid of it.

The renormalized coupling constant is

$$2\beta_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \tag{4.2.11}$$

4.2.2 Vacuum equations

To find the vacuum configuration we minimize the effective potential (4.2.9). Varying with respect to D we arrive at

$$|n|^2 = 2\beta_{\text{ren}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{\Lambda^2} \tag{4.2.12}$$

Variation with respect to \bar{n} yields the second equation:

$$(iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2)n = 0 \quad (4.2.13)$$

Finally, the third equation is obtained by minimizing over the σ field,

$$\begin{aligned} -(\sqrt{2}\sigma - m_0)|n|^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} (\sqrt{2}\sigma - m_i) \ln \frac{iD + v(\mu) \operatorname{Re} \Delta m_{i0} + |\sqrt{2}\sigma - m_i|^2}{m_G^2} \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} (\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)) \ln \frac{|\sqrt{2}\sigma - m_i - \lambda(\mu)|^2}{m_G^2}, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

where here and below we replaced M_{uv} by the physical mass m_G .

These three equations comprise our *master set*. In addition, the vacuum configurations must satisfy the constraint

$$\beta_{\text{ren}} \geq 0, \quad (4.2.15)$$

which comes from $2\beta_{\text{ren}} = |n|^2 \geq 0$.

From (4.2.12) and (4.2.13) it immediately follows that either

$$n = \beta_{\text{ren}} = 0 \quad (4.2.16)$$

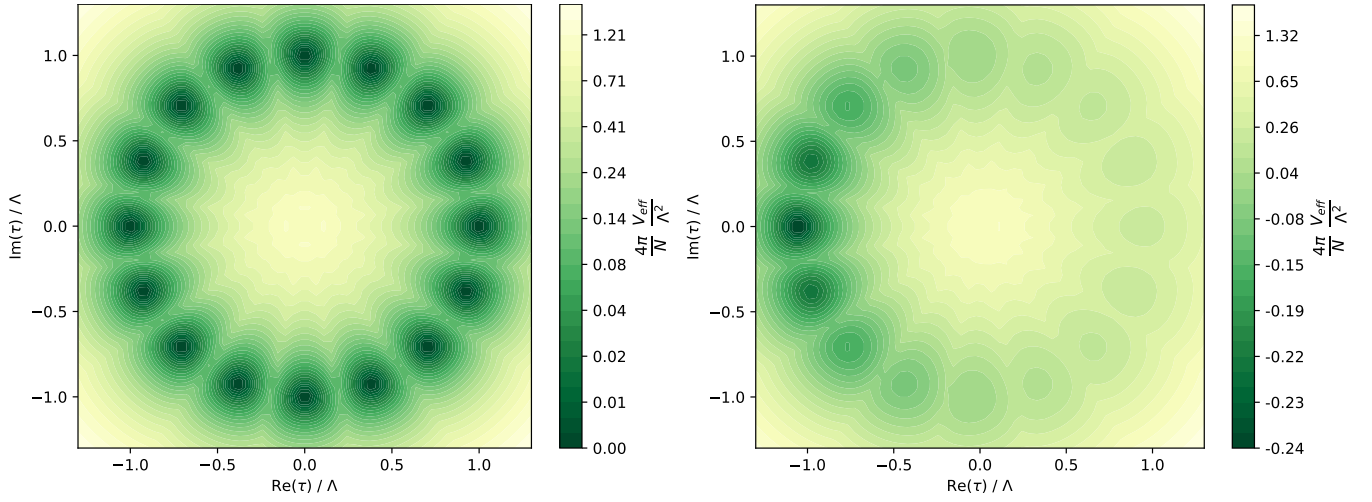
or

$$iD + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2 = 0. \quad (4.2.17)$$

The first option corresponds to the strong coupling regime where the VEV of n and the renormalized coupling constant vanish. The second option is realized in the Higgs regime, where the n field develops a VEV. In the following sections we will study each of these regimes in detail.

4.3 Strong coupling regime

In this section will begin investigation of our model in the strong coupling regime, which is defined by the condition (4.2.16). This phase occurs when the mass scale of the model $\Delta m \lesssim \Lambda$, see e.g. [64, 69]. To start off we will first investigate a simple case $\Delta m = 0$. Behavior of our model is different at different values of the deformation parameter: at intermediate $\tilde{\mu}$ we will see a phase transition, while in



(a) $\lambda = 0$, supersymmetric case, degenerate vacua (b) $\lambda > 0$, broken supersymmetry, lifted quasi-vacua

Figure 4.2: Effective potential (4.3.3) on the complex $\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0$ plane, with D integrated out.

the limit of large fermion mass $\lambda \rightarrow m_G$ we will confirm that the model (4.1.13) flows to non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.1) as expected. Next, we will generalize our results to the case of distinct masses m_i .

4.3.1 Equal mass case, small deformations

We start by investigating the simplest case of equal mass parameters,

$$m_0 = m_1 = \dots = m_{N-1} \equiv m \quad (4.3.1)$$

Under this assumption the potential proportional to $v(\mu)$ is zero and the only deformation we are left with is the fermion mass λ . For now we will not write its dependence on $\tilde{\mu}$ explicitly.

To simplify the equations, let us denote

$$\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0 \quad (4.3.2)$$

Then the effective potential becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{eff}} = & \frac{N}{4\pi} iD \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{N}{4\pi} |\tau|^2 \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{m_G^2} \right] \\ & - \frac{N}{4\pi} |\tau - \lambda(\mu)|^2 \left[1 - \ln \frac{|\tau - \lambda(\mu)|^2}{m_G^2} \right] + \Delta V(\arg \tau), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

where $\tau = |\tau| e^{i \arg \tau}$. Here we added a new term $\Delta V(\arg \tau)$ absent in (4.2.9). It takes into account the chiral anomaly and appears already in $\mathcal{N} = (2, 2) \mathbb{CP}(N-1)$ model at $\tilde{\mu} = 0$. As was shown by Witten [26] the photon become massive due to the chiral anomaly with mass equal 2Λ . The complex scalar σ is a superpartner of the photon and also acquires mass 2Λ . In particular, its argument $\arg \tau$ becomes massive.

This effect is taken into account by the additional potential $\Delta V(\arg \tau)$ in (4.3.3). It is constructed as follows. At small $\tilde{\mu}$ VEVs of τ are approximately given by their supersymmetric values,

$$\tau_k^{\text{SUSY}} = -\Lambda \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (4.3.4)$$

cf. (4.1.11). We divide 2π into N patches centered at vacuum values, $\arg \tau_k^{\text{SUSY}} = 2\pi k/N + \pi$, $k = 0, \dots, (N-1)$ and define the potential $\Delta V(\arg \tau)$ to be quadratic in each patch. Namely, we have

$$\Delta V(\arg \tau) = \frac{N}{4\pi} \frac{m_{\arg \tau}^2}{2} (\arg \tau - \arg \tau_k^{\text{SUSY}})^2, \quad \frac{2\pi(k - \frac{1}{2})}{N} < \arg \tau - \pi < \frac{2\pi(k + \frac{1}{2})}{N}, \quad (4.3.5)$$

where $m_{\arg \tau}$ is the mass of $\arg \tau$. We present its calculation below, in particular showing corrections (see eq. (4.3.33)) to the Witten's result [26]

$$m_{\arg \tau}^{\text{SUSY}} = 2\Lambda. \quad (4.3.6)$$

Without the additional potential $\Delta V(\arg \tau)$ N discrete vacua (4.3.4) disappear immediately as we switch on $\tilde{\mu}$ due to the lifting of quasivacua. We show below that with $\Delta V(\arg \tau)$ taken into account quasivacua are still present at small $\tilde{\mu}$ and disappear only at certain finite critical $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$ which we identify as a phase transition point. Note that possible higher corrections to the quadratic potential (4.3.5) are suppressed in the large N limit because the width of each patch is small, proportional to $1/N$.

Vacuum energies

As we turn on the deformation parameter $\tilde{\mu}$ the mass of ξ^i fermion $\lambda(\tilde{\mu})$ is no longer zero. This breaks explicitly both chiral symmetry and two-dimensional supersymmetry. As a result the Z_N symmetry is broken and VEVs of σ are no longer located at a circle. Moreover, at $\tilde{\mu} = 0$ our model has N degenerate vacua given

by (4.3.4). When we switch on $\tilde{\mu}$, the corresponding vacuum energies split, and all vacua except the one at $k = 0$ become quasivacua. The only true vacuum is the one at $k = 0$, see Fig. 4.2. As we discussed in Sec. 4.1.1 this leads to the confinement of kinks.

It turns out that there are two mechanisms responsible for the vacuum energy splitting. One is due to the effective potential (4.3.3) and dominates at small $\tilde{\mu}$. The other one is typical for the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model, see Sec. 4.1.1. It is due to the constant electric field of kinks interpolating between neighboring quasivacua and dominates at large $\tilde{\mu}$. We will now study the former mechanism, while the latter one will be considered in the next subsection.

Energy splittings in the small $\tilde{\mu}$ limit can be derived using the small $\lambda(\mu)$ expansion of the effective potential (4.3.3):

$$\mathcal{V}_{\text{eff}} = \mathcal{V}_{\text{SUSY}} + \delta\mathcal{V}, \quad (4.3.7)$$

where $\mathcal{V}_{\text{SUSY}}$ is the supersymmetric effective potential corresponding to $\lambda = 0$, while

$$\delta\mathcal{V} \approx \frac{N}{4\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \tau \cdot \lambda \ln \frac{m_G^2}{|\tau|^2} \quad (4.3.8)$$

is the $O(\lambda)$ deformation. We can immediately infer lifted vacuum energies by plugging unperturbed VEVs (4.3.4) into (4.3.8). As we already mentioned the ground state (true vacuum) is located at

$$\tau_0 = -\Lambda = \Lambda e^{i\pi}, \quad (4.3.9)$$

while the first quasivacuum is at

$$\tau_1 = -\Lambda \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \approx -\Lambda - \Lambda \frac{2\pi i}{N} + \Lambda \frac{2\pi^2}{N^2} \quad (4.3.10)$$

Plugging this into (4.3.8) we get for the vacuum splitting²

$$E_1 - E_0 = \frac{2\pi}{N} \lambda \Lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda} \quad (4.3.11)$$

This signifies that kinks interpolating between these vacua are now confined, as opposed to the supersymmetric case.

²Formula (4.3.11) has a correction coming from the energy-momentum trace anomaly, but this correction is of the next order in the small parameter $\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{M_{\text{UV}}}{\Lambda}$.

Corrections to the VEVs

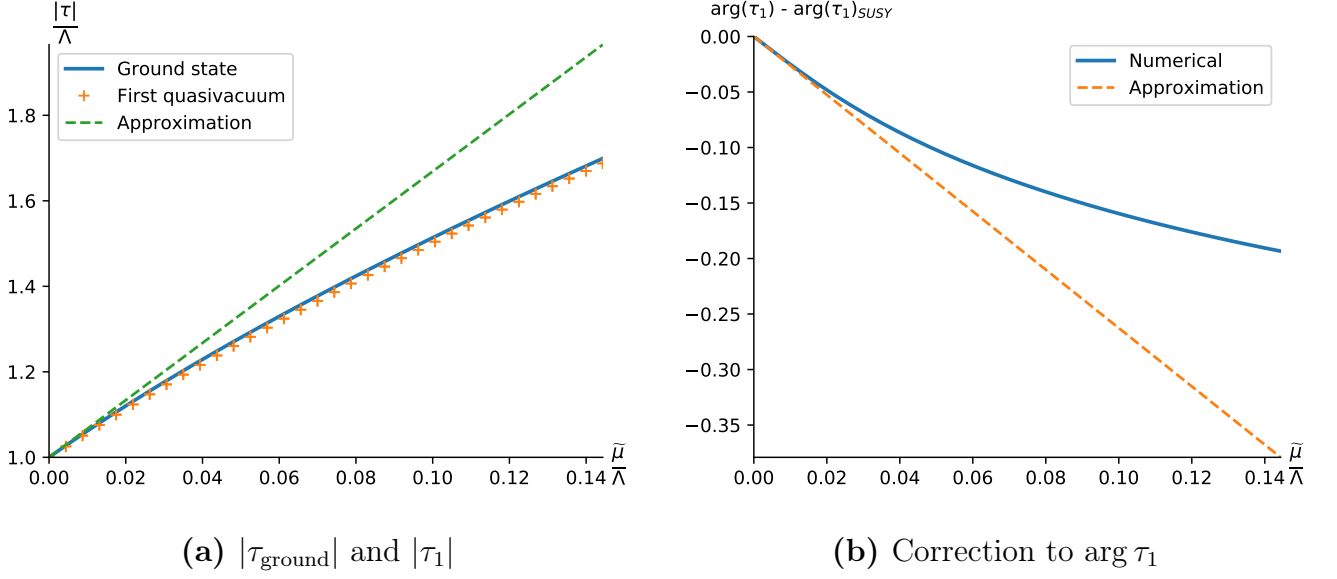


Figure 4.3: Numerical results for the minima τ_{ground} and τ_1 obtained by directly minimizing (4.3.3). On the figure a, the green dashed line shows the approximate formula (4.3.17), the solid blue line is the numerical values of $|\tau_{\text{ground}}|$, while $|\tau_1|$ is shown by red “+”. Figure b shows the approximate correction to $\arg \tau_1$ ((4.3.18), the last term) and the numerical results for this quantity.

Now let us derive corrections to the unperturbed VEVs (4.3.4). Minimizing the potential (4.3.3) we get:

$$2\beta_{\text{ren}} = \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} = 0 \Rightarrow iD + |\tau|^2 = \Lambda^2 \quad (4.3.12)$$

$$|\tau| \ln \frac{|\tau - \lambda(\tilde{\mu})|^2}{\Lambda^2} + \cos(\arg \tau) \lambda(\tilde{\mu}) \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} = 0 \quad (4.3.13)$$

$$- \sin(\arg \tau) \lambda |\tau| \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} + \frac{m_{\arg \tau}^2}{2} (\arg \tau - \arg \tau_k^{\text{SUSY}}) = 0 \quad (4.3.14)$$

The approximate solution in the limit of small $\tilde{\mu}$ is given by

$$|\tau| \approx \Lambda - \cos(\arg \tau_k^{\text{SUSY}}) \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.15)$$

$$\arg \tau \approx \arg \tau_k^{\text{SUSY}} + \sin(\arg \tau_k^{\text{SUSY}}) \frac{2\lambda\Lambda}{m_{\arg \tau}^2} \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.16)$$

In particular, for the $\tau_0 = -\Lambda$ we get the corrected value

$$\tau_{\text{ground}} \approx -\Lambda - \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.17)$$

while for the first quasivacuum (4.3.10)

$$\begin{aligned} |\tau_1| &\approx |\tau_{\text{ground}}| \approx \Lambda + \frac{1}{2}\lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \\ \arg \tau_1 &\approx \underbrace{\left(\pi + \frac{2\pi}{N}\right)}_{\text{unperturbed}} - \frac{2\pi}{N} \frac{\lambda}{2\Lambda} \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

where we used (4.3.6) for the non-perturbed mass of σ . These results agree with numerical calculations, see Fig. 4.3.

Note that when

$$\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} = 1 \quad (4.3.19)$$

we have in our approximation $\arg \tau_1 = \tau_{\text{ground}} = \pi$, and the quasivacuum at τ_1 effectively disappears. This signifies that around the point (4.3.19) a phase transition might take place. This will turn out to be true, see Sec. 4.3.3 below.

The quasivacuum with the highest energy is located at

$$\tau_{\text{high}} \approx \Lambda - \frac{1}{2}\lambda \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2} \quad (4.3.20)$$

Further analysis of the equation (4.3.13) shows that this solution disappears at

$$\lambda = \frac{2\Lambda}{e \ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}} \quad (4.3.21)$$

which is consistent with (4.3.22). This suggests that around the critical value of the deformation

$$\lambda_{\text{crit}} \sim \frac{\Lambda}{\ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}} \quad (4.3.22)$$

all quasivacua have decayed (cf. (4.3.19)).

4.3.2 Effective action

As we already mentioned there are two mechanisms of the energy splitting of quasivacua at non-zero $\tilde{\mu}$. Both lead to the confinement of kinks. The first one is due to $\tilde{\mu}$ -corrections present in the effective potential (4.3.3) These corrections lift σ -quasivacua and lead to the splitting described by Eq. (4.3.11). The second mechanism is due to the constant electric field of kinks interpolating between quasivacua. The photon A_μ becomes dynamical on the quantum level [26]. We will

see below that, as we turn on the deformation parameter $\tilde{\mu}$, the photon acquires a massless component. A linear Coulomb potential is generated, but the vacuum energy splitting due to the electrical field is much smaller than the one in (4.3.11). At sufficiently large $\tilde{\mu}$ all $N - 1$ σ -quasivacua decay, and the splitting is saturated by the electric field only. We identify this change of the regime and associated discontinuity in (the derivative of) $(E_1 - E_0)$ as a phase transition.

Derivation of the effective action

Consider now the effective action of our $\tilde{\mu}$ -deformed $\mathbb{CP}(N - 1)$ model (4.1.13) obtained by integrating out n^i and ξ^i fields in the large- N approximation. Relaxing the condition that σ and D are constant fields assumed in Sec. 4.2 we consider the one loop effective action as a functional of fields of the vector supermultiplet.

Considering the vicinity of the true vacuum where $\text{Im}\langle\sigma\rangle = 0$ we write down the bosonic part of the action in the form (Minkowski formulation³)

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Im}\sigma|^2 + \frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Re}\sigma|^2 - V(\sigma) - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \text{Im}\sigma F^* \right\}, \quad (4.3.23)$$

where F^* is the dual gauge field strength,

$$F^* = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.3.24)$$

This effective action was first presented for $\mathcal{N} = (2, 2)$ and $\mathcal{N} = (0, 2)$ supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ models in [24]. Here we generalize it for the $\tilde{\mu}$ -deformed $\mathbb{CP}(N - 1)$ model (4.1.13). The potential $V(\sigma)$ here can be obtained from (4.2.9) by eliminating D by virtue of its equation of motion.

Coefficients in front of A_μ and σ kinetic terms are finite after renormalization reflecting Witten's observation that these fields become physical [26]. The last term in (4.3.23) is $A_\mu - \sigma$ induced by the chiral anomaly. Because of this mixing, the would-be massless photon and the phase of σ acquire a mass (4.3.6) already in

³In this subsection we will use the Minkowski formulation with $g^{\mu\nu} = \text{diag}\{+, -\}$, and for the Levi-Civita symbol $\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{01} = +1$. See Appendix A for the notation and the relationship between the Euclidean and Minkowski formulations.

unperturbed theory at $\tilde{\mu} = 0$. This term is also present when we switch on the deformation.

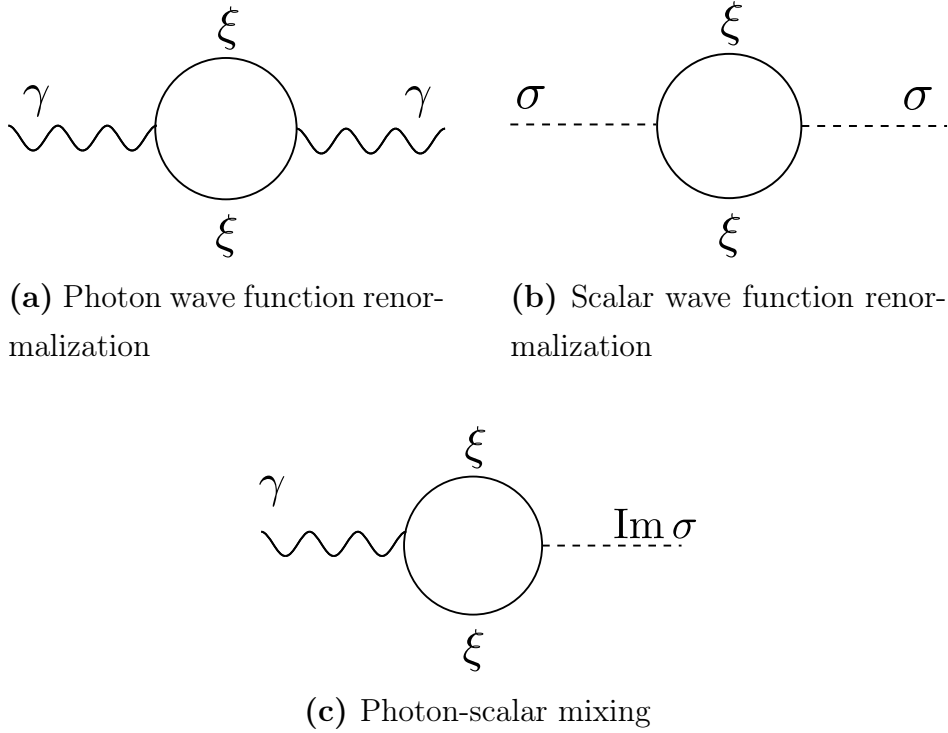


Figure 4.4: Contributions to the effective action

Coefficients in this effective action come from loops. We take the low-energy limit when the external momenta are small. There are several contributions. Photon wave function renormalization comes from the diagram on Fig. 4.4a and a similar graph with a bosonic loop. Wave function renormalizations for $\text{Re } \sigma$ and $\text{Im } \sigma$ come from the diagram on Fig. 4.4b and also similar graph with a bosonic loop. Finally, the mixing term is given by the diagram on Fig. 4.4c. For the mass distribution (4.1.3) and the vacuum with $\text{Im}\langle\sigma\rangle = 0$, the normalization factors are:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{M_{\xi_k}^2 + 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} + \frac{2}{3} \frac{(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_k)^2}{m_{n_k}^4} \right], \\
\frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3M_{\xi_k}^2 - 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} + \frac{2}{3} \frac{(\text{Im } m_k)^2}{m_{n_k}^4} \right], \\
\frac{1}{e_{\gamma}^2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{m_{n_k}^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{M_{\xi_k}^2} \right], \\
b_{\gamma, \text{Im } \sigma} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\tilde{\mu})}{M_{\xi_k}^2}.
\end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Here, $M_{\xi_k}^2$ and $m_{n_k}^2$ are the masses of the ξ_k and n_k fields respectively:

$$\begin{aligned} M_{\xi_k}^2 &= |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\tilde{\mu})|^2 \\ m_{n_k}^2 &= i\langle D\rangle + v(\tilde{\mu})\Delta m_k + |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k|^2 \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

We present details of this calculation in Appendix C.

Next we diagonalize the photon- σ mass matrix in (4.3.23), see the next subsection. As we already mentioned this diagonalization shows that the photon acquires a massless component as soon as we switch on $\tilde{\mu}$. This component is responsible for the presence of the constant electric field in quasivacua. This constant electric field gives rise to a second mechanism of quasivacua splitting, see (4.3.36). This effect is small at small $\tilde{\mu}$ but becomes dominant at larger $\tilde{\mu}$ above the phase transition point. This result can also be derived in a different way which we consider in the next subsection.

Photon mass

Here we diagonalize the photon- σ mass matrix in (4.3.23) to find the photon mass⁴. In order to do that, let us write down bare propagators for $\text{Im}\sigma$ and A_μ that follow immediately from (4.3.23) (in the Minkowski notation):

$$\begin{aligned} G_\gamma^0 &= -i e_\gamma^2 \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2} \\ G_{\text{Im}\sigma}^0 &= -\frac{i}{2} e_{\text{Im}\sigma}^2 \frac{1}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2} \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

where we use the Landay gauge, while $\delta m_{\text{Im}\sigma}^2$ is the contribution to the the mass of the $\text{Im}\sigma$ field coming from the potential $V(\sigma)$ in (4.3.23). In the vicinity of the true ground state (4.3.17) we have

$$\delta m_{\text{Im}\sigma}^2 \approx 4\lambda\Lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda}. \quad (4.3.28)$$

At large $\tilde{\mu}$, $\delta m_{\text{Im}\sigma}^2 \sim \lambda^2 \ln m_G/\Lambda$, see Sec. 4.3.4.

Consider the photon propagator. Iterating the scalar $\text{Im}\sigma$ insertions shown in

⁴Note that the mass generating mechanism here is not the Higgs mechanism. There is no massless Goldstone particle. Nevertheless, the theory is gauge invariant. See Appendix D for the explanation.

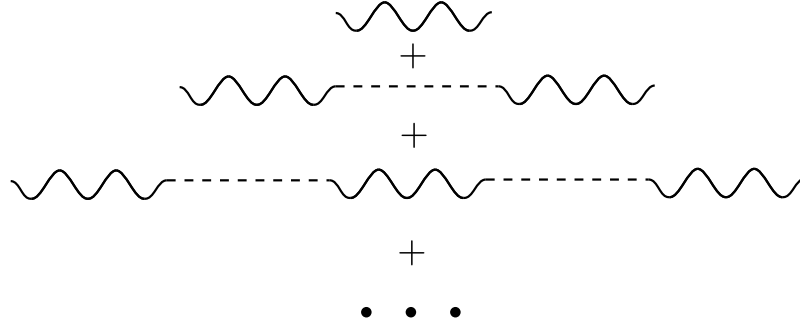


Figure 4.5: Contributions to the photon propagator

Fig. 4.5, we obtain the full photon propagator,

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_\gamma &= G_\gamma^0 \frac{1}{1 - \frac{e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2}} \\
&= -i e_\gamma^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \frac{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2}{k^2 \left(k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2 - e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2 \right)} \\
&= -i e_\gamma^2 \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \left(A \frac{1}{k^2} + (1 - A) \frac{1}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2 - e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.29}$$

where the coefficient

$$A = \frac{\delta m_{\text{Im}\sigma}^2}{\delta m_{\text{Im}\sigma}^2 + e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2} \tag{4.3.30}$$

increases from 0 to 1 as $\tilde{\mu}$ runs from zero to infinity. What we see here is that at non-zero $\tilde{\mu}$, the photon acquires a massless component. In the SUSY case (zero $\tilde{\mu}$) the coefficient A vanishes, and we have only the massive component. Note that the number of physical states do not change since the massless photon has no physical degrees of freedom in two dimensions. At large $\tilde{\mu}$ the massive component becomes heavy and decouples ($A \rightarrow 1$). We are left with the massless photon much in the same way as in non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N - 1)$ model.

If we do a similar calculation for the $\text{Im}\sigma$ propagator, we will get simply

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{\text{Im}\sigma} &= G_{\text{Im}\sigma}^0 \frac{1}{1 - \frac{e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2}} \\
&= -i e_{\text{Im}\sigma}^2 \frac{1}{k^2 - \delta m_{\text{Im}\sigma}^2 - e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2}
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

Just like in [26], we see that the would-be massless phase of the σ field acquires a mass

$$m_{\text{arg}\tau}^2 = \delta m_{\text{Im}\sigma}^2 + e_\gamma^2 e_{\text{Im}\sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im}\sigma}^2. \tag{4.3.32}$$

This effect is taken into account by the additional term (4.3.5) in the effective potential (4.3.3). At $\tilde{\mu} = 0$ $\delta m_{\text{Im}\sigma}^2 = 0$ and the mass of the phase of σ reduces to (4.3.6). Consider the leading correction at small λ . For the ground state (4.3.17) at $\Delta m = 0$ we have

$$\frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \approx \frac{N}{4\pi\Lambda^2} \left(1 - 2\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right), \quad \frac{1}{e_\gamma^2} \approx \frac{N}{4\pi\Lambda^2} \left(1 - \frac{4}{3}\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right),$$

$$b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \approx -\frac{N}{2\pi\Lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right),$$

and, therefore,

$$m_{\text{arg}\tau}^2 \approx 4\Lambda^2 \left(1 + \frac{7}{3}\frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right). \quad (4.3.33)$$

Let us look more closely at the photon propagator (4.3.29) in the small $\tilde{\mu}$ limit. We have

$$A \approx \frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{M}{\Lambda}, \quad (4.3.34)$$

and for the massless part of the photon propagator:

$$\widehat{G}_{\gamma, \text{massless}} = -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2} \frac{4\pi}{N} \lambda \Lambda \ln \frac{M}{\Lambda} \quad (4.3.35)$$

From this Green function we calculate the electric field produced by a kink with electric charge +1 and find for the vacuum energy splitting

$$E_1 - E_0 = \frac{1}{2e_\gamma^2} F_{01}^2 = \frac{2\pi}{N} \left(\lambda \ln \frac{M}{\Lambda} \right)^2 \quad (4.3.36)$$

Coulomb potential and vacuum energies

In this section we study the formation of a constant electric field in a quasivacuum generalizing a method developed by Witten in [26] for $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model.

Let us start with the effective action (4.3.23) taking into account the presence of the trial matter charges,

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \text{Im}\sigma F^* + j_\mu A^\mu \right\}, \quad (4.3.37)$$

Consider a stationary point-like kink at $x = x_0$ with electric charge +1 described by the current $j_\mu = (\delta(x - x_0), 0)$ and $F^* = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0$.

We have the equation of motion for the photon:

$$-\frac{1}{e_\gamma^2} \partial_x \mathcal{E} - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im} \sigma} \partial_x \text{Im} \sigma = -j_0, \quad (4.3.38)$$

where

$$\mathcal{E} = F_{01} \quad (4.3.39)$$

is the electric field strength. (See Appendix A for assistance.) Integrating over the spatial coordinate we obtain

$$\frac{1}{e_\gamma^2} (\mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(-\infty)) + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im} \sigma} (\text{Im} \sigma(\infty) - \text{Im} \sigma(-\infty)) = 1 \quad (4.3.40)$$

In the supersymmetric case $\tilde{\mu} = 0$ the photon is massive, so there is no constant electric field, $\mathcal{E}(\infty) = \mathcal{E}(-\infty) = 0$. Therefore we have

$$\sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im} \sigma} (\text{Im} \sigma(\infty) - \text{Im} \sigma(-\infty)) = 1 \quad (4.3.41)$$

Since

$$b_{\gamma, \text{Im} \sigma} = \frac{1}{2\pi} \frac{N}{\Lambda}, \quad (4.3.42)$$

see Eq. (4.3.25) for $\tilde{\mu} = 0$ we get

$$\sqrt{2} (\text{Im} \sigma(\infty) - \text{Im} \sigma(-\infty)) = 2\pi \frac{\Lambda}{N} \quad (4.3.43)$$

which, if we set $\tau(-\infty) = -\Lambda$ for the true vacuum, is an approximation of

$$\tau(\infty) = -\Lambda e^{\frac{2\pi i}{N}} \quad (4.3.44)$$

for the value of σ VEV in the first quasivacuum, see (4.3.10). This result for the $\mathcal{N} = (2, 2)$ case has been derived long ago by Witten [26] showing the presence of N vacua and kinks interpolating between them.

Now, consider small deformations in the Eq. (4.3.40) for a kink interpolating between the ground state (4.3.17) at $x = -\infty$ and the first quasivacuum (4.3.18) at $x = +\infty$. Setting $\mathcal{E}(-\infty) = 0$ we get from (4.3.40)

$$\frac{1}{e_\gamma^2} \mathcal{E}(\infty) + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im} \sigma} (\text{Im} \sigma(\infty) - \pi) = 1 \quad (4.3.45)$$

Using (4.3.18) and (4.3.42) we obtain for the electric field strength

$$\mathcal{E}(\infty) = e_\gamma^2 \frac{\lambda}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda}. \quad (4.3.46)$$

We see that the kink produces a constant electric field now. This gives the contribution to the energy density splitting between the first quasivacuum and the true vacuum

$$(E_1 - E_0)|_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2e_\gamma^2} \mathcal{E}^2 = \frac{2\pi}{N} \left(\lambda \ln \frac{m_G}{\Lambda} \right)^2 \quad (4.3.47)$$

This coincides with the result (4.3.36) obtained from the photon- σ diagonalization. This contribution is small compared to the σ -splitting given by (4.3.11) at small $\tilde{\mu}$.

4.3.3 Second order phase transition

As we learned so far, the vacuum energy (or, rather, energy splitting between the ground state and the first quasivacuum) has two contributions, which depend on the parameter

$$\omega = \frac{\lambda(\tilde{\mu})}{\Lambda} \ln \frac{m_G}{\Lambda} \quad (4.3.48)$$

The first contribution is the splitting of different quasiminima σ_i of the effective potential (4.3.11). When we turn on ω (i.e. supersymmetry breaking parameter $\tilde{\mu}$), this contribution at first grows linearly with ω , and then drops to zero when the σ -quasiminima disappear.

The second contribution comes from the electric field of charged kinks interpolating between the quasivacua, see (4.3.36) and (4.3.47). This contribution at first grows as ω^2 , and at the point when the first σ quasivacuum disappears, electric field jumps up⁵ to saturate (4.3.40).

The jumping point is the same for these two contributions and it is where a phase transition occurs. Corresponding critical value is $\omega_c \sim 1$, i.e. (cf. (4.3.22) and (4.3.19))

$$\lambda_{\text{crit}} = \lambda(\tilde{\mu}_{\text{crit}}) \sim \frac{\Lambda}{\ln \frac{m_G^2}{\Lambda^2}}. \quad (4.3.49)$$

Full vacuum energy is the sum of these two contributions, and on general grounds we expect that it does not jump. Rather, its first derivative is discontinuous, and the phase transition must be of the second order. Numerical calculations confirm this, see Fig. 4.6. At the point where the quasivacuum disappears, the two contributions to the vacuum energy jump, and the magnitudes are just right for the total sum to

⁵This jumping is not seen from the propagator considerations (4.3.36) since it holds only perturbatively near the true vacuum and does not take into account the presence of σ -quasivacua.

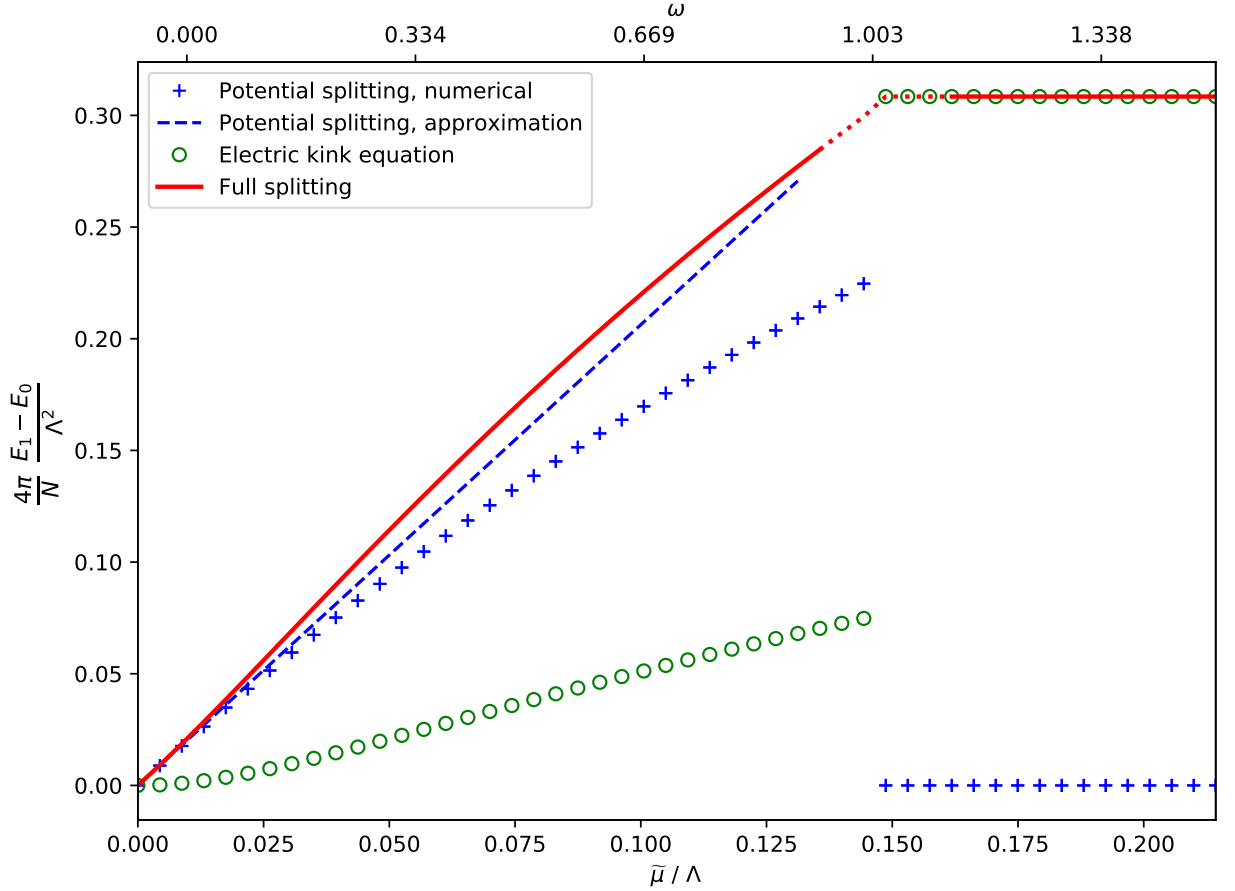


Figure 4.6: Different contributions to the vacuum energy. Vertical axis is labeled by the rescaled energy splitting $E_1 - E_0$. Values of the deformation parameter $\tilde{\mu}$ are on the lower horizontal axis (in the units of Λ), while the upper horizontal axis represents the parameter ω (4.3.48). Green circles denote the contribution from the electric field (solution of (4.3.40), given by (4.3.47) below the phase transition point), “+” signs represent the splitting from the potential (4.3.3) (the blue dashed line is the approximation (4.3.11)). The solid red line is the sum of these two contributions. Phase transition occurs at $\omega \approx 1$ where the full energy displays a discontinuity of the first derivative. Our model does not allow us to obtain exact results in the vicinity of the phase transition point, and we have to extrapolate from the left and from the right (red dotted line continuing the solid red curve).

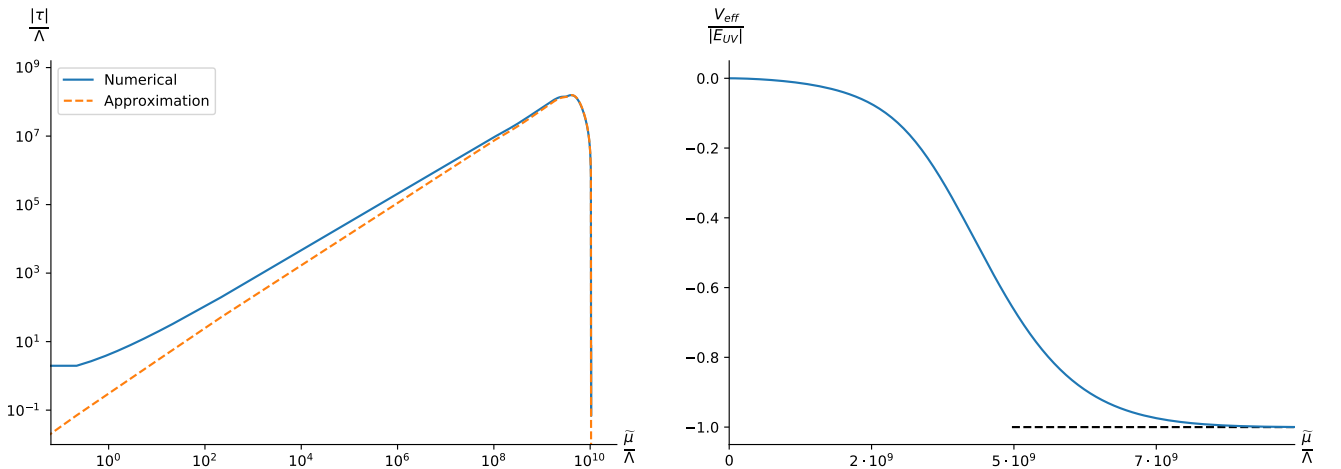
stay continuous. However, we must point out that we do not have enough accuracy for the detailed study of the vicinity of the transition point. The point is that we can trust our formula for the $\arg \tau$ potential (4.3.5) only in the vicinities of the minima (4.3.4), and we do not know the exact form of this potential in regions between any of two adjacent minima.

At small deformations, the main contribution to the vacuum energy is σ -quasivacua splitting (4.3.11). After the transition point, vacuum energy is determi-

ned solely by the kink electric field. As we reviewed in Sec. 4.1.1 it is the electric field that is responsible for the quasivacuum energy splittings in the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model. This is consistent with our results, since at large $\tilde{\mu}$ above the phase transition point our model flows to the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model.

To conclude this section we note that parameter ω relevant for the quasivacua splitting is enhanced by the large logarithm $\ln m_G/\Lambda \gg 1$. Hence the phase transition point occurs at $\tilde{\mu}_c \sim \lambda_c$ given by (4.3.49), much smaller than $\tilde{\mu} \sim \Lambda$. These are even smaller values of $\tilde{\mu}$ as compared to m_G since we assume $m_G \gg \Lambda$ in order to keep the bulk theory at weak coupling. At these small values of $\tilde{\mu}$ we are way below the scale of adjoint matter decoupling in the bulk theory which occurs at $\tilde{\mu} \gg m_G$. In particular, the scale Λ of the world sheet theory is close to Λ_{4d} rather than to its large- $\tilde{\mu}$ asymptotic values (4.1.27).

4.3.4 Large deformations



(a) VEV of τ as a function of $\tilde{\mu}$, double log scale. (b) Vacuum energy as a function of $\tilde{\mu}$, log scale

Figure 4.7: Numerical results for the VEV of τ and vacuum energy at large deformations $\lambda \gg \Lambda_{2d}$. On the figure a we have VEV of τ . Dashed line shows the approximate solution (4.3.51), while the solid line is the result of numerics. One can see that τ indeed vanishes at $\lambda(\tilde{\mu}) = m_G$. On b we have E_{vac} . Dashed line shows its asymptotic value E_{UV} given by (4.3.52). In the numerical procedure we had set $m_G/\Lambda = 10^{10}$

As we increase the deformation parameter $\tilde{\mu}$, the fermion mass λ approaches the UV cutoff scale m_G and we can expect that the fermions become very heavy and decouple, effectively taking no part in the dynamics. Therefore, our theory should

become the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.1). VEV of τ field should become zero.

We can check this directly using our effective potential (4.3.3). Indeed, assume that $\tau \ll \lambda \sim m_G$. Then we can expand (4.3.3) to obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{eff}} = & \frac{N}{4\pi} iD \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{N}{4\pi} |\tau|^2 \left[1 - \ln \frac{iD + |\tau|^2}{m_G^2} \right] \\ & - \frac{N}{4\pi} \cdot 2 \operatorname{Re} \tau \cdot \lambda \ln \frac{\lambda^2}{m_G^2} - \frac{N}{4\pi} \lambda^2 \left(1 - \ln \frac{\lambda^2}{m_G^2} \right) \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

Minimizing this potential we obtain

$$\tau \approx -\lambda \frac{\ln(m_G/\lambda)}{\ln(m_G/\Lambda)}. \quad (4.3.51)$$

This formula turns out to be pretty good compared to the exact numerical solution, see Fig. 4.7a. As λ approaches the UV cutoff scale m_G , the VEV of τ vanishes. The first term in (4.3.50) reduces to the effective potential for the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model, while the last term gives a vacuum energy shift. At $\lambda = m_G$, the vacuum energy is

$$E_{\text{vac, UV}} = \frac{N}{4\pi} (\Lambda^2 - m_G^2). \quad (4.3.52)$$

This is in agreement with the Appelquist-Carazzone decoupling theorem [71], which states that the effect of heavy fields is limited to the renormalization of physical quantities. Note that since the supersymmetry is explicitly broken in the world sheet theory by fermion masses the vacuum energy is not positively defined.

The vacuum energy above is a quantum correction to the classical expression for the non-Abelian string tension in the bulk theory. The latter was derived in Chapter 2, see (2.3.17). Together with (4.3.52) it can be written as

$$T = \frac{2\pi}{\ln \frac{m_G^2}{m^2}} \frac{m_G^2}{g^2} + \frac{N}{4\pi} (\Lambda^2 - m_G^2), \quad (4.3.53)$$

We see that the second term here is just an $O(g^2)$ correction to the classical formula.

At intermediate values of λ we were able to study this model only numerically. The results are presented on Fig. (4.7). They show the dependence of $\langle \sigma \rangle$ and E_{vac} on the heavy fermion mass λ . One can see that indeed the VEV of τ vanishes at very large λ . Note that we will have $\langle iD \rangle < 0$ in a wide range of λ , but this does not lead to an instability because, according to (4.3.12), the mass of the n field is always positive.

4.3.5 Split mass case

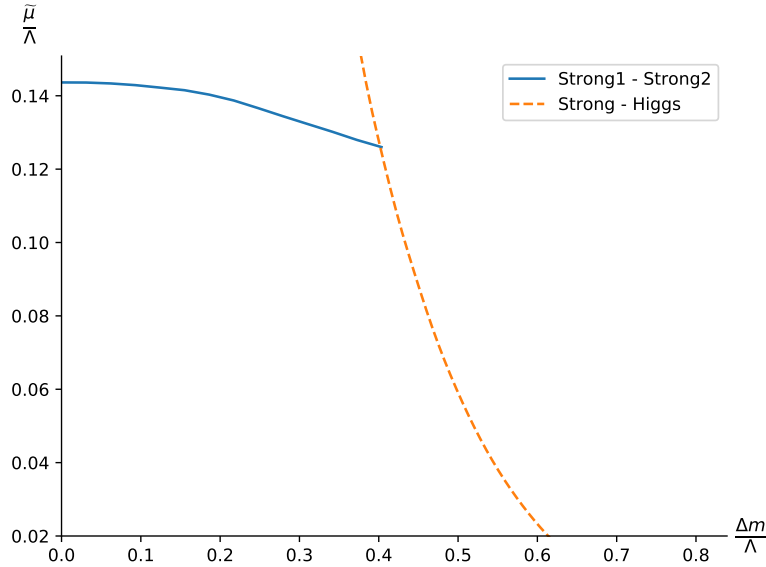


Figure 4.8: Phase transition line between two strong coupling regimes (shown in solid blue). The dashed line is the phase transition line between the Strong coupling and Higgs regimes, see Sec. 4.4.2. This plot is a result of numerical calculations for $N = 16$.

The results obtained in the previous section can be generalized to the case $\Delta m_{i0} \neq 0$. Consider the masses on a circle (4.1.3), with the radius Δm as the mass scale of our model.

If we fix some Δm and start increasing $\tilde{\mu}$ (and, therefore, $\lambda(\tilde{\mu})$), our model exhibits similar behavior as in the case $\Delta m = 0$. At $\tilde{\mu} = 0$ the supersymmetry is unbroken, and there are N degenerate vacua. When we switch on the deformation, the degeneracy is lifted, and eventually all lifted quasivacua decay, which signifies a phase transition. The set of the phase transition points represents a curve on the $(\mu, \Delta m)$ plane, see Fig. 4.8

Qualitatively, we see nothing new. However, when Δm is large enough, the theory goes through the phase transition from the strong coupling phase into a weak coupling phase, so-called ‘‘Higgs’’ phase. This will be the subject of the next section.

4.4 Higgs regime

When the mass difference Δm exceeds some critical value, the theory appears in the Higgs phase. This phase is characterized by a nonzero VEV of n . At very weak

coupling, we can use the classical Lagrangian (4.1.13) to find the vacuum solution,

$$n_0^2 = 2\beta, \quad \sqrt{2}\sigma = m_0, \quad iD = 0. \quad (4.4.1)$$

The vacuum energy is classically zero.

In the supersymmetric case $\tilde{\mu} = 0$ the solution for σ is exact at large N . Moreover, at very large Δm the coupling constant $1/\beta$ is small (frozen at the scale Δm) and quantum corrections to the classical vacuum solution (4.4.1) are small.

However, at nonzero $\tilde{\mu}$ and for $\Delta m \gtrsim \Lambda$, things become more complicated, as we can no longer rely on the classical equations. Generally speaking, solution (4.4.1) receives $\Lambda/\Delta m$ and $\tilde{\mu}/\Lambda$ corrections. We have to work with the quantum equations (4.2.12) - (4.2.14), and most of the results presented in this section were obtained from numerical calculations⁶.

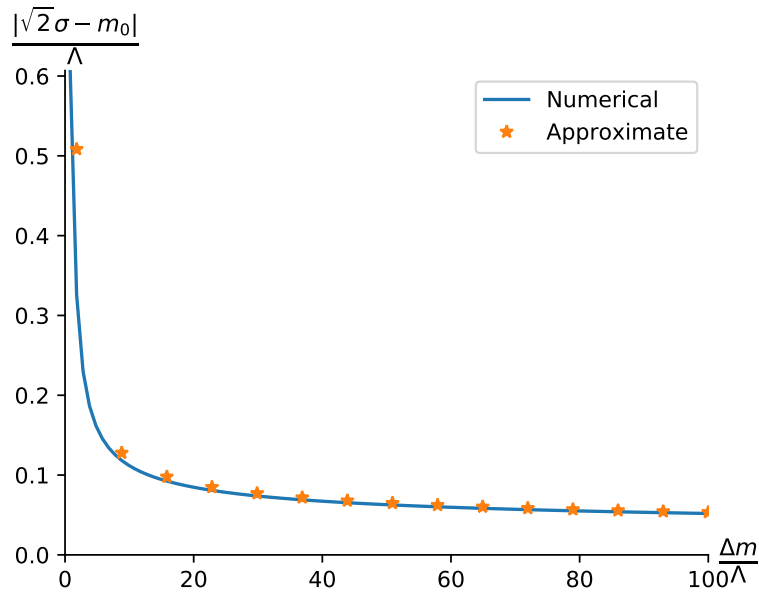


Figure 4.9: VEV of $\tau = \sqrt{2}\sigma - m_0$ as a function of Δm . Solid line is the exact result of numerical calculation, while stars represent the approximate formula (4.4.2). Here $\tilde{\mu} = \Lambda$. In numerical calculations we used $N = 16$. One can see that indeed, as Δm grows, the VEV of $\sqrt{2}\sigma$ goes to its classical value m_0 .

First of all, we wish to check that the one loop potential that we derived (4.2.9) is compatible with the classical limit. Consider the limit of large $\Delta m \gg \Lambda$ with

⁶In order to do the computations required the author of this thesis had to develop some numerical routines which are more robust than the standard ones. Some of them can now be found at <https://github.com/ievlev9292/num-robust>.

some $\tilde{\mu}$ fixed. We can expand the vacuum equations (4.2.12) - (4.2.14) in powers of $\Lambda/\Delta m$ and easily derive an approximate solution for the ground state VEV

$$\sqrt{2}\sigma - m_0 \approx -\lambda(\tilde{\mu}) \frac{\ln \frac{m_G}{\Delta m}}{\ln \frac{\Delta m}{\Lambda}}. \quad (4.4.2)$$

Fig. 4.9 presents our results for the VEV of σ . One can see that the formula (4.4.2) gives very good approximation (see also Fig. 4.11a). At large Δm we indeed have $\sqrt{2}\sigma \approx m_0$.

4.4.1 Quasivacua

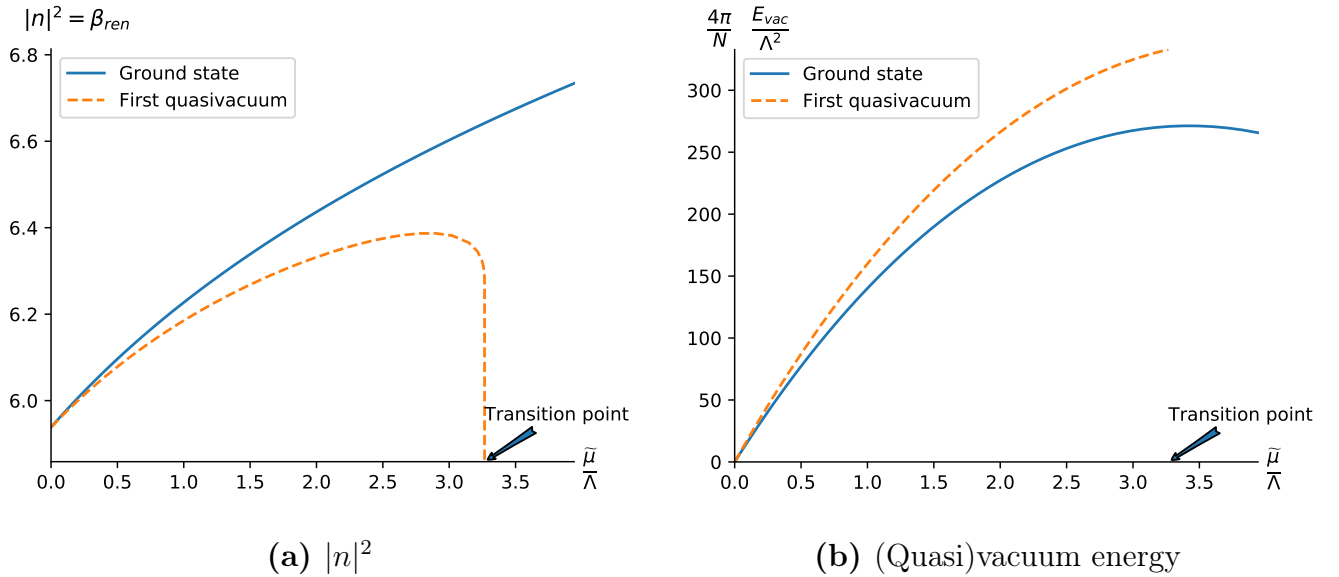


Figure 4.10: Example of Kinks-NoKinks phase transition for $\Delta m/\Lambda = 10$. Blue solid line refers to the true ground state $i_0 = 0$, orange dashed line represents the first quasivacuum $i_0 = 1$. Value of the deformation parameter $\tilde{\mu}$ is on the horizontal axis (in the units of Λ), the phase transition point is indicated by an arrow. Both figures are the result of numerical calculations at $\Delta m/\Lambda = 10$, $N = 16$

Solution (4.4.1) is just one of the possible vacuum states in the Higgs phase. In the supersymmetric case $\tilde{\mu} = 0$ there are N degenerate vacua as dictated by Witten index. In [69] it was shown that the theory at large Δm is in the Higgs phase where different components of the N -plet n_i develop a VEV. These vacua are characterized by

$$\langle \sqrt{2}\sigma \rangle = m_{i_0}, \quad \langle |n_{i_0}|^2 \rangle = 2\beta, \quad i_0 = 0, \dots, N-1 \quad (4.4.3)$$

Moreover, there are kinks interpolating between these vacua.

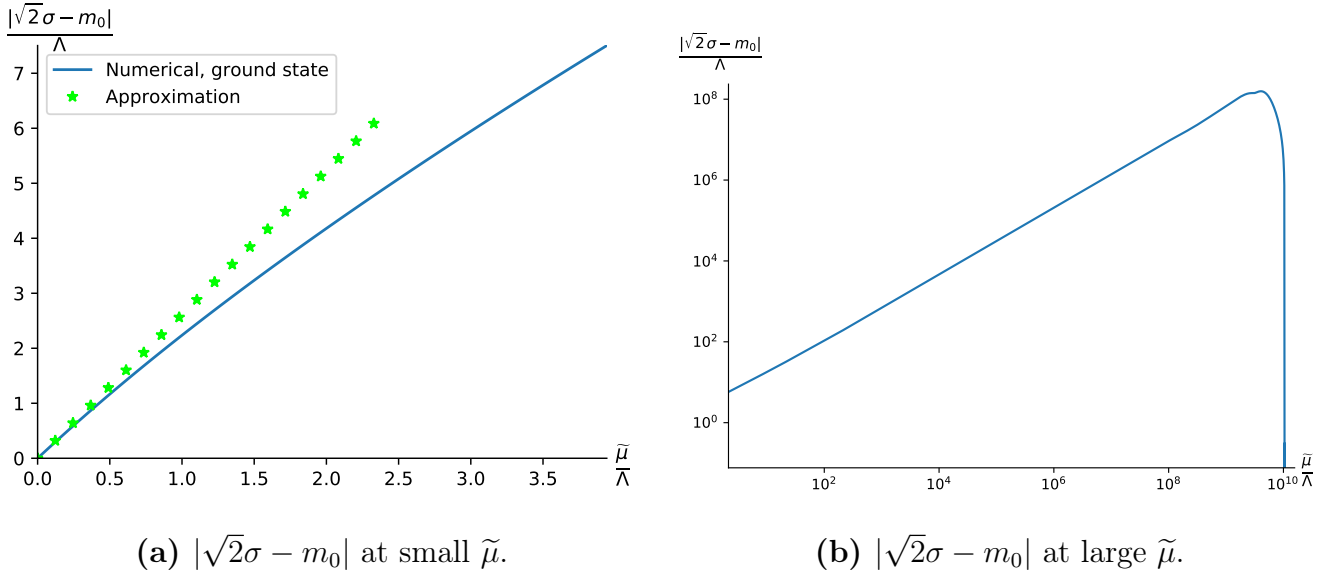


Figure 4.11: VEV of $\sqrt{2}\sigma - m_0$ at different scales. Figure a shows small $\tilde{\mu}$. Solid blue line is the result of numerical calculations, green stars show the approximate formula (4.4.2). Figure b shows large- $\tilde{\mu}$ behavior (in double log scale). One can see that as $\tilde{\mu} \rightarrow m_G$ we indeed have $\sqrt{2}\langle\sigma\rangle \rightarrow m_0$. The plots were made for fixed $\Delta m/\Lambda = 10$, $m_G/\Lambda = 10^{10}$, $N = 16$

As we switch on the deformation parameter $\tilde{\mu}$, these vacua split, and at small $\tilde{\mu}$ we have one true ground state (4.4.1) and $N - 1$ quasivacua. Let us first consider this picture from the classical Lagrangian (4.1.13). The classical potential is

$$\mathcal{V}_{\text{cl}}(n, \sigma, D) = i D (\bar{n}_i n^i - 2\beta) + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i0} |n^i|^2 \quad (4.4.4)$$

Let us derive the mass spectrum in the vicinity of a vacuum $\sqrt{2}\sigma = m_{i_0}$ for some i_0 . Then n^i , $i \neq i_0$ are small, while

$$n_{i_0} = \sqrt{2\beta} + \delta n_{i_0} \quad (4.4.5)$$

From the D -term condition

$$\delta n_{i_0} \approx -\frac{1}{2 \cdot 2\beta} \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 \quad (4.4.6)$$

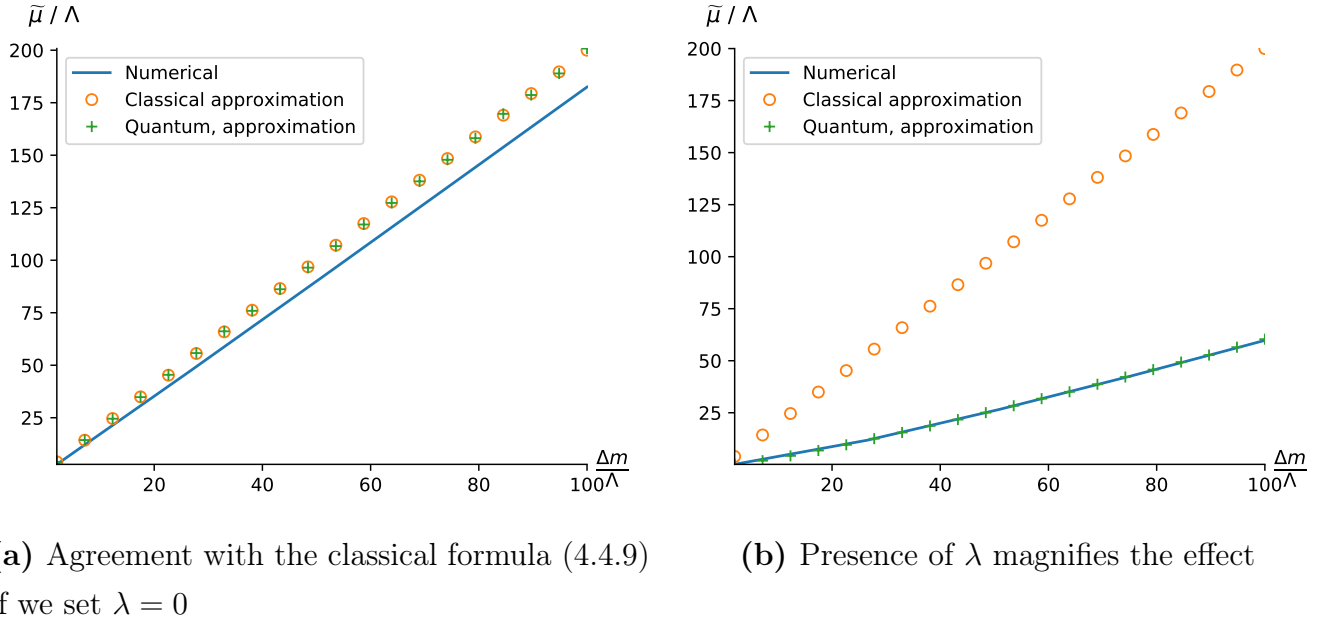


Figure 4.12: Kinks-NoKinks phase transition line. Δm on the horizontal axis, $\tilde{\mu}$ on the vertical axis. Solid blue line is the result of numerical calculation of the curve where all quasivacua have decayed leaving single true ground state. Orange circles represent the classical formula (4.4.9), green “+” are the quantum approximation (4.4.11). Figure a shows that if we set $\tilde{\lambda}_0 = 0$ we indeed get good agreement with the classical formula (4.4.9). However, the real scenario (figure b) is better described by formula (4.4.11)

and the potential (4.4.4) becomes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{\text{cl}} &\approx \sum_{i \neq i_0} |m_i - m_{i_0}|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_{i \neq i_0} \text{Re}(m_i - m_0) |n^i|^2 \\
 &\quad - v(\mu) \text{Re}(m_{i_0} - m_0) \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 \\
 &= \sum_{i \neq i_0} |n^i|^2 [|m_i - m_{i_0}|^2 + v(\mu) \text{Re}(m_i - m_{i_0})]
 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

so that the mass of the n^i particle is

$$M_i^2 = |m_i - m_{i_0}|^2 + v(\mu) \text{Re}(m_i - m_{i_0}) \tag{4.4.8}$$

If M_i^2 were to turn negative for some i , this would signify that the vacuum under consideration is unstable. This happens for all $i_0 \neq 0$ if the deformation is large enough because there are always some i with $\text{Re}(m_i - m_{i_0}) < 0$.

To be more concrete, consider our choice of the masses (4.1.3). Then for the vacuum $i_0 = 0$ we have $\text{Re}(m_i - m_0) > 0$ for all $i \neq 0$, and this vacuum is stable. However, the vacua $0 < i_0 < N/2$ can be shown to become unstable when the

deformation parameter hits the critical value

$$v(\mu_{\text{crit},i_0}) = 2\Delta m \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi(i_0-1)}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi i_0}{N}\right)} \approx \frac{4\pi}{N} \frac{\Delta m}{\sin\left(\frac{2\pi i_0}{N}\right)} \quad (4.4.9)$$

The last step is the large N approximation. Similar statement holds for the quasivacua $N/2 < i_0 < N$, while the quasivacuum number $i_0 = N/2$ (for even N) decays when $v(\mu_{\text{crit},N/2}) = 2\Delta m$. When $\tilde{\mu}$ is above this critical value, the theory has unique vacuum, and there are no kinks left.

These quasivacua are seen from the one loop potential as well. Following [69], we can study these quasivacua as follows. Recall that deriving the effective potential (4.2.9) we assumed that $n \equiv n_0$ can develop a VEV. Now to study quasivacua we assume that n_{i_0} is non-zero and integrate out the other components of n^i . Numerical calculation show that the resulting effective potential has a minimum for small deformations, but this minimum fades away at large $\tilde{\mu}$, see Fig. 4.10. On the plot 4.10a, this corresponds to the fact that $|n|^2$ rapidly drops near the phase transition point. Fig. 4.10b shows that the quasivacua are degenerate when supersymmetry is unbroken, and that the quasivacuum energy is indeed higher than that of the true ground state.

Figure 4.12 shows the phase transition curve. One can see that the classical formula (4.4.9) is valid only in if we set $\lambda = 0$ in (4.1.13), but it is completely inadequate when the fermions gain extra mass. As we see from Fig. 4.12b massive fermions magnify the effect.

Let us derive better theoretical formula for the phase transition curve. Consider, for example, first quasivacuum $i_0 = 1$. Then in the expression for β_{ren} (4.2.12) we will have $\Delta m_{i_1} = m_i - m_1$ instead of Δm_{i_0} . Then $\text{Re } \Delta m_{01} < 0$, and for the phase transition point we can take roughly the point when $\beta_{\text{ren}} \rightarrow -\infty$, i.e.

$$iD + v(\tilde{\mu}) \text{Re } \Delta m_{01} + |\sqrt{2}\sigma - m_0|^2 = 0. \quad (4.4.10)$$

Using (4.1.23), (4.1.24), (4.4.2) and an analog of (4.2.13) one can show that the phase transition occurs at the point

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} \approx \frac{2\Delta m}{1 + \tilde{\lambda}_0 \frac{\ln m_G/\Delta m}{\ln \Delta m/\Lambda}}. \quad (4.4.11)$$

At very large values of $\tilde{\mu}$ all but one vacua have decayed, and the world sheet theory flows to the non-supersymmetric model. In this limit the VEV of $\sqrt{2}\sigma$ is

again tends to m_0 . Indeed, at large $\tilde{\mu}$ we can solve the vacuum equations (4.2.12) - (4.2.14) approximately, and using the expression for Λ (4.1.27), we find that

$$\sqrt{2}\sigma - m_0 \sim \frac{\Delta m m_G^2}{\tilde{\mu}^2} \ln \frac{\tilde{\mu}}{\Delta m} \ln \frac{\tilde{\mu}}{m_G} \quad (4.4.12)$$

which vanishes at large values of $\tilde{\mu}$. This is supported by numerical calculations, see Fig. 4.11b.

4.4.2 Strong - Higgs phase transition

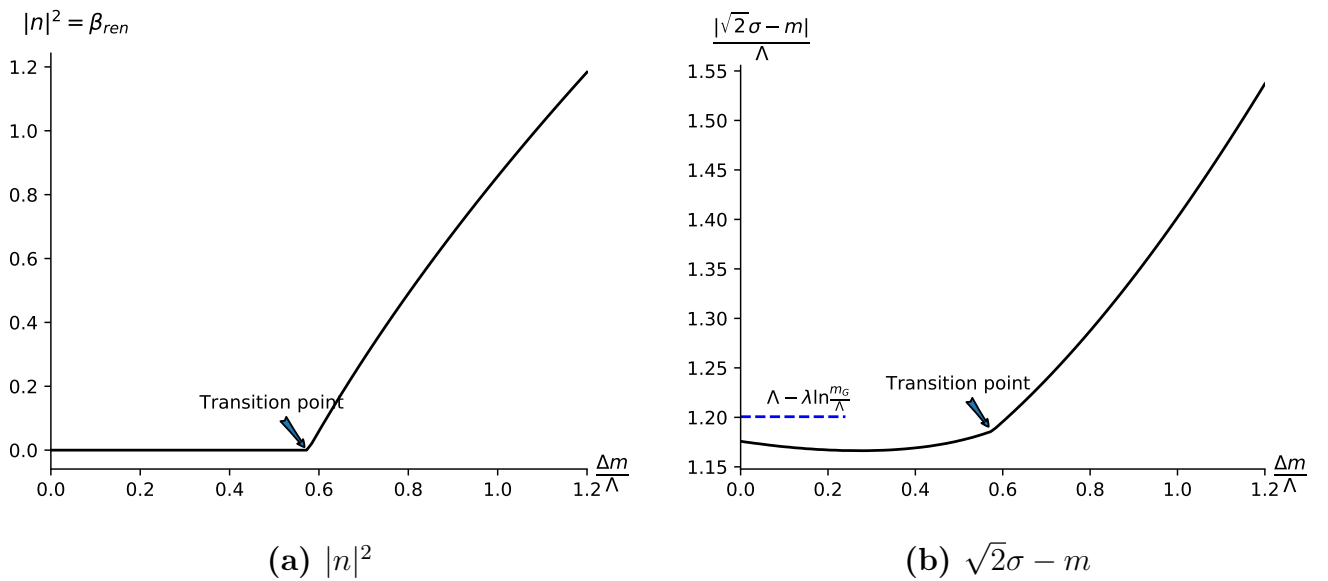


Figure 4.13: Strong - Higgs phase transition: VEVs. The curves show an example of the phase transition for fixed $\tilde{\mu}/\Lambda = 0.03$, $N = 16$. Mass scale Δm is on the horizontal axis. Location of the phase transition point is indicated with an arrow. On the figure b, the position approximate strong coupling VEV (4.3.17) is signified on the vertical axis by a blue dashed line. One can see that the character of the phase transition is qualitatively the same as in the pure non-supersymmetric (4.1.1) and supersymmetric (4.1.7) models, see [64, 69].

It was found in [64, 69] that for the non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.1) and for the supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.7) a phase transition between strong coupling and Higgs phases occurs at the point $\Delta m = \Lambda$. At large Δm the theory is weakly coupled and in the Higgs phase, while at small Δm we have a strong coupling phase. We expect similar behavior in our deformed model (4.1.13).

Following [64, 69] we identify the Higgs-strong coupling phase transition with a curve where $|n_0^2| = 2\beta_{ren}$ turn negative. Thus we are looking for the solutions of the

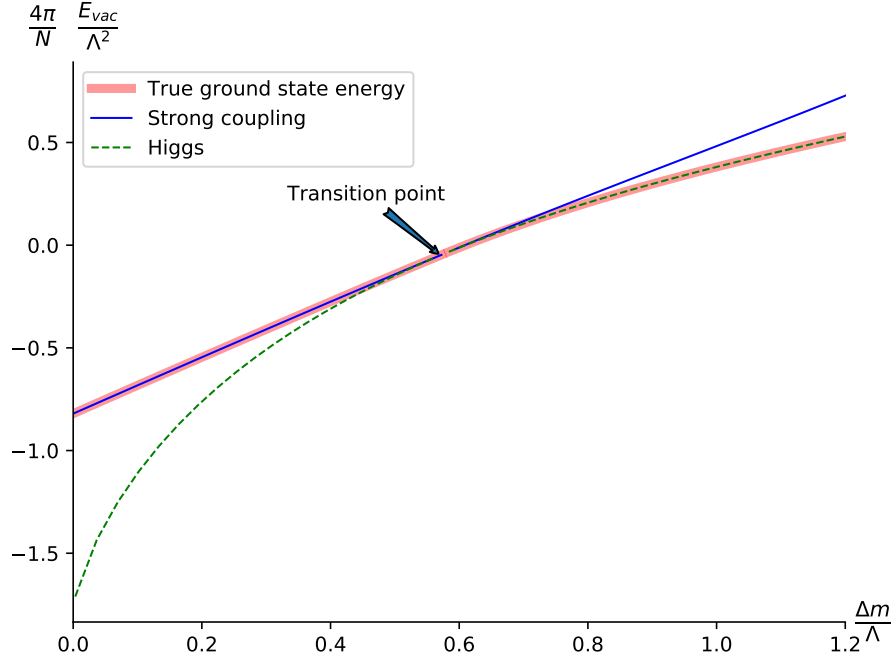


Figure 4.14: Strong-Higgs phase transition: energy. Red thick line is a numerical result for the ground state vacuum energy. Solid blue line to the right of the phase transition point is a numerical continuation of the strong coupling vacuum energy into the Higgs regime. Vice versa, dashed green line below the phase transition is a numerical continuation of the Higgs regime vacuum energy into the strong coupling (corresponds to the unphysical “state” with formally $|n|^2 < 0$). At the phase transition point these two curves touch, and $|n|^2 = 0$. This plot is qualitatively the same as in the pure non-supersymmetric (4.1.1) and supersymmetric (4.1.7) models, see [64, 69] In the numerical procedure we have set $\tilde{\mu}/\Lambda = 0.03$, $N = 16$

equation

$$\beta_{\text{ren}} = 0, \quad (4.4.13)$$

where β_{ren} is given by (4.2.12).

In $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric model at $\tilde{\mu} = 0$ a phase transition is at $\Delta m = \Lambda$ [69]. The case $\tilde{\mu} \neq 0$ is more complicated. We were not able to solve the vacuum equations (4.2.12) - (4.2.14) exactly, but an approximate calculation can be done in regions of small and very large $\tilde{\mu}$.

First consider the region $\tilde{\mu} \lesssim \Lambda$, and assume that the VEV of σ is real-valued (this assumption is correct for the true ground state anyway). Then, using (4.2.13) and the identity

$$\prod_{k=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi k}{N}\right) = \frac{N}{2^{N-1}}, \quad (4.4.14)$$

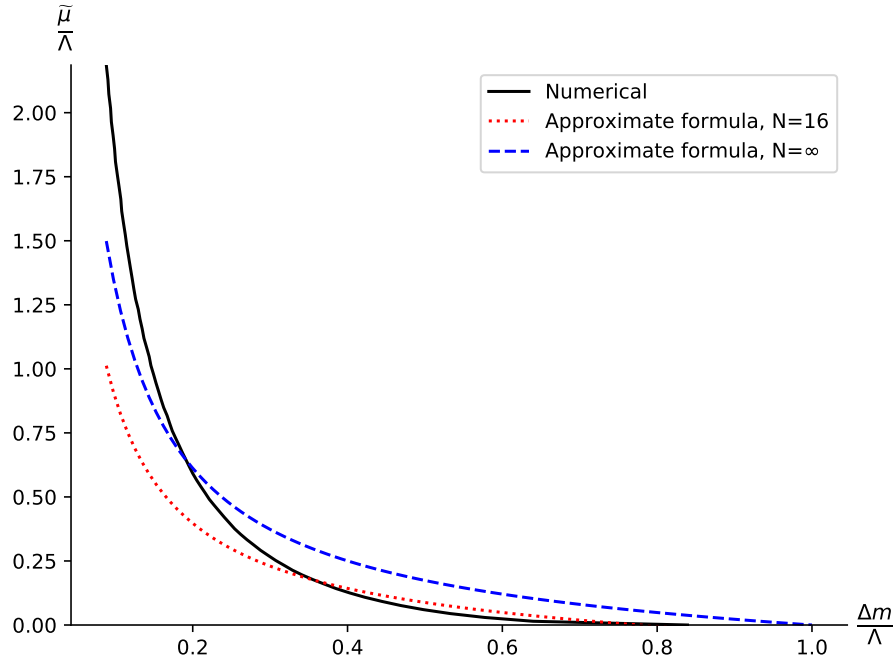


Figure 4.15: Strong-Higgs phase transition line. Δm on the horizontal axis, $\tilde{\mu}$ on the vertical axis. Solid black line is the numerical result for $N = 16$. Dotted red line is the $N = 16$ approximate formula (4.4.17). Dashed blue line is the $N \rightarrow \infty$ approximate formula (4.4.18)

we can rewrite (4.2.12) as

$$2\beta_{\text{ren}} = \frac{2(N-1)}{4\pi} \left(\ln \frac{\Delta m}{\Lambda} + \frac{1}{N-1} \ln N + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{v(\tilde{\mu}) - 2(\sqrt{2}\sigma - m_0)}{2\Delta m} \right) \right) \quad (4.4.15)$$

Equating this to zero yields

$$v(\tilde{\mu}) - 2(\sqrt{2}\sigma - m_0) = 2\Delta m \left(\left(\frac{\Lambda}{\Delta m} \right)^2 N^{-\frac{2}{N-1}} - 1 \right) \quad (4.4.16)$$

At small deformations we can use the approximation $v(\tilde{\mu}) \approx \tilde{\mu}$, see (4.1.23). Moreover, in the strong coupling phase at fixed $\tilde{\mu}$, the VEV of σ does not depend on Δm (this is exactly true in the supersymmetric and pure non-supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ models), and we can use $\Delta m = 0$ approximation (4.3.17) right up until the phase transition point. Then, from (4.4.16) we can actually derive the equation for the phase transition curve:

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \frac{2 \frac{\Lambda^2}{\Delta m} N^{-\frac{2}{N-1}} - \Lambda - \Delta m}{1 + 2 \tilde{\lambda}_0 \ln \frac{m_G}{\Lambda}}, \quad (4.4.17)$$

or, sending $N \rightarrow \infty$,

$$\tilde{\mu}_{\text{crit}} = \frac{(2\Lambda + \Delta m)(\Lambda - \Delta m)}{\Delta m \left(1 + 2\tilde{\lambda}_0 \ln \frac{m_G}{\Lambda}\right)} \quad (4.4.18)$$

These formulas give a good approximation for the phase transition curve, see Fig. 4.15. We see that with $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$ growing, Δm_{crit} monotonically decreases. Moreover, comparing (4.4.17) and (4.4.18), we can test the validity of our numerical calculations compared to the large- N limit, as the numerics is done, of course, for a finite N^7 .

In the region of large deformations, $\tilde{\mu} \gg m_G$. We have

$$2\beta_{\text{ren}} \sim \frac{N}{4\pi} \ln \frac{v(\mu_{\text{crit}}) \Delta m_{\text{crit}} + \Delta m_{\text{crit}}^2}{\Lambda_{2d}^2} = 0, \quad (4.4.19)$$

where Λ_{2d} is exponentially small given by (4.1.22). From (4.1.23) and (4.1.27) we derive up to logarithmic factors

$$\Delta m_{\text{crit}} \sim \frac{(\Lambda_{4d}^{\mathcal{N}=1})^2 \tilde{\mu}_{\text{crit}}}{m_G^2} \exp\left(-\text{const} \frac{\tilde{\mu}_{\text{crit}}^2}{m_G^2}\right), \quad (4.4.20)$$

where where we assumed that $\Delta m \ll m$, Here we see again that Δm_{crit} monotonically decreases as $\tilde{\mu}_{\text{crit}}$ becomes larger.

4.5 Phase diagram of the worldsheet theory

In this Chapter we have studied dynamics of the μ -deformed $\mathbb{CP}(N-1)$ model (4.1.13). It arises as a world sheet theory of the non-Abelian string in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD, deformed by a mass term μ for the adjoint matter. When $\tilde{\mu}$ is small, the two-dimensional theory is the $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetric $\mathbb{CP}(N-1)$ model. As we increase the deformation parameter, the bulk theory flows to $\mathcal{N} = 1$ SQCD, while the world sheet theory becomes a non-supersymmetric μ -deformed $\mathbb{CP}(N-1)$ model. This happens because fermion zero modes present in the bulk of the $\mathcal{N} = 2$ theory are lifted when we switch on $\tilde{\mu}$. As a consequence, at large $\tilde{\mu}$ world sheet fermions become heavy and decouple, leaving us with the pure bosonic $\mathbb{CP}(N-1)$ model. In this Chapter we studied this transition in detail using the large N approximation.

⁷In the numerical calculations for this Chapter, we took $N = 16$. Rough estimate of the accuracy from (4.4.17) and (4.4.18) is $1 - N^{-1/(N-1)} \approx 0.17$, i.e. qualitatively we can trust our results.

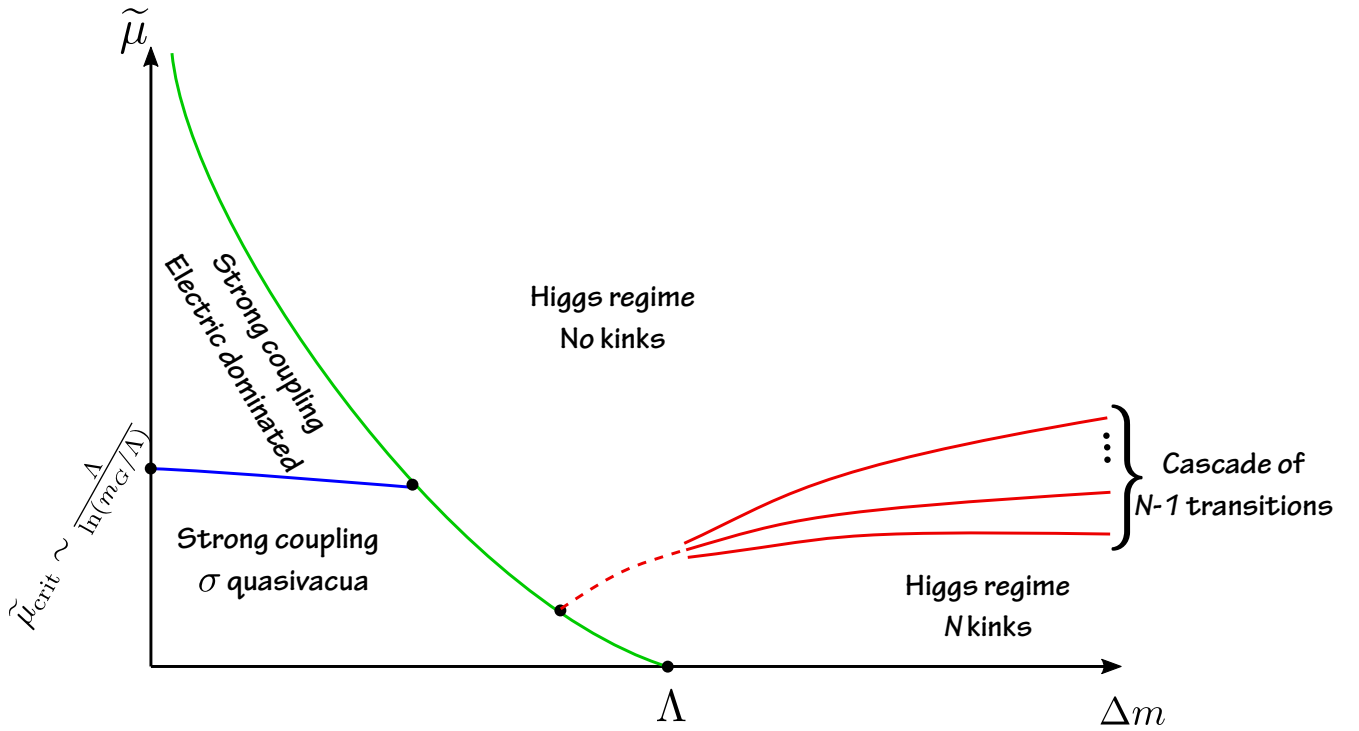


Figure 4.16: Whole phase diagram (schematically). Δm on the horizontal axis, $\tilde{\mu}$ on the vertical axis. Cascade of $N - 1$ curves corresponds to the disappearance of kinks between the ground state and quasivacua. Dashed lines are drawn based on a general argument, since the $1/N$ expansion gives poor approximation in this region.

μ -Deformed $\mathbb{C}\mathbb{P}(N - 1)$ model has two N -independent parameters, the deformation $\tilde{\mu}$ (see (4.1.18)) and the mass scale Δm which is the scale of the quark mass differences in the bulk theory. We obtained a non-trivial phase diagram in the $(\Delta m, \tilde{\mu})$ plane, with two strong coupling phases and two Higgs phases separated by three critical curves with two tricritical points. This phase diagram is shown on Fig. 4.16.

When $\tilde{\mu}$ goes to zero, the supersymmetry is unbroken, and the theory is either in the strong coupling phase (at small Δm) or in the Higgs phase (large Δm , weak coupling). In both phases there are N degenerate vacua, and kinks interpolating between neighboring vacua are not confined. In the strong coupling phase at small Δm the photon becomes dynamical and acquire mass due to the chiral anomaly.

As we switch on the deformation parameter degenerate vacua split. At strong coupling we get a unique ground state and $N - 1$ quasivacua, while the photon develops a small massless component. Kinks are now confined. When the deformation $\tilde{\mu}$ is small, the confinement is due to the splitting of the σ -quasivacua energies. As $\tilde{\mu}$ gets larger eventually we cross the critical line where original σ -quasivacua decay.

Now the quasivacua splitting and confinement of kinks is only due to the constant electric field.

In the Higgs phase at large Δm the theory is at weak coupling. The n field develop a VEV, photon is unphysical and heavy due to the Higgs mechanism. When $\tilde{\mu}$ is small enough energies of N degenerate vacua split, and kinks interpolating between the neighboring quasivacua are confined. However as we increase $\tilde{\mu}$ it crosses critical lines where (see e.g. (4.4.9)) quasivacua decay one by one leaving the theory with a single ground state, and thus without kinks.

In this Chapter we have shown that results obtained in Chapter 2 for the μ -deformed bulk theory agree with the world sheet considerations. We can either go to the world sheet in the $\mathcal{N} = 2$ theory and then take the large $\tilde{\mu}$ limit, or first apply the large deformation in the bulk and then go to the world sheet theory. In other words, the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc}
 4d \mathcal{N} = 2 \text{ SQCD} & \xrightarrow{\text{worldsheet}} & 2d \mathcal{N} = (2, 2) \mathbb{CP}(N - 1) \\
 \text{large } \tilde{\mu} \downarrow & & \text{large } \tilde{\mu} \downarrow \\
 4d \mathcal{N} = 1 \text{ SQCD} & \xrightarrow{\text{worldsheet}} & 2d \mathcal{N} = 0 \mathbb{CP}(N - 1)
 \end{array} \tag{4.5.1}$$

We note however that a derivation of the world sheet theory at intermediate values of $\tilde{\mu}$ is still absent.

As we already discussed we interpret kinks of the world sheet theory as confined monopoles of the four-dimensional SQCD. Our results show, in particular, that at large $\tilde{\mu}$, when the bulk theory basically becomes $\mathcal{N} = 1$ SQCD, monopoles survive only in the strong coupling phase at very small mass differences below the critical line (4.4.20). In the Higgs phase quasivacua decay at large $\tilde{\mu}$ which means that confined monopole and antimonopole forming a "meson" on the string (see Fig. 4.1) annihilate each other and disappear. This confirms a similar conclusion of Chapter 2.

The results of this Chapter are published in the paper [22] and in the graduation work [72].

CHAPTER 5

String “baryon” of the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD

In the previous Chapters, we were mostly concerned with the $\mathcal{N} = 1$ limit of the supersymmetric QCD. In this Chapter we are going to take a step in a “perpendicular” direction and consider the $\mathcal{N} = 2$ theory in another special limit, when the β -function in the 4d vanishes, and the bulk theory becomes superconformal¹. This highly symmetric setting allows one to make far going advances and even derive the hadron spectrum (at least in part).

5.1 Overview

In 2015 a non-Abelian semilocal vortex string was discovered possessing a world-sheet theory which is both superconformal and critical [29]. This string is supported in four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ super-QCD with the $U(N = 2)$ gauge group, $N_f = 4$ flavors of quarks and a Fayet-Iliopoulos term [28]. Due to the extended supersymmetry, the gauge coupling in the 4D bulk could be renormalized only at one loop. With our judicious choice of the matter sector ($N_f = 2N$) the one-loop renormalization cancels. No dynamical scale parameter Λ is generated in the bulk ².

This is also the case in the world-sheet theory described by the weighted $\mathbb{C}\mathbb{P}$ model ($\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(2, 2)$), see Sec. 1.2 and here below. Its β function vanishes, and the overall Virasoro central charge is critical [29]. This happens because in addition to four translational moduli, non-Abelian string has six orientational and size moduli described by $\mathbb{W}\mathbb{C}\mathbb{P}(2, 2)$ model. Together, they form a ten-dimensional target space required for a superstring to be critical. The target space of the string sigma model is $\mathbb{R}_4 \times Y_6$, a product of the flat four-dimensional space and a Calabi-Yau non-compact threefold Y_6 , namely, the conifold.

¹In fact, it is not exactly conformal; this will be explained below.

²However, conformal invariance of 4D SQCD is broken by the Fayet-Iliopoulos term.

This allows one to apply string theory for consideration of the closed string spectrum and its interpretation as a spectrum of hadrons in 4D $\mathcal{N} = 2$ SQCD. The vortex string at hand was identified as the string theory of Type IIA [30].

The study of the above vortex string from the standpoint of string theory, with the focus on massless states in four dimensions has been started in [30, 31]. Later the low lying massive string states were found by virtue of little string theory [73]. Generically, most of massless modes have non-normalizable wave functions over the conifold Y_6 , i.e. they are not localized in 4D and, hence, cannot be interpreted as dynamical states in 4D SQCD. In particular, no massless 4D gravitons or vector fields were found in the physical spectrum in [30]. However, a single massless BPS hypermultiplet in the 4D bulk was detected at a self-dual point (at strong coupling). It is associated with deformations of a complex structure of the conifold and was interpreted as a composite 4D “baryon.”³

Our general strategy is as follows. We explore the BPS protected sector of the world-sheet model, two-dimensional $\mathbb{WCP}(2, 2)$, starting from weak coupling $\beta \gg 1$, where β is the inverse coupling⁴. This procedure requires an infra-red regularization. To this end we introduce masses of quarks in 4D SQCD. They translates into four twisted masses in the world-sheet $\mathbb{WCP}(2, 2)$ (two for n^P and two for ρ^K) which we arrange in a certain hierarchical order. We find both vacua of the theory, and study distinct kinks (in the mirror representation). Thus the vacuum structure and kink spectrum of this theory are known exactly, and so are all curves (walls) of the marginal stability (CMS). Then we move towards strong coupling $\beta \sim 0$ carefully identifying CMS in the complex β plane. At each step we determine which kinks decay on CMS and which are stable upon crossing and establish their relation to four-dimensional monopoles using the so called 2D-4D correspondence, the coincidence of BPS spectra in 4D $\mathcal{N} = 2$ SQCD and in the string world-sheet theory, see Sec. 1.3 and [7, 8, 32].

At strong coupling we use 2D-4D correspondence to confirm that our 4D SQCD enters the so called “instead-of-confinement” phase found earlier in asymptotically free versions of SQCD [74], see [13] for a review. This phase is qualitatively similar to

³If the gauge group is $U(2)$, as is our case, there are no *bona fide* baryons. We still use the term baryon because of a particular value of its charge $Q_B(\text{baryon}) = 2$ with respect to the global unbroken $U(1)_B$, see Sec. 5.2.

⁴Note that in Chapters 2 and 4 the 2D coupling was denoted as 2β , while here it’s just β .

the conventional QCD confinement: the quarks and gauge bosons screened at weak coupling, at strong coupling evolve into monopole-antimonopole pairs confined by non-Abelian strings. They form monopole mesons and baryons shown in Fig. 1.1 (on page 234). The role of the constituent quark in this phase is played by the confined monopole.

Needless to say, the quark masses break the global symmetry

$$\mathrm{SU}(N)_{C+F} \times \mathrm{SU}(\tilde{N}) \times \mathrm{U}(1)_B, \quad (5.1.1)$$

cf. (1.1.3). At the very end we tend them to zero, restoring the global symmetries, as well as conformal invariance of the world-sheet theory on the string. Moreover, If we introduce non-zero quark masses the Higgs branch (1.1.4)

$$\dim \mathcal{H} = 4N\tilde{N}. \quad (5.1.2)$$

is lifted and bifundamental quarks acquire masses $(m_P - m_K)$, $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. Note that bifundamental quarks form short BPS multiplets and their masses do not receive quantum corrections, see [11] for details.

Our main result is the emergence (at $\beta = 0$) of a short BPS massless “baryon” supermultiplet with the $\mathrm{U}(1)_B$ charge $Q_B = 2$. In this way we demonstrate that the massless “baryon” state which had been previously observed using string theory arguments [30] is seen in the field-theoretical approach too. We believe this is the first example of this type.

To obtain this result we use the following strategy. It is known that $\mathrm{WC}\mathbb{P}(2, 2)$ model at $\beta = 0$ has a marginal deformation associated with the deformation of the complex structure of the conifold. Since $\mathrm{WC}\mathbb{P}(2, 2)$ model is a world-sheet theory on the non-Abelian string the natural question to address is what is the origin of this deformation in 4D SQCD. On general grounds one expects that this could be some parameter of the 4D theory such as a coupling constant. Another option is that it could be a modulus, a vacuum expectation value of a certain dynamical field. We show using 2D-4D correspondence (see Sec. 1.3) that the latter option is realized in the case at hand. A new non-perturbative Higgs branch opens up at $\beta = 0$ in 4D SQCD. The modulus parameter on this Higgs branch is the VEV of the massless BPS baryon constructed from four monopoles connected by confining strings as shown in Fig. 1.1b.

So, the theory that we will be working with in this Chapter is the $\mathbb{WCP}(2, 2)$ sigma model, see Sec. 1.2. It can be defined as a low energy limit of the $U(1)$ gauge theory [40]. The bosonic part of the action reads ⁵

$$S = \int d^2x \left\{ |\nabla_\alpha n^P|^2 + |\tilde{\nabla}_\alpha \rho^K|^2 + \frac{1}{4e^2} F_{\alpha\beta}^2 + \frac{1}{e^2} |\partial_\alpha \sigma|^2 \right. \\ \left. + 2 \left| \sigma + \frac{m_P}{\sqrt{2}} \right|^2 |n^P|^2 + 2 \left| \sigma + \frac{m_K}{\sqrt{2}} \right|^2 |\rho^K|^2 + \frac{e^2}{2} (|n^P|^2 - |\rho^K|^2 - r)^2 \right\}, \quad (5.1.3)$$

$$P = 1, 2, \quad K = 3, 4.$$

Here, m_A ($A = 1, \dots, 4$) are the so-called twisted masses (they come from 4D quark masses), while r is the inverse coupling constant (2D FI term). Note that r is the real part of the complexified coupling constant introduced in Eq. (1.2.5),

$$r = \text{Re } \beta.$$

From action (5.1.3) for $\mathbb{WCP}(2, 2)$ it is obvious that this model is self-dual. The duality transformation

$$\begin{aligned} \beta &\rightarrow \tilde{\beta} = -\beta \\ m_{1,2} &\rightarrow \tilde{m}_{1,2} = -m_{3,4} \\ m_{3,4} &\rightarrow \tilde{m}_{3,4} = -m_{1,2} \\ \sigma &\rightarrow \tilde{\sigma} = -\sigma \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

exchanges the roles of the orientation moduli n^P and size moduli ρ^K . The point $\beta = 0$ is the *self-dual* point.

5.2 Massless 4D baryon from string theory

The world-sheet $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model (5.1.3) is conformal and due to $\mathcal{N} = (2, 2)$ supersymmetry the metric of its target space is Kähler. The conformal invariance of the model also ensures that this metric is Ricci flat. Thus the target space of model (5.1.3) is a Calabi-Yau manifold.

Moreover, as we explained in the previous Section the world-sheet $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model has six real bosonic degrees of freedom. Its target space defi-

⁵Equation (5.1.3) and similar expressions below are given in Euclidean notation.

ned by the D -term condition

$$|n^P|^2 - |\rho^K|^2 = \beta \tag{5.2.1}$$

plus gauge invariance, is a six dimensional non-compact Calabi-Yau space Y_6 known as conifold, see [75] for a review. Together with four translational moduli of the non-Abelian vortex it forms a ten dimensional target space $\mathbb{R}^4 \times Y_6$ required for a superstring to be critical [29].

In this section we briefly review the only 4D massless state found from the string theory of the critical non-Abelian vortex [30]. It is associated with the deformation of the conifold complex structure. As was already mentioned, all other massless string modes have non-normalizable wave functions over the conifold. In particular, 4D graviton associated with a constant wave function over the conifold Y_6 is absent [30]. This result matches our expectations since we started with $\mathcal{N} = 2$ SQCD in the flat four-dimensional space without gravity.

We can construct the $U(1)$ gauge-invariant “mesonic” variables

$$w^{PK} = n^P \rho^K. \tag{5.2.2}$$

These variables are subject to the constraint

$$\det w^{PK} = 0. \tag{5.2.3}$$

Equation (5.2.3) defines the conifold Y_6 . It has the Kähler Ricci-flat metric and represents a non-compact Calabi-Yau manifold [40, 75, 76]. It is a cone which can be parametrized by the non-compact radial coordinate

$$\tilde{r}^2 = \text{Tr } \bar{w}w \tag{5.2.4}$$

and five angles, see [76]. Its section at fixed \tilde{r} is $S_2 \times S_3$.

At $\beta = 0$ the conifold develops a conical singularity, so both S_2 and S_3 can shrink to zero. The conifold singularity can be smoothed out in two distinct ways: by deforming the Kähler form or by deforming the complex structure. The first option is called the resolved conifold and amounts to keeping a non-zero value of β in (5.2.1). This resolution preserves the Kähler property and Ricci-flatness of the metric. If we put $\rho^K = 0$ in (5.1.3) we get the $\mathbb{CP}(1)$ model with the S_2 target space (with the radius $\sqrt{\beta}$). The resolved conifold has no normalizable zero modes.

In particular, the modulus β which becomes a scalar field in four dimensions has non-normalizable wave function over the Y_6 and therefore is not dynamical [30].

If $\beta = 0$ another option exists, namely a deformation of the complex structure [75]. It preserves the Kähler structure and Ricci-flatness of the conifold and is usually referred to as the *deformed conifold*. It is defined by deformation of Eq. (5.2.3), namely,

$$\det w^{PK} = b, \quad (5.2.5)$$

where b is a complex number. Now the S_3 can not shrink to zero, its minimal size is determined by b .

The modulus b becomes a 4D complex scalar field. The effective action for this field was calculated in [30] using the explicit metric on the deformed conifold [76, 77, 78],

$$S(b) = T \int d^4x |\partial_\mu b|^2 \log \frac{T^2 L^4}{|b|}, \quad (5.2.6)$$

where L is the size of \mathbb{R}^4 introduced as an infrared regularization of logarithmically divergent b field norm.⁶

We see that the norm of the b modulus turns out to be logarithmically divergent in the infrared. The modes with the logarithmically divergent norm are at the borderline between normalizable and non-normalizable modes. Usually such states are considered as “localized” ones. We follow this rule. This scalar mode is localized near the conifold singularity in the same sense as the orientational and size zero modes are localized on the vortex-string solution.

The field b being massless can develop a VEV. Thus, we have a new Higgs branch in 4D $\mathcal{N} = 2$ SQCD which is developed only for the critical value of the 4D coupling constant⁷ associated with $\beta = 0$.

In [30] the massless state b was interpreted as a baryon of 4D $\mathcal{N} = 2$ QCD. Let us explain this. From Eq. (5.2.5) we see that the complex parameter b (which is promoted to a 4D scalar field) is a singlet with respect to both SU(2) factors in the global world-sheet group⁸

$$\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)_B, \quad (5.2.7)$$

⁶The infrared regularization on the conifold \tilde{r}_{\max} translates into the size L of the 4D space because the variables ρ in (5.2.4) have an interpretation of the vortex string sizes, $\tilde{r}_{\max} \sim TL^2$.

⁷The complexified 4D coupling constant $\tau = 1$ at this point, see Sec. 5.9.

⁸Which is isomorphic to the 4D global group (5.1.1).

cf. (1.2.3). Recall from (1.2.4) that the fields n and ρ transform in the following representations:

$$n : (\mathbf{2}, \mathbf{1}, 0), \quad \rho : (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1). \quad (5.2.8)$$

What about the baryonic charge of the field b ? From (5.2.8) and (5.2.5) we see that the b state transforms as

$$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2). \quad (5.2.9)$$

In particular it has the baryon charge $Q_B(b) = 2$.

To conclude this section let us note that in type IIA superstring the complex scalar associated with deformations of the complex structure of the Calabi-Yau space enters as a 4D $\mathcal{N} = 2$ BPS hypermultiplet. Other components of this hypermultiplet can be restored by $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry. In particular, 4D $\mathcal{N} = 2$ hypermultiplet should contain another complex scalar \tilde{b} with baryon charge $Q_B(\tilde{b}) = -2$. In the stringy description this scalar comes from ten-dimensional three-form, see [79] for a review.

Below in this Chapter we study the BPS kink spectrum of the world-sheet model (5.1.3) using purely field theory methods. Besides other results we use the 2D-4D correspondence to confirm the emergence of 4D baryon with quantum numbers (5.2.9) and the presence of the associated non-perturbative Higgs branch at $\beta = 0$.

5.3 Kink mass from the exact superpotential

As was mentioned above, the $\text{WCP}(2, 2)$ model (5.1.3) supports BPS saturated kinks interpolating between different vacua. In this section we will obtain the kink central charges and, consequently, their masses.

5.3.1 Exact central charge

For the model at hand we can obtain an exact formula for the BPS kink central charge. This is possible because for this model an exact twisted superpotential obtained by integrating out n and ρ supermultiplets is known. It is a generalization [44, 45] of the $\mathbb{CP}(N - 1)$ model superpotential [32, 40, 42, 43] of the Veneziano-

Yankielowicz type [80]. In the present case $N_f = 2N = 4$ it reads:

$$\mathcal{W}_{\text{WCP}}(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \sum_{P=1,2} \left(\sqrt{2}\sigma + m_P \right) \ln \left(\sqrt{2}\sigma + m_P \right) - \sum_{K=3,4} \left(\sqrt{2}\sigma + m_K \right) \ln \left(\sqrt{2}\sigma + m_K \right) + 2\pi \sqrt{2}\sigma \beta + \text{const} \right\}, \quad (5.3.1)$$

where we use one and the same notation σ for the twisted superfield [40] and its lowest scalar component. To study the vacuum structure of the theory we minimize this superpotential with respect to σ to obtain the 2D vacuum equation

$$\prod_{P=1,2} \left(\sqrt{2}\sigma + m_P \right) = e^{-2\pi\beta} \cdot \prod_{K=3,4} \left(\sqrt{2}\sigma + m_K \right). \quad (5.3.2)$$

The invariance of equation (5.3.2) under the duality transformation (5.1.4) is evident.

The vacuum equation (5.3.2) has two solutions (VEVs) $\sigma_{1,2}$, which means that generically there are two degenerate vacua in our theory. Therefore, there are BPS kinks interpolating between these two vacua. Their masses are given by the absolute value of the central charge,

$$M_{\text{BPS}} = |Z|. \quad (5.3.3)$$

The central charge can be found by taking the appropriate difference of the superpotential (5.3.1) calculated at distinct roots [32, 44, 45]. Say, for the kink interpolating between the vacua σ_2 and σ_1 , the central charge is given by

$$\begin{aligned} Z_{\text{BPS}} &= 2 [\mathcal{W}_{\text{WCP}}(\sigma_1) - \mathcal{W}_{\text{WCP}}(\sigma_2)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{P=1}^{N_c} m_P \ln \frac{\sqrt{2}\sigma_1 + m_P}{\sqrt{2}\sigma_2 + m_P} - \sum_{K=N_c+1}^{N_f} m_K \ln \frac{\sqrt{2}\sigma_1 + m_K}{\sqrt{2}\sigma_2 + m_K} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Note that in order for this equation to transform well under the S duality transformation, we must assume that the masses are transformed as $m_P \rightarrow -m_K$, $m_K \rightarrow -m_P$.

The central charge formula (5.3.4) contains logarithms, which are multivalued. Distinct choices differs by contributions $im_A \times \text{integer}$. In addition to the topological charge, the kinks can carry Noether charges with respect to the global group (5.2.7) broken down to $U(1)^3$ by the mass differences. This produces a whole family of dyonic kinks. We stress that all these kinks interpolate between the same pair of vacua σ_1 and σ_2 . In Eq. (5.3.4) we do not specify these dyonic contributions. Below

in this Chapter we present a detail study of the BPS kink spectrum in different regions of the coupling constant β .

The σ vacua are found by solving equation (5.3.2),

$$\sqrt{2}\sigma_{\pm} = -\frac{\Delta m}{2} \frac{1 + e^{-2\pi\beta}}{1 - e^{-2\pi\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\delta m_{12})^2 - e^{-2\pi\beta} (\delta m_{34})^2}{4(1 - e^{-2\pi\beta})} + \Delta m^2 \frac{e^{-2\pi\beta}}{(1 - e^{-2\pi\beta})^2}}. \quad (5.3.5)$$

In writing down this formula we have used the following parametrization of the masses:

$$\begin{aligned} \Delta m &= \bar{m} - \tilde{m}, & \Delta m^2 &= (\bar{m} - \tilde{m})^2, \\ \delta m_{12} &= m_1 - m_2, \\ \delta m_{34} &= m_3 - m_4, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

where \bar{m} and \tilde{m} are the averages of bare masses of the n^P and ρ^K fields, respectively,

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2}{2}, \quad \tilde{m} = \frac{m_3 + m_4}{2}. \quad (5.3.7)$$

From (5.3.5) we immediately observe that generically one of the roots grows indefinitely near the self-dual point $\beta = 0$, while the other remains finite. This will turn out to be important for consideration of kinks at strong coupling.

The Argyres-Douglas (AD) points [81] correspond to fusing the two vacua. In these points certain kinks become massless. Given the solution (5.3.5), the AD points arise when the expression under the square root vanishes. The formula for the positions of the AD points in the β plane can be expressed as

$$e^{-2\pi\beta_{AD}} = (2P - 1 \pm 2\sqrt{P(P - 1)}) \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_3 - m_4}, \quad (5.3.8)$$

where P is a conformal cross-ratio,

$$P[m_1, m_4, m_3, m_2] = \frac{(m_1 - m_4)(m_3 - m_2)}{(m_1 - m_2)(m_3 - m_4)}. \quad (5.3.9)$$

Formula (5.3.8) may have singularities. Values $P = 0, 1$ correspond to a Higgs brunch opening up, while at $P \rightarrow \pm\infty$ one of AD points runs away to $\beta \rightarrow \pm\infty$. There is not much interesting going on at these singularities, and at generic masses formula (5.3.8) is perfectly fine. Therefore, we will not consider these points here.

5.3.2 $\mathbb{CP}(1)$ limit

To make contact with the well understood kink spectrum of $\mathbb{CP}(1)$ model we consider the following limit⁹:

$$\Delta m \gg \delta m_{12}, \delta m_{34}; \quad \beta \gg 1. \quad (5.3.10)$$

Most of the general features (with the exception of the weak coupling bound states, see Sec. 5.4) of the $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model are still preserved in this limit, but calculations simplify greatly. Moreover, results of this section easily generalize to the case $\beta \ll -1$.

By an appropriate redefinition of the σ field we can shift the masses to

$$\begin{aligned} m_1 &= \delta m_{12}/2, & m_2 &= -\delta m_{12}/2, \\ m_3 &= -\Delta m + \delta m_{34}/2, & m_4 &= -\Delta m - \delta m_{34}/2. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

In this representation it is evident that in the limit (5.3.10) the ρ^K fields are heavy and decouple at energies below Δm , and the theory at low energies reduces to the ordinary $\mathbb{CP}(1)$ model with mass scale δm_{12} . The effective coupling constant is no longer constant. It runs below Δm and freezes at the scale δm_{12} ,

$$2\pi\beta_{CP(1)} = 2\pi\beta - 2 \ln \frac{\Delta m}{\delta m_{12}} = 2 \log \left\{ \frac{\delta m_{12}}{\Lambda_{CP(1)}} \right\}, \quad (5.3.12)$$

where the factor 2 in the r.h.s. is the first coefficient of the β function (for $\mathbb{CP}(N-1)$ this coefficient is N), while $\Lambda_{CP(1)}$ is the dynamical scale of the low-energy $\mathbb{CP}(1)$ model,

$$\Lambda_{CP(1)} = \Delta m e^{-\pi\beta}. \quad (5.3.13)$$

The vacuum equation (5.3.2) becomes

$$(\sqrt{2}\sigma - \delta m_{12}/2)(\sqrt{2}\sigma + \delta m_{12}/2) \approx e^{-2\pi\beta}(-\Delta m)^2 = \Lambda_{CP(1)}^2. \quad (5.3.14)$$

In the limit (5.3.10), Eq. (5.3.14) fits the $\mathbb{CP}(N-1)$ vacuum equation

$$\prod_{P=1}^N (\sqrt{2}\sigma + m_P) = (\Lambda_{CP(N-1)})^N \quad (5.3.15)$$

⁹In this section and below in writing similar inequalities involving \gg or \ll we actually assume that on the l.h.s. we take the absolute value of masses and real part of β , e.g. (5.3.10) actually means $|\Delta m| \gg |\delta m_{12}|, |\delta m_{34}|$; $\text{Re } \beta \gg 1$.

(for $N = 2$). In the limit (5.3.10) the AD points (5.3.8) are given by $\pm\beta_{AD}$ with

$$\beta_{AD} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{2\Delta m}{\delta m_{12}} \pm \frac{i}{2}. \quad (5.3.16)$$

We see that the $\mathbb{CP}(1)$ weak coupling condition $\Lambda_{CP(1)} \ll \delta m_{12}$ directly translates to $\beta \gg \beta_{AD}$, see (5.3.13). Let us stress that this is more restrictive condition than just $\beta \gg 1$. If $\beta \rightarrow \beta_{AD}$ the effective coupling (5.3.12) hits the infrared pole.

Now, since we are in the $\mathbb{CP}(1)$ limit, the BPS kink central charge must be given by the well known formula [32]. Indeed, the 2D vacua are approximately given by

$$\sqrt{2}\sigma_{\pm} \approx \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2}. \quad (5.3.17)$$

Substituting this and (5.3.11) into the $\mathbb{WC}\mathbb{P}(2, 2)$ central charge formula (5.3.4) and neglecting terms $\delta m_{12}/\Delta m$ and $\Lambda_{CP(1)}/\Delta m$ we obtain for the central charge

$$Z_{\text{kink}} = \frac{1}{2\pi} \left[2\sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2} - \delta m_{12} \ln \frac{\delta m_{12} + \sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2}}{\delta m_{12} - \sqrt{\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2}} \right]. \quad (5.3.18)$$

This is exactly Dorey's formula [32] for $\mathbb{CP}(1)$.

The above central charge (5.3.18) tends to zero at the AD point (5.3.16). This ensures that the BPS kink becomes massless at this point. We will see later that at two AD points $\beta = \beta_{AD}$ with $\text{Re}\beta > 0$ two kinks with distinct dyonic charges become massless.

Moreover, the central charge (5.3.18) has a singularity at the AD point. Indeed, near this point we have $\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2 \approx 0$. Expanding (5.3.18) we get

$$\begin{aligned} Z_{\text{kink}} &\approx -\frac{1}{3\pi} \frac{1}{\delta m_{12}^2} \left(\delta m_{12}^2 + 4\Lambda_{CP(1)}^2 \right)^{3/2} \\ &\approx -\frac{2\sqrt{2\pi}}{3} \delta m_{12} \cdot (\beta - \beta_{AD1})^{3/2}. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

This shows that locally the central charge has a root-like singularity near the AD point.

In the quasiclassical limit $\Lambda_{CP(1)} \ll \delta m_{12}$ (or, equivalently, $\beta \gg \beta_{AD}$) the central charge (5.3.18) is

$$\begin{aligned} Z_{\text{kink}} &\approx -\frac{\delta m_{12}}{\pi} \ln \frac{\delta m_{12}}{\Lambda_{CP(1)}} + i \frac{\delta m_{12}}{2} + \frac{\delta m_{12}}{\pi} \\ &\approx -\beta_{CP(1)} \cdot (m_1 - m_2) + i(m_1 - \bar{m}) + \frac{m_1 - m_2}{\pi} \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

where \bar{m} is the average of the first two masses, see (5.3.7). The second term represents the fractional U(1) charge of the soliton [82]. Indeed (5.3.20) can be compared to the Dorey quasiclassical formula [32] for the central charge

$$Z_{\text{kink}} = -(\beta_{CP(1)} T - i q) \delta m_{12} \quad (5.3.21)$$

where $T = +1$ is the topological charge, while q is the kink global (or “dyonic”) charge. Comparing (5.3.20) and (5.3.21) we see that the kink dyonic charge is $q = 1/2$. The last term in (5.3.20) is the central charge anomaly [82]. For details see e.g. [11, 83].

In the limit when we are far from any AD point, $\beta \gg \beta_{AD}$, the expression in the second line in (5.3.20) is actually valid for any mass parameters, not just in the $\mathbb{CP}(1)$ limit (5.3.10).

5.4 Weak coupling spectrum

Now let us discuss the weak coupling spectrum. In the $\mathbb{CP}(1)$ limit (5.3.10) at weak coupling, $\Lambda_{CP(1)} \ll \delta m_{12}$, a part of the spectrum coincides with the ordinary $\mathbb{CP}(1)$ model spectrum coming from the n^P fields.

The $\mathbb{CP}(1)$ spectrum [32] consists of elementary perturbative excitations and a tower of BPS dyonic kinks. The perturbative states have a mass $|i(m_1 - m_2)|$. This can be understood on the classical level from the action (5.1.3). Suppose that field n^1 classically develops VEV equal to $\sqrt{\beta}$. Then the first term with $P = 1$ in the second line in (5.1.3) forces σ to acquire the classical value $\sqrt{2}\sigma = -m_1$, while the term with $P = 2$ gives the mass $|m_1 - m_2|$ to n^2 . Note, that this result obtained in the quasiclassical limit is in fact exact because of the BPS nature of this perturbative state.

The mass of a kink interpolating between the two vacua is $M_{\text{kink}} = |Z_{\text{kink}}|$ where the central charge is given by (5.3.20). This kink is in fact a part of a dyonic tower with central charges

$$D^{(n)} = Z_{\text{kink}} + n \cdot i(m_1 - m_2), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.4.1)$$

which can be interpreted as a bound state of the kink and n quanta of perturbative states with the central charge $i(m_1 - m_2)$. The number n in (5.4.1) is a manifestation

of the multiple logarithm branches in (5.3.4). It gives a contribution to the kink dyonic charge q , see the quasiclassical expression (5.3.21). The total dyonic charge $q = n + 1/2$ also has a contribution coming from Z_{kink} which makes it non-integer. The presence of the tower (5.4.1) in the weak coupling region of $\mathbb{CP}(1)$ model was found in [32] using quasiclassical methods.

In our $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model extra states are present too, coming from the ρ^K fields. They include perturbative BPS states with masses $|i(m_P - m_K)|$, $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. These states are seen at the classical level from the action (5.1.3). Say, in the classical vacuum $n^1 = \sqrt{\beta}$, $\sqrt{2}\sigma = -m_1$, the fields ρ^K acquire masses $|m_1 - m_3|$ and $|m_1 - m_4|$ given by the second term in the second line in (5.1.3). We will call these states ‘‘bifundamentals.’’ They are 2D ‘‘images’’ of bifundamental quarks of 4D SQCD upon 2D-4D correspondence, see Sec. 1.

If we relax the $\mathbb{CP}(1)$ conditions (5.3.10), the spectrum described above stays intact. However we get some extra states. States from the dyonic tower (5.4.1) might form bound states with ‘‘bifundamental’’ fermions $\tilde{\psi}_K^P$. The central charge of the resulting state is given by [45]

$$Z_{\text{bound}}^{(n)} = Z_{\text{kink}} + n \cdot i(m_1 - m_2) + i(m_1 - m_K). \quad (5.4.2)$$

These states are formed if the condition

$$0 < \text{Re} \left\{ \frac{m_1 - m_K}{m_1 - m_2} \right\} \equiv 1 - \text{Re} \left\{ \frac{m_2 - m_K}{m_2 - m_1} \right\} < 1 \quad (5.4.3)$$

is satisfied for some $K \in \{3, 4\}$ (and any P) [45]. From the stability condition (5.4.3) it is evident that there are no such bound states for our choice of quark masses, $\Delta m \gg \delta m_{12}, \delta m_{34}$, see the first condition in (5.3.10). We will not consider these bound states here.

Here we have just described the spectrum at weak coupling $\beta \gg \beta_{AD}$. It literally translates into the spectrum in the dual weak coupling region at $\beta \ll -\beta_{AD}$ with substitution of indices $P = 1, 2 \leftrightarrow K = 3, 4$.

5.5 Mirror description and the strong coupling spectrum

In this section we will investigate the BPS kink spectrum in the strong coupling domain where β is small, $\beta \ll \beta_{AD}$. (For comparison of various limits of the kink

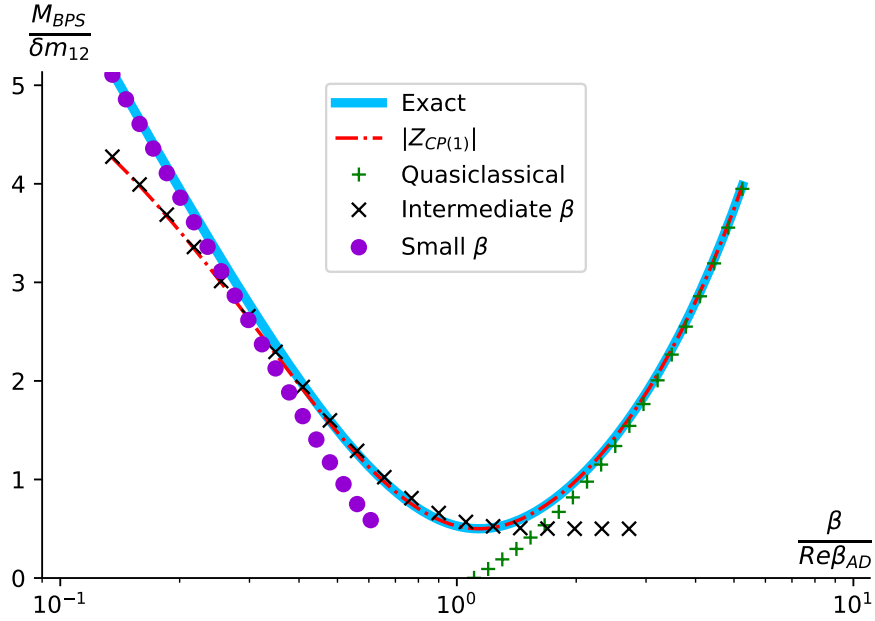


Figure 5.1: Various approximations of the kink mass M_1 (absolute value of the central charge): $\mathbb{CP}(1)$ limit (5.3.18), quasiclassical (5.3.20), intermediate β (5.5.6), small β (5.5.13). Fixed $\Delta m/\delta m_{12} = 10$.

mass, see Fig. 5.1.) We will generalize the analysis of [84] carried out for asymptotically free $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ models to the present case of conformal $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model.

5.5.1 Mirror superpotential

To this end we will implement the mirror description of kinks [85, 86] of the $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model (5.1.3). The formula for the mirror superpotential is

$$\mathcal{W}_{\text{mirror}}(X_P, Y_K) = -\frac{\Lambda}{4\pi} \left[\sum_P X_P - \sum_K Y_K - \sum_P \frac{m_P}{\Lambda} \ln X_P + \sum_K \frac{m_K}{\Lambda} \ln Y_K \right]. \quad (5.5.1)$$

Here, the indices run as $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. Parameter Λ is an auxiliary parameter of dimension of mass which will cancel in the very end.

The fields X_P, Y_K are subject to the constraint

$$\prod_P X_P = e^{-2\pi\beta} \prod_K Y_K. \quad (5.5.2)$$

The VEVs of X_P, Y_K can be obtained by minimizing the superpotential (5.5.1) and using the above constraint [84, 86]. Below we use a simplified approach which utilizes

the relation of X_P, Y_K to the σ solutions of the vacuum equation (5.3.2) [84, 86],

$$X_P = \frac{\sqrt{2}\sigma + m_P}{\Lambda}, \quad Y_K = \frac{\sqrt{2}\sigma + m_K}{\Lambda}. \quad (5.5.3)$$

For a kink interpolating between two vacua Vac_1 and Vac_2 , the central charge is given by an exact formula

$$Z_{\text{kink}} = 2 [\mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_2) - \mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_1)], \quad (5.5.4)$$

while its mass $M_{\text{kink}} = |Z_{\text{kink}}|$, see (5.3.3).

5.5.2 Kinks at intermediate β

As a warm-up exercise we are going to consider the $\mathbb{CP}(1)$ limit (5.3.10). In the intermediate domain $\delta m_{12} \ll \Lambda_{CP(1)} \ll \Delta m$ (or, equivalently, $1 \ll \beta \ll \beta_{AD}$), the effective $\mathbb{CP}(1)$ model is at strong coupling, but at the same time we can use the large- β expansion. The solutions of the vacuum equation (5.3.2) are given by $\sqrt{2}\sigma_{\pm} \approx -\Delta m/2 \pm \Lambda_{CP(1)}$, which yields two mirror vacua:

Vac_1 at $\sigma = \sigma_+$	Vac_2 at $\sigma = \sigma_-$
$X_1 \approx X_2 \approx \frac{\Lambda_{CP(1)}}{\Lambda}$	$X_1 \approx X_2 \approx -\frac{\Lambda_{CP(1)}}{\Lambda}$
$Y_3 \approx Y_4 \approx -\frac{\Delta m}{\Lambda}$	$Y_3 \approx Y_4 \approx -\frac{\Delta m}{\Lambda}$

For both vacua the constraint (5.5.2) is satisfied:

$$\prod_P X_P = e^{-2\pi\beta} \prod_K Y_K \approx \frac{\Lambda_{CP(1)}^2}{\Lambda^2}. \quad (5.5.5)$$

There are different types of kinks interpolating between these vacua.

n -kinks For these kinks, the two X_P wind in the opposite directions, while the Y_K stay intact to preserve the constraint (5.5.2); see Fig. 5.2a. Since the arguments of X_P change, the logarithms $\ln X_K$ in (5.5.1) acquire imaginary parts. There are two kinks of this type, depending on which flavor winds clockwise and which counter clockwise. From the central charge formula (5.5.4) we obtain for these kinks

$$Z_P = \frac{2\Lambda_{CP(1)}}{\pi} + i(m_P - \bar{m}), \quad P = 1, 2. \quad (5.5.6)$$

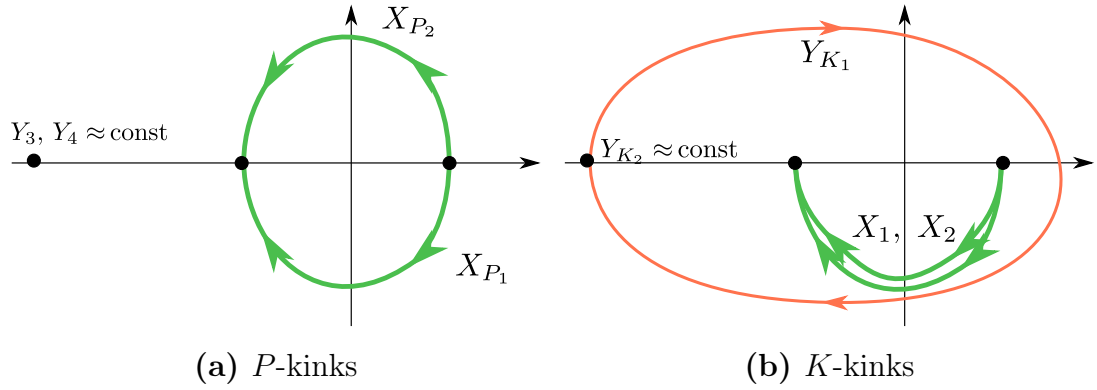


Figure 5.2: Trajectories of X_P and Y_K in the mirror representation of a kink at intermediate $1 \ll \beta \ll \beta_{AD}$

The average mass \bar{m} is defined in (5.3.7), and we used that $m_1 - m_2 = 2(m_1 - \bar{m}) = -2(m_2 - \bar{m})$. The corresponding kink masses are given by the absolute values of central charges in (5.5.6).

This formula is known in strongly coupled $\mathbb{CP}(1)$ and can be derived by expanding the central charge (5.3.18) in powers of the small parameter $\delta m_{12}/\Lambda_{CP(1)}$. Namely, the central charge (5.3.18) reduces to the central charge of $P = 1$ kink in (5.5.6) at small δm_{12} .

In the limit of equal m_1 and m_2 ($\delta m_{12} = 0$) two kinks in (5.5.6) degenerate and form a doublet of the first $SU(2)$ in the global group (5.2.7), namely

$$n\text{-kinks} : \quad (\mathbf{2}, \mathbf{1}, 0) \quad (5.5.7)$$

The fact that kinks of the $\mathbb{CP}(N-1)$ model at strong coupling form a fundamental representation of $SU(N)$ and transform as n^P fields was discovered by Witten long ago [26]. Later it was confirmed by Hori and Vafa [86] using the mirror representation. This is reflected in our notation of kinks in (5.5.6) as n -kinks.

ρ -kinks For these kinks, the two X_P wind in one directions, while exactly one of the Y_K winds double in the same direction according to (5.5.2); see Fig. 5.2b. Then the corresponding logarithms in (5.5.4) acquire imaginary parts. There are again two kinks of this type, depending on which flavor Y_K winds. The kink central charges are given by

$$Z_K = \frac{2\Lambda_{CP(1)}}{\pi} + i(m_K - \bar{m}), \quad K = 3, 4. \quad (5.5.8)$$

These are new states, not present in $\mathbb{CP}(1)$. At $\beta \gg 1$ these states are much heavier than the n -kinks.

In the limit of equal m_3 and m_4 ($\delta m_{34} = 0$) the two kinks in (5.5.8) degenerate and form a doublet of the second $SU(2)$ in (5.2.7), namely

$$\rho\text{-kinks : } (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1). \quad (5.5.9)$$

These kinks behave as ρ fields, see (5.2.8). In what follows we will heavily use the fact that n -kinks and ρ -kinks transforms as n^P and ρ^K fields.

Note that the BPS spectrum of $\mathbb{WC}\mathbb{P}(2, 2)$ model at strong coupling is very different from that at weak coupling. First, there are no perturbative states at strong coupling. Second, instead of the infinite tower of dyonic kinks (5.4.1) present at weak coupling at strong coupling we have just four kinks which belong to representations (5.5.7) and (5.5.9) of the global group (5.2.7). Note also that global charges of kinks in the perturbative tower (5.4.1) associated with the single mass difference ($m_1 - m_2$). In contrast the kink global charges at strong coupling are associated with all masses m_A present in the model. We study CMS where the transformations of the BPS spectra occurs in Sec. 5.6.

The above results can be directly generalized to the dual domain of negative $\text{Re } \beta$. When β is in the intermediate domain between $-|\beta_{AD}|$ and -1 , the n^P fields are heavy and decouple, and we are again left with a $\mathbb{CP}(1)$ model, only this time comprised of the ρ^K fields and a new strong coupling scale

$$\Lambda_{\widetilde{\mathbb{CP}(1)}} = \Delta m e^{+\pi\beta}. \quad (5.5.10)$$

Roles of n -kinks and ρ -kinks are reversed. Their central charges are given by

$$Z_P = \frac{2\Lambda_{\widetilde{\mathbb{CP}(1)}}}{\pi} + i(m_P - \tilde{m}), \quad Z_K = \frac{2\Lambda_{\widetilde{\mathbb{CP}(1)}}}{\pi} + i(m_K - \tilde{m}). \quad (5.5.11)$$

with \tilde{m} defined in (5.3.7). As we can see, now the Z_K -kinks are light. Note that these results match with the S -duality transformation (5.1.4).

Finally, we note that apart from the kinks just described, there can be kinks described by X_P , Y_K fields winding in the opposite direction. Say, for ρ -kinks on Fig. 5.2b the X_P may wind in the upper half plane, with Y_K winding counter clockwise. These kinks turn out to be $n = +1$ states from the strong coupling tower of higher winding states discussed in the next subsection.

5.5.3 Kinks near the origin $\beta = 0$

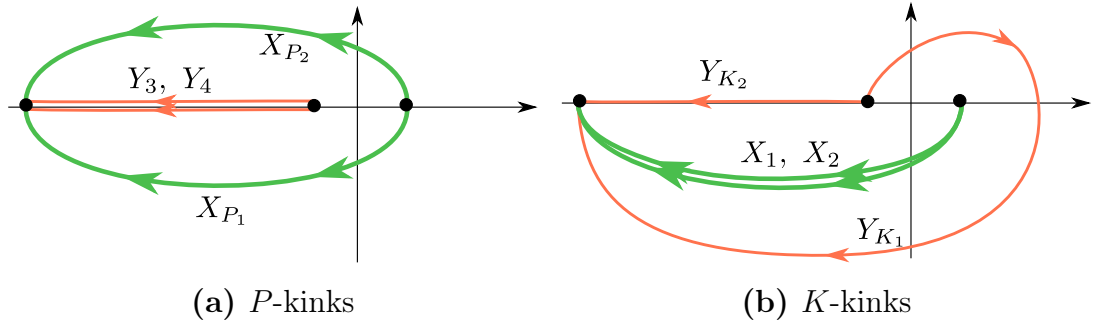


Figure 5.3: Trajectories of X_P and Y_K in the mirror representation of a kink at $\beta \rightarrow 0$.

Now consider the limit $\beta \rightarrow 0$. In the vicinity of the origin the last condition in (5.3.10) is badly broken, and all of the $\mathbb{WCP}(2, 2)$ fields n^P, ρ^K (5.1.3) play an important role.

In this limit we can use the small- β expansion. We have $e^{-2\pi\beta} \approx 1 - 2\pi\beta$, and the σ -vacua (5.3.5) are approximately

$$\sqrt{2}\sigma_+ \approx \frac{\delta m_{12}^2 - \delta m_{34}^2}{8\Delta m^2}, \quad \sqrt{2}\sigma_- \approx -\frac{\Delta m}{\pi\beta}. \quad (5.5.12)$$

Without loss of generality we can consider the limit when $\sigma_+ \approx 0$. Then, the two mirror vacua are given by

Vac_1 at $\sigma = \sigma_+$	Vac_2 at $\sigma = \sigma_-$
$X_P \approx m_P/\Lambda$	$X_1 \approx X_2 \approx -\frac{\Delta m}{\pi\beta\Lambda}$
$Y_K \approx m_K/\Lambda$	$Y_3 \approx Y_4 \approx -\frac{\Delta m}{\pi\beta\Lambda}$

Again, there are two types of kinks. n -kinks are obtained when, say, X_1 picks up the phase $+i\pi$, X_2 picks up $-i\pi$, while the phases of Y_K remain intact; see Fig. 5.3a. There is also a kink for which the roles of X_1 and X_2 are reversed. We have the total of two kinks with central charges

$$Z_P = \frac{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\pi\beta} + i(m_P - \bar{m}) \quad (5.5.13)$$

where \bar{m} is defined in (5.3.7).

Similarly, the ρ -kinks are obtained when two X_P wind with the same phase, while exactly one of the Y_K winds twice as much in accord with (5.5.2); see Fig. 5.3b. The central charges of these kinks are given by

$$Z_K = \frac{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\pi\beta} + i(m_K - \bar{m}). \quad (5.5.14)$$

We immediately observe that the kink masses are singular at the self-dual point $\beta = 0$. They are very heavy in the vicinity of this point.

To get the kink spectrum at $\text{Re}\beta < 0$ we can analytically continue (5.5.13) and (5.5.14) to $\beta \rightarrow \tilde{\beta} = -\beta$. The log terms in (5.5.13), (5.5.14) give $i(m_1 + m_2 - m_3 - m_4)/2$ which converts \bar{m} into \tilde{m} . Note, that this matches with the S -duality transformation (5.1.4).

Now observe that the central charges of n and ρ -kinks (5.5.13) and (5.5.14) have a branching point at $\beta = 0$. This is a new feature absent in asymptotically free versions of $\text{WC}\mathbb{P}(N, \tilde{N})$ models. What is the meaning of this branching point? Below in this section we will argue that the self-consistency of the BPS spectrum requires the presence of a new tower of higher winding states in our conformal $\text{WC}\mathbb{P}(2, 2)$ model. This tower is present only at strong coupling and decays as we move to large β . This can be seen as follows.

Consider changing the coupling constant β along some trajectory in the complex plane. This trajectory may stretch from the weak coupling region $\beta \gg \beta_{AD}$ through the strong coupling domain into the dual weak coupling region $\beta \ll -\beta_{AD}$. This trajectory may also encircle an AD point and go through a cut on a different sheet. The charges of various BPS states change, but there are CMS starting at the AD points, and the BPS spectrum as a whole stays intact. The would-be “extra” states decay on CMS [45].

However, this trajectory may also go full circle around the singularity $\beta = 0$. It can also encircle this point several times. There are no CMS starting at $\beta = 0$ and extending outwards. What we end up with is another set of BPS states. From the expressions for the kink central charges (5.5.13), (5.5.14) we see that if we go around the origin n times, then the central charge of the BPS kinks becomes

$$Z_A^{[n]} = \frac{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}{2\pi} \ln \frac{2}{\pi\beta} + i(m_A - \bar{m}) + i n \cdot (m_1 + m_2 - m_3 - m_4),$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg \beta < -\frac{3\pi}{2}.$$
(5.5.15)

Here the argument of β is constrained so as to account for the cut, see Fig. F.1. Does it mean that the full BPS spectrum changes as we go to other sheets?

The way to resolve this issue is to assume that that in fact *all* of the states (5.5.15) are already present at strong coupling on the first sheet. When we wind

circles around the origin, this tower of states $Z_A^{[n]}$ simply shifts in the index n . Since this index runs over all integers and the number of states in the tower is infinite, the whole BPS spectrum is in fact 2π -periodic with respect to $\arg \beta$.

The new tower (5.5.15) is present only at strong coupling. At weak coupling it decays. We study associated CMS and decay processes in Appendix F.1.2.

5.6 Curves of marginal stability

In this section we will present the curves of marginal stability (CMS) for various decays of BPS states.

As was stated above, in $\mathbb{WCP}(2, 2)$ theory under consideration the coupling β does not run. We want to understand transformations of the BPS spectrum at different values of β , particularly weak vs. strong coupling regions as well as at $\text{Re } \beta < 0$. In order to better capture the relevant effects, we are going to investigate more closely how the particle spectrum depends on β while holding the masses¹⁰ m_A fixed. To this end we will study curves of marginal stability (CMS) on the complex β plane. Since the θ_{2d} angle is 2π periodic, the whole picture of spectra will be periodic as well.

In Sections 5.4 and 5.5 we saw that the strong and weak coupling spectra are different. At weak coupling $\beta \gg \beta_{AD}$, we observed the dyonic tower (5.4.1) as well as “perturbative” states with the central charge $i(m_1 - m_2)$. They are not present at strong coupling and must decay on a CMS separating the strong and weak coupling regions. We will refer to these CMS as the *primary curves*.

Moreover, at strong coupling we have ρ -kinks not present at weak coupling. Correspondingly, CMS must exist on which these states will decay. We will call these the *secondary curves*.

Finally, we saw that at weak coupling there are the so-called bifundamentals – the perturbative states with masses $|i(m_P - m_K)|$, $P = 1, 2$, $K = 3, 4$. These states do not decay even at strong coupling. They are present everywhere on the β plane. To see that this is the case suffice it to note that in the massless limit $m_A \rightarrow 0$ 4D SQCD has a Higgs branch formed by bifundamental quarks. This Higgs branch

¹⁰Or, rather, their ratios since the CMS positions on the β plane can depend only on dimensionless parameters, and there is no dynamical strong coupling scale Λ in $\mathbb{WCP}(2, 2)$.

is protected by supersymmetry and present at all couplings. Through the 2D-4D correspondence we conclude that 2D bifundamentals are also present at all β .

Below in this section we study the primary CMS while the are secondary CMS discussed in Appendix F.1.

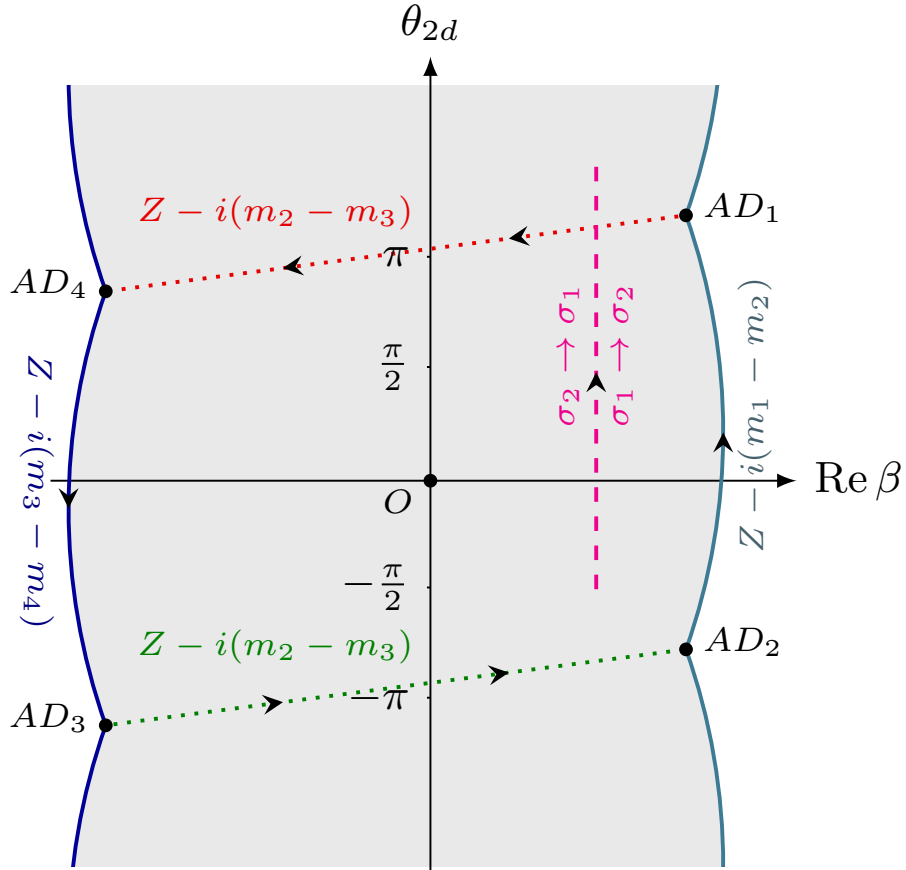


Figure 5.4: Primary CMS (solid lines on the left and on the right, schematically) and central charge shifts (see Appendix F.2). AD_A are the Argyres-Douglas points where the corresponding central charge Z_A vanishes. The masses m_A are generic. Grey region is the strong-coupling domain. When going from one AD point to the next shown in this figure one observes phase shifts. There is also a \mathbb{Z}_2 transformation (exchanging the σ roots) when shifting $\theta_{2d} \rightarrow \theta_{2d} + 2\pi$. Apart from that, the picture is 2π periodic with respect to θ_{2d} . $AD_2 = AD_1 - 2\pi i$, $AD_3 = AD_4 - 2\pi i$.

5.6.1 Primary curves in the β plane

As was discussed above, when we pass from large $\beta \gg \beta_{AD}$ to strong coupling $\beta \sim 1$, the perturbative states with the central charge $i(m_1 - m_2)$ decay on CMS producing (dyonic) kink-antikink pairs. We can write the decay processes schematically

as¹¹

$$\underbrace{[i(m_1 - m_2)]}_{\text{elementary quantum}} \rightarrow \underbrace{[Z_1]}_{\text{dyon}} + \underbrace{[-Z_2]}_{\text{antidyon}}. \quad (5.6.1)$$

On the CMS, the central charges of the decaying particles must have the same argument, i.e. they must be collinear vectors in the complex plane. From this we can derive the equation for the CMS,

$$\text{Im} \left(\frac{Z_P}{i(m_1 - m_2)} \right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re} \left(\frac{Z_P}{m_1 - m_2} \right) = 0, \quad P = 1, 2. \quad (5.6.2)$$

The same decay curve describes the decay of the dyonic tower (5.4.1) into the strong coupling states.

This curve separates the weak coupling region $\beta \gg \beta_{AD}$ from the strong coupling region. It passes through the AD points (5.3.16) with $\text{Re} \beta > 0$ where the mass of one of the n -kinks $[Z_P]$ vanishes. We denote these AD points AD_P ,

$$\text{AD}_2 = \text{AD}_1 - 2\pi i,$$

see Appendix F.2 for a detailed discussion. Of course, the corresponding CMS is 2π periodic in θ_{2d} .

We solve (5.6.2) numerically. The result is presented by the r.h.s. curve on Fig. 5.4. Note that $[Z_1]$ and $[Z_2]$ kinks (5.5.6) present at strong coupling survive at the weak coupling region at positive $\beta \gg \beta_{AD}$. In this region they belong to the tower (5.4.1) with $n = 0$ and $n = -1$ respectively. This is a well-known behavior: the states that can become massless at some points on CMS, are present both at weak and strong coupling [1, 87].

Note that the CMS curve for $\mathbb{CP}(1)$ model in the complex plane δm_{12} is well-known [82]. It is a closed curve around the origin which passes through the AD points. Our curve in Fig. 5.4 (more exactly, its right branch at $\text{Re} \beta > 0$) is a translation of the curve in [82] into the β plane. In the β plane the curve is not closed. It is periodic in θ_{2d} .

Analogously, when $\text{Re} \beta$ is large but negative (l.h.s. on Fig. 5.4), there are perturbative states whose central charge is $i(m_3 - m_4)$ and a corresponding dyonic

¹¹Here and further on we use the notation with square brackets $[Z_A]$, $[i(m_1 - m_2)]$ to represent particles with the corresponding central charges. The central charge of an antiparticle equals negative of that of the particle.

tower. Their decay curves satisfy

$$\operatorname{Re} \left(\frac{Z_K}{m_3 - m_4} \right) = 0, \quad K = 3, 4. \quad (5.6.3)$$

This CMS separates the dual weak coupling region $\beta \ll -\beta_{AD}$ from the strong coupling region. On Fig. 5.4 it is drawn on the left side.

We see two weak coupling regions in the complex plane of β . They are separated by a strong coupling region which resembles a band stretched along the θ_{2d} direction. This is illustrated on Fig. 5.4.

5.7 Instead-of-confinement phase

In this section we use 2D-4D correspondence to confirm the instead-of-confinement phase in the bulk 4D SQCD at strong coupling. This phase was discovered earlier in asymptotically free versions of SQCD [74], see [13] for a review.

To this end we first consider our world-sheet $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model on the non-Abelian string. In the previous sections we have learned that the BPS spectrum of states is very different at weak and strong coupling. In particular, the perturbative states with mass $|m_1 - m_2|$ decay into say, $[Z_1]$ kink and $[-Z_2]$ antikink on the CMS on the the r.h.s. in Fig. 5.4 when we pass from the weak coupling region into the strong coupling one. At strong coupling these perturbative states do not exist.

The 2D-4D correspondence tells us that a similar process occurs on the Coulomb branch (at $\xi = 0$) in 4D SQCD when we pass from the weak coupling region to the strong coupling one. The 2D perturbative states with mass $|m_1 - m_2|$ correspond in the bulk theory (4D SQCD) to BPS off-diagonal quarks q^{kP} , $P = 1, 2$, and gluons. They do not exist at strong coupling. They decay into monopole and anti-monopole pair¹².

Moreover, since the n -kinks of the 2D theory form doublets with respect to the first $SU(2)$ factor of the global group (5.2.7), see (5.5.7) and (5.5.9), the monopoles and anti-monopoles formed as a result of the quark/gluon decay also transform as doublets and anti-doublets of the first $SU(2)$ factor of the global group.

As we turn on ξ at weak coupling the 4D theory goes into the Higgs phase. Quarks q^{kP} , $P = 1, 2$, get screened by the condensate (1.1.1). They combine with

¹²We call all 4D states with non-zero magnetic charge monopoles although they can be dyons carrying also electric and global charges [2].

massive gluons to form a long non-BPS $\mathcal{N} = 2$ multiplets with mass $g\sqrt{\xi}$, see the review [11] for details. Moreover, at non-vanishing values of ξ the monopoles become confined by non-Abelian strings.

Now, if we move to the strong coupling domain, the monopole and anti-monopole created as a result of the quark/gluon decay cannot move apart. They are attached to two confining strings and form a monopole-antimonopole stringy meson shown in Fig. 1.1a. Of course this meson is a non-BPS state. Its mass is of the order of $\sqrt{\xi}$. Note, that this meson is formed also in the massless limit $m_A \rightarrow 0$. The mass scale in 4D SQCD is set by the FI parameter ξ .

Thus we see that the screened quarks and gluons present in 4D SQCD in the Higgs phase at weak coupling do not survive when we move to strong coupling. They evolve into monopole-antimonopole stringy mesons. The phase which emerges at the strong coupling is called *instead-of-confinement* phase [13].

This phase is an alternative to the ordinary confinement phase in QCD. The role of the constituent quarks in this phase is played by confined monopoles. Moreover, since monopoles and antimonopoles transform as doublets and antidoublets of the first SU(2) factor of the global group (5.1.1) the stringy mesons appear in the singlet or adjoint representations of the first SU(2) subgroup. This is similar to what happens in QCD: quark-antiquark mesons form the singlet or adjoint representation of the flavor group.

The same instead-of-confinement mechanism works if we start at large negative β and pass through l.h.s CMS into strong coupling. The monopole-antimonopole stringy mesons formed on this CMS appear in the singlet or adjoint representations of the second SU(2) subgroup of the global group. The strong coupling region between the r.h.s and l.h.s. CMS in Fig. 5.4 in 2D theory corresponds to the strong coupling domain around the large semicircle in Fig. 5.5 in terms of the complexified 4D coupling τ , see (5.9.1) in Sec. 5.9. This is the region of instead-of-confinement phase in 4D SQCD.

5.8 Stringy baryon from field theory

In this section we show that the presence of the baryonic state (5.2.9) found as a massless string state of the critical string theory on the non-Abelian vortex

in our 4D $\mathcal{N} = 2$ SQCD can be confirmed using purely field-theoretical methods. Let us start with the world-sheet $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model on the string at strong coupling near the origin in the β plane. The baryonic charge $Q_B = 2$ and the absence of the Cartan charges with respect to both $SU(2)$ factors of the global group (5.2.7) suggests that this state can be formed as a BPS bound state of two different n -kinks and two different ρ -kinks arranged on the infinite straight string in the following order

$$[Z_P]|_{1 \rightarrow 2} + [Z_K]|_{2 \rightarrow 1} + [Z_{P'}]|_{1 \rightarrow 2} + [Z_{K'}]|_{2 \rightarrow 1}, \quad P \neq P', \quad K \neq K', \quad (5.8.1)$$

where the subscript $|_{1 \rightarrow 2}$ ($|_{2 \rightarrow 1}$) denotes the kink interpolating from vacuum 1 to vacuum 2 (vacuum 2 to vacuum 1). The central charges of the second and last kinks come with the minus sign, see (5.5.4), and the net central charge of the bound state (5.8.1) is

$$Z_b = i(m_1 + m_2 - m_3 - m_4), \quad (5.8.2)$$

see (5.5.13) and (5.5.14). Note that this state cannot have a net topological charge. The 2D topological charge translates into 4D magnetic charge of a monopole. Clearly, the baryon (or any other hadron) cannot have color-magnetic charge because magnetic charges are confined in 4D SQCD.

The 4-kink composite state (5.8.1) transforms under the global group (5.2.7) as

$$n^P \rho^K n^{P'} \rho^{K'} = w^{PK} w^{P'K'}, \quad (5.8.3)$$

where we use the gauge invariant mesonic variables (5.2.2). It is clear that (5.8.3) is symmetric with respect to indices P, P' and K, K' . Thus, this state is in the triplet representation $(\mathbf{3}, \mathbf{3}, 2)$ of the global group. This is not what we need.

The singlet representation $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2)$ (5.2.9) we are looking for would correspond to $\det(w)$. But it is zero, see (5.2.3)!

However, recall that it is zero only in $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model formulated in terms of n 's and ρ 's. Let us take the massless limit $m_A \rightarrow 0$ and go to the point $\beta = 0$. Our world-sheet $\mathbb{WCP}(2, 2)$ theory on the conifold allows a marginal deformation of the conifold complex structure at $\beta = 0$ [75, 76], namely

$$\det(w) = b, \quad (5.8.4)$$

where b is a complex parameter, see (5.2.5) in Sec. 5.2. This deformation preserves Ricci-flatness which ensures that 2D world-sheet theory is still conformal and has

no dynamical Λ scale, so the baryonic state $\det(w)$ which emerges in the deformed theory is massless.

Next we use the 2D-4D correspondence that ensures that at $\beta = 0$ and non-zero b there is a similar massless baryonic BPS state in 4D SQCD formed by four monopoles. At non-zero values of ξ , the monopoles are confined and this baryon is represented by a necklace configuration formed by four monopoles connected by confining strings, see Fig. 1.1b. At non-zero ξ this state becomes a well-defined localized state in 4D SQCD. Its size is determined by $1/\sqrt{\xi}$. Note, that this baryon is still a short massless BPS hypermultiplet at nonvanishing ξ because there is no other massless BPS state with the same quantum numbers to combine with to form a long multiplet¹³.

Now we can address the question: what is the origin of the marginal deformation parameter b in 4D SQCD? As was already mentioned in Sec. 5.1, it can be a marginal coupling constant which respects $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry or a VEV of a dynamical state. The coupling constant β is associated with the deformation of the Kähler class of the conifold rather than its complex structure. Moreover, note that the deformation parameter b cannot be a coupling associated with gauging of any symmetry of the global group (5.1.1) because it has non-zero Q_B . This leads us to the conclusion that b is a VEV of a dynamical state, namely the VEV of the massless stringy four-monopole baryon discussed above.

The baryon b exists only at the origin $\beta = 0$. As we move away from $\beta = 0$, it must decay on a point-like degenerate CMS which tightly wraps the origin. It decays into two massless bifundamental quarks which belong to the representation $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, 1)$ of the global group.

Thus we confirm that a new non-perturbative Higgs branch of real dimension $\dim \mathcal{H} = 4$ opens up in our 4D SQCD at the point $\beta = 0$ (up to 2π periodicity of the θ_{2d} angle) in the massless limit. Most likely the perturbative Higgs branch (5.1.2) formed by bifundamental quarks is lifted at $b \neq 0$. The point $\beta = b = 0$ is a phase transition point, a singularity where two Higgs branches meet. This issue needs future clarification.

¹³This is similar to what happens with the bifundamental quarks which remain massless BPS states as we switch on a non-zero ξ .

5.9 Detailing the 2D-4D correspondence

As was stated above, the sigma model (5.1.3) is an effective world-sheet theory on the semilocal non-Abelian string in four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ SQCD. Generally speaking, if we consider the bulk theory with the gauge group $U(N)$ and $N < N_f \leq 2N$ flavors of quarks, then the world-sheet theory is the weighted sigma model $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$. In this Chapter we focus on the case $N_f = 2N = 4$.

The mass parameters m_A of the world-sheet theory (5.1.3) are the same as quark masses in the bulk 4D SQCD. The two-dimensional coupling β (1.2.5) is also related to the four-dimensional complexified coupling constant τ_{SW} which is defined as

$$\tau_{SW} = i \frac{8\pi}{g^2} + \frac{\theta_{4d}}{\pi}. \quad (5.9.1)$$

Here θ_{4d} is the four-dimensional θ angle. We will start this section from derivation of the corresponding relation.

5.9.1 Relation between the couplings

In the weak coupling limit, the known classical-level relation between the couplings of the bulk and world-sheet theories is [6, 7]

$$\text{Re } \beta \approx \frac{4\pi}{g^2}. \quad (5.9.2)$$

But what is the exact formula?

To establish a relation applicable at the quantum level, we are going to use the 2D-4D correspondence – the coincidence of the BPS spectra of monopoles in 4D SQCD and kinks in 2D world-sheet $\mathbb{WCP}(N, \tilde{N})$ model, see Sec. 1.3. As was already noted the key technical reason behind this coincidence is that the VEVs of σ given by the exact twisted superpotential coincide with the double roots of the Seiberg-Witten curve [2] in the quark vacuum of the 4D SQCD [32, 45]. Below we use this coincidence to derive the exact relation between 4D coupling τ_{SW} and 2D coupling β in the theory at hand, $N_f = 2N = 4$, where both couplings do not run.

Mathematically, this can be formulated as follows. Consider the Seiberg-Witten curve of the bulk SQCD. The Seiberg-Witten (SW) curve for the $SU(N)$ gauge

theory with $N_f = 2N$ flavors was derived in [88, 89]. It has the form

$$y^2 = \prod_{a=1}^N (x - \phi_a)^2 + h(h+2) \prod_{i=1}^{N_f} (x + hm_S + m_i), \quad N_f = 2N. \quad (5.9.3)$$

Here,

$$h \equiv h(\tau_{\text{SW}})$$

is a modular function (E.2.1), see Appendix E. Moreover, τ_{SW} is defined in (5.9.1).

The parameter m_S in (5.9.3) is the average mass,

$$m_S = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} m_i. \quad (5.9.4)$$

The combination $h(h+2)$ is invariant under S and T duality transformations.

In fact, we are interested in the case when the gauge group is actually

$$\text{U}(N) = \text{SU}(N) \times \text{U}(1). \quad (5.9.5)$$

Therefore we can make a shift $x \rightarrow (x + hm_S)$, $\phi_a \rightarrow (\phi_a + hm_S)$ and get rid of m_S . Note, that in the $\text{U}(N)$ theory – in contrast to the $\text{SU}(N)$ case – the $\sum_a \phi_a$ does not have to vanish. The SW curve (5.9.3) then becomes

$$y^2 = \prod_{a=1}^N (x - \phi_a)^2 + h(h+2) \prod_{i=1}^{N_f} (x + m_i), \quad N_f = 2N. \quad (5.9.6)$$

Our quark vacuum is a singular point on the Coulomb branch where all the Seiberg-Witten roots are double roots, so the diagonal quarks q^{kP} with $k = P$ are massless. Upon switching on a nonvanishing ξ this singularity transforms into an isolated vacuum where the diagonal quarks develop VEVs (1.1.1).

To guarantee the coincidence of the BPS spectra, we require that the double roots of the four-dimensional Seiberg-Witten curve (5.9.6) coincide with the solutions of the two-dimensional vacuum equation (5.3.2). In asymptotically free versions of the theory the SW curve is simply the square of the vacuum equation of the two dimensional theory [32]. This ensures the coincidence of roots. We use the same idea for the conformal case at hand.

Consider the square of (5.3.2) in the following form:

$$\tilde{y}^2 = \left[\prod_{P=1}^N \left(\sqrt{2}\sigma + m_P \right) - e^{-2\pi\beta} \prod_{K=N+1}^{2N} \left(\sqrt{2}\sigma + m_K \right) \right]^2. \quad (5.9.7)$$

We want to make a connection with the SW curve (5.9.6). Equation (5.9.7) can be rewritten as

$$\tilde{y}^2 = \left[\prod_{P=1}^N (\sqrt{2}\sigma + m_P) + e^{-2\pi\beta} \prod_{K=N+1}^{2N} (\sqrt{2}\sigma + m_K) \right]^2 - 4e^{-2\pi\beta} \prod_{A=1}^{2N} (\sqrt{2}\sigma + m_A). \quad (5.9.8)$$

Let us compare this to the four-dimensional curve (5.9.6). We immediately identify

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\sigma, \\ h(h+2) &= -\frac{4e^{-2\pi\beta}}{(1+e^{-2\pi\beta})^2}, \\ y^2 &= \frac{\tilde{y}^2}{(1+e^{-2\pi\beta})^2}. \end{aligned} \quad (5.9.9)$$

We can also find the Coulomb branch parameters,

$$\phi_{1,2} = -\frac{\Delta m}{2} \frac{1-e^{-2\pi\beta}}{1+e^{-2\pi\beta}} \pm \sqrt{\frac{(\delta m_{12})^2 + e^{-2\pi\beta} (\delta m_{34})^2}{4(1+e^{-2\pi\beta})} - \Delta m^2 \frac{e^{-2\pi\beta}}{(1+e^{-2\pi\beta})^2}}, \quad (5.9.10)$$

where the mass notation is according to (5.3.6). Note that one of these Coulomb parameters diverges at $\beta = ik/2$, $k \in \mathbb{Z}$ (cf. our discussion in Appendix G).

The second relation in (5.9.9) can be viewed as a quadratic equation with respect to $e^{-2\pi\beta}$. Solving it, we obtain two solutions

$$\begin{aligned} e^{-2\pi\beta_1} &= \lambda(\tau_{\text{SW}} + 1), \\ e^{-2\pi\beta_2} &= \frac{1}{\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}, \end{aligned} \quad (5.9.11)$$

where we used (E.2.4) and (E.3.3). See Appendix E.3 for the definition of the λ functions. These two solutions are interchanged by the S duality transformation, see (E.3.4).

In the weak coupling limit $\text{Im } \tau_{\text{SW}} \gg 1$ the λ functions in (5.9.11) can be expanded according to (E.3.1). For the first option in (5.9.11) we have

$$e^{-2\pi\beta} \approx 16e^{\pi i(\tau_{\text{SW}}+1)}. \quad (5.9.12)$$

Recalling the definitions of the complexified couplings (1.2.5) and (5.9.1), we can

write down the weak coupling relation as follows:

$$r \approx \frac{4\pi}{g^2} - \frac{2 \ln(2)}{\pi}, \quad (5.9.13)$$

$$\theta_{2d} \approx -\theta_{4d} - \pi,$$

cf. Eq. (1.2.5). This is compatible with the known quasiclassical results. From this analysis we see that out of two options (5.9.11), the first one gives a correct weak coupling limit. Thus we can write down our final formula for the relation between the world-sheet and bulk couplings,

$$e^{-2\pi\beta} = \lambda(\tau_{\text{SW}} + 1). \quad (5.9.14)$$

To visualize this relation between 4D and 2D couplings see Fig. 5.5 and Fig. 5.6.

The result (5.9.14) corrects the relation claimed previously in [73] without derivation. It should be compared with the result [90] obtained in 2017 by Gerchkovitz and Karasik. The latter is not quite identical to (5.9.14). See the explanation below Eq. (5.9.15).

Note, that different possible forms of the SW curve can lead to different relations between 4D and 2D couplings. For example, in [88] the authors claimed that the shift $\tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 1$ is basically a change of the origin of the θ angle by π , so supposedly it does not change physics, but only changes the form of the SW curve. The curve (5.9.6) corresponds to the choice

$$g = \frac{\theta_2^4 + \theta_1^4}{\theta_2^4 - \theta_1^4}, \quad h(h+2) = -(1-g^2).$$

for the function g from [88]. One could have also chosen this function differently,

$$g = \frac{\theta_3^4 - \theta_1^4}{\theta_3^4 + \theta_1^4},$$

which would lead to

$$e^{-2\pi\beta} = \lambda(\tau_{\text{SW}}) \quad (5.9.15)$$

instead of (5.9.14). Relation (5.9.15) between 4D and 2D couplings has been obtained in [90] using localization. However, this formula uses an unconventional definition of the origin of the bulk θ_{4d} angle (θ_{4d} is shifted by π). In this Chapter we use the relation (5.9.14).

Finally we note that the formula relating the world sheet and bulk coupling constants may actually depend on renormalization scheme; see e.g. [91, Sec. 3.4 and Sec. 3.5] and [92, Sec. 9.2.1]. Here we have obtained the formula (5.9.14). Consider an alternative formula

$$e^{-2\pi\beta}\Big|_{\text{alt}} = -h(\tau_{\text{SW}})[h(\tau_{\text{SW}}) + 2]. \quad (5.9.16)$$

Similar (but not quite the same) expressions have appeared previously in e.g. [73]. Using the identity (E.3.5), we can see that the β couplings in (5.9.14) and (5.9.16) are related,

$$e^{-2\pi\beta}\Big|_{\text{alt}} = \frac{4 e^{-2\pi\beta}\Big|_{(5.9.14)}}{\left(1 + e^{-2\pi\beta}\Big|_{(5.9.14)}\right)^2} \quad (5.9.17)$$

These two couplings describe equivalent theories, see [91, eq. (3.104)]. A nontrivial relation between them seems to merely reflect different choices of a renormalization scheme.

5.9.2 Dualities

We have already seen that the world-sheet $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model (5.1.3) respects the duality transformation (5.1.4). In this subsection we will see how this transformation is connected to the S duality of the 4D SQCD, and discuss other dualities as well. We will define the S duality and $T^{\frac{1}{2}}$ transformations as

$$S : \tau_{\text{SW}} \rightarrow \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}}, \quad (5.9.18)$$

$$T^{\frac{1}{2}} : \tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 1.$$

The conventional T duality transformation $\tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 2$ is just a square of $T^{\frac{1}{2}}$.

The above transformations in Eq. (5.9.18) generate the modular group $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. For the theory with the $\text{SU}(2)$ gauge group the duality group is not a full $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, but rather a subgroup generated by S and T , the so-called $\Gamma^0(2)$ congruence subgroup of $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. It is not difficult to find the fundamental domain, see Fig. 5.5.

In [90] it was shown that 4D $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the $\text{U}(N)$ gauge group is not invariant under S duality. Say, our theory with the equal $\text{U}(1)$ charges of four quarks is mapped onto a SQCD with different $\text{U}(1)$ quark charges. However, SQCD with the $\text{U}(2)$ gauge group and equal $\text{U}(1)$ charges is invariant under the $ST^{\frac{1}{2}}S$

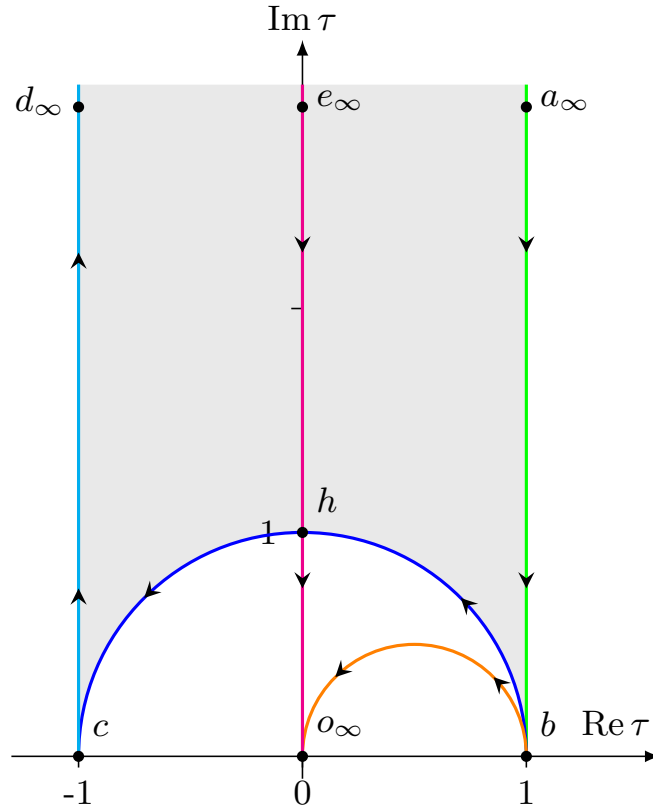


Figure 5.5: Fundamental domain of the duality group on the τ plane (shaded region). Shown are some particular trajectories in the space of the τ coupling. For the corresponding paths in the space of β see Fig. 5.6. The path $b \rightarrow o_\infty$ is an ST^{-1} image of $b \rightarrow a_\infty$. The path $h \rightarrow o_\infty$ is an S -image of $h \rightarrow e_\infty$.

transformation [90]. This transformation in the world-sheet theory language means that the theory is invariant under the sign change $\beta \rightarrow -\beta$.

In our convention for the θ_{4d} angle, see Eq. (5.9.14), the corresponding duality transformation is in fact an S transformation. Indeed, the θ_{4d} angle of [90] differs from ours by a shift by π (cf. “+1” in (5.9.14)), which is a $T^{\frac{1}{2}}$ transformation. Since without this shift, the duality transformation would be $ST^{\frac{1}{2}}S$, our duality transformation is in fact

$$T^{\frac{1}{2}} \cdot ST^{\frac{1}{2}}S \cdot T^{\frac{1}{2}} = S. \quad (5.9.19)$$

This identity can be checked explicitly.

Let us have a closer look at the S duality. Under the S transformation the 4D coupling is transformed as

$$\tau_{\text{SW}} \xrightarrow{S} \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}}, \quad (5.9.20)$$

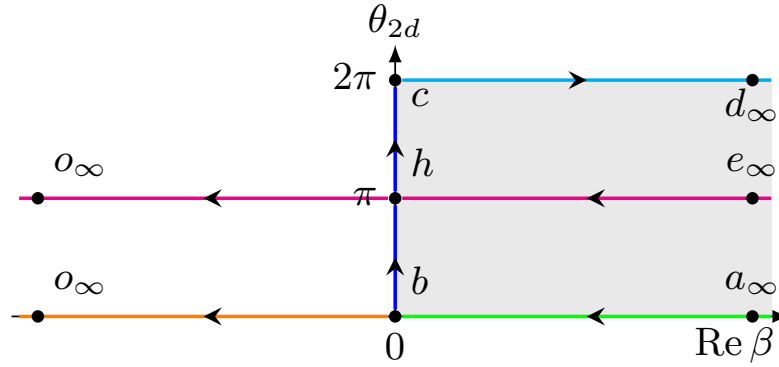


Figure 5.6: Fundamental domain of the duality group on the β plane (shaded region). Shown are some particular trajectories in the space of the β coupling. For the corresponding paths in the space of τ see Fig. 5.5. The path $b \rightarrow o_{\infty}$ is an ST^{-1} image of $b \rightarrow a_{\infty}$. The path $h \rightarrow o_{\infty}$ is an S image of $h \rightarrow e_{\infty}$. The trajectories are drawn modulo the relation $\theta_{2d} \sim \theta_{2d} + 2\pi$.

and the λ function in Eq. (5.9.14) becomes (see Eq. (E.3.4)):

$$\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1) \xrightarrow{S} \frac{1}{\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}, \quad (5.9.21)$$

so that under the S duality (cf. (5.1.4))

$$\beta \xrightarrow{S} -\beta. \quad (5.9.22)$$

Thus we have shown that the world-sheet duality (5.1.4) exactly corresponds to the S duality of the bulk theory. For an illustration, see Fig. 5.5 and 5.6.

The $\mathbb{WCP}(2, 2)$ self-dual point $\beta = 0$ corresponds to $\tau_{\text{SW}} = 1$. Under the four-dimensional S -duality transformation, this maps to $\tau_{\text{SW}} = -1$, which differs from the initial value $\tau_{\text{SW}} = 1$ by a 2π shift of the θ_{4d} angle. The four-dimensional self-dual point $\tau = i$ corresponds to $\beta = i/2$ in two dimensions, see also Appendix G.

5.10 Discussion

It has been known for a while now that the non-Abelian vortex string in four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ SQCD can become critical [29]. This happens because, in addition to four translational zero modes of a usual ANO vortex, this string exhibits six orientational and size zero modes. The target space of the effective world-sheet theory becomes $\mathbb{R}^4 \times Y_6$, where Y_6 is a non-compact six-dimensional Calabi-Yau manifold, the so-called resolved conifold.

This has opened a way to quantize the solitonic string and to study the underlying gauge theory in terms of an “effective” string theory – a kind of a “reverse holography” picture. It made possible quantitative description of the hadron spectrum [30, 31, 73, 93]. In particular, in [73, 93], the “Little String Theory” approach was used, namely a duality between the critical string on the conifold and the non-critical $c = 1$ string with the Liouville field and a compact scalar at the self-dual radius. At the self-dual point $\beta = 0$ of the world-sheet theory, the presence of the massless 4D baryonic hypermultiplet b was confirmed and low-lying massive string states were also found.

In view of these spectacular results, the question arises: can we see these states directly from the field theory? In the present Chapter we managed to do just that. To this end we employ the so-called 2D-4D correspondence. In the present case it means coincidence of the BPS spectra in the two-dimensional weighted sigma model, $\mathbb{WCP}(2, 2)$ (5.1.3), with the BPS spectrum in four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ SQCD with the $U(2)$ gauge group and four quark flavors in the quarks vacuum. This coincidence was observed in [32, 45] and later explained in [7, 8] using the picture of confined bulk monopoles which are seen as kinks in the world-sheet theory. Then, we can reduce the problem to study of the BPS spectrum of the two-dimensional model *per se*.

Starting from weak coupling, we progressed into the strong coupling domain and further into the dual weak coupling domain. We managed to build a consistent picture of the BPS spectra in these regions and curves of marginal stability separating these domains.

Consideration of the world-sheet kinks near the self-dual point $\beta = 0$ led us to a rediscovery of a non-perturbative Higgs branch emerging at that point. The multiplet that lives on this branch turns out to be exactly the baryon multiplet b found from string theory. Thus we have confirmed the consistency of the string theory picture describing the underlying gauge theory.

Moreover, in this model it was possible to observe the “instead-of-confinement” mechanism in action (see [94, 95] and a review [13]). At weak coupling $\beta \gg 1$ (β being the sigma model coupling) there are perturbative states which look like $\mathbb{CP}(1)$ model excitations. At strong coupling $\beta \sim 1$ they decay into kink-antikink pairs. As we move further, we enter the dual weak coupling domain $\beta \ll -1$, with its own

kinks and perturbative excitations. This evolution was described in the course of the present Chapter.

This world-sheet picture directly translates to the bulk theory. At weak coupling $g^2 \ll 1$ the perturbative spectrum of the four-dimensional $\mathcal{N} = 2$ SQCD contains screened quarks and Higgsed gauge bosons. There are also solitonic states – monopoles connected with non-Abelian flux tubes, forming mesons; but they are very heavy. As we progress into the strong coupling domain $g^2 \sim 1$, the screened quarks and Higgsed gauge bosons decay into confined monopole-antimonopole pairs. The “instead-of-confinement” phase is an alternative to the conventional confinement phase in QCD.

Similar instead-of-confinement phase appears if we move from large negative β towards the strong coupling at $\beta \sim -1$. In 4D SQCD this corresponds to moving from the origin in the τ -plane towards the upper semicircle shown in Fig. 5.5. It is important that S dualities in the world-sheet and bulk theories are directly related, see Sec. 5.9.

The results of this Chapter are published in the paper [27].

Conclusion

This thesis is devoted to strong coupling phenomena and confinement in supersymmetric gauge theories. The central object of our investigations was the non-Abelian string responsible for confinement of monopoles in supersymmetric cousins of QCD.

We started by recalling basic facts about the non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD with the gauge group $U(N)$ and $N_f \geq N$ quark flavors. These strings are similar to the Abrikosov-Nielsen-Olesen string, but possess additional “orientational” internal degrees of freedom (bosonic n^l as well as fermionic ξ^l).

We then tried to understand what happens to the non-Abelian strings and confined monopoles when we go to the $\mathcal{N} = 1$ SQCD. This was done by deforming the original $\mathcal{N} = 2$ theory by a mass term μ for adjoint matter. In the limit of large μ this theory flows to $\mathcal{N} = 1$ SQCD.

We started with the case $N_f = N$. We found a solution for the non-Abelian string and derived a two dimensional effective theory on the string world sheet which describes the dynamic of its orientational zero modes. This theory turns out to be bosonic $\mathbb{C}P(N - 1)$ model with a shallow potential generated by small quark mass differences. The fermionic superpartners ξ^l of the bosonic orientational moduli n^l present in the $\mathcal{N} = 2$ limit become heavy at large μ and decouple.

We addressed the question of what happen to confined 't Hooft-Polyakov monopoles at large μ . We showed that, if the quark mass differences are larger than (exponentially small) Λ_{CP} , the confined monopoles become unstable at large μ . However, if the quarks have equal masses, the confined monopoles survive in the $\mathcal{N} = 1$ QCD limit. This result is quite remarkable since $\mathcal{N} = 1$ QCD is in the non-Abelian regime and quasiclassically we do not expect monopoles in this theory. It also supports the picture of “instead-of-confinement” phase for $\mathcal{N} = 1$ QCD at strong coupling [13].

We then went on to generalize this construction to the case $N_f > N$. In the $\mathcal{N} = 2$ theory the non-Abelian string is semilocal in this case, i.e. it has additional size moduli corresponding to massless fields living on the string. It was found that after the μ -deformation the size moduli develop a potential and decouple, leaving behind a “local” non-Abelian string.

Next, we considered the non-Abelian string from the point of view of the world sheet model per se. We found that the μ -deformation induced from the bulk leads to the same consequences. Namely, the confined monopoles, seen in the world sheet theory as kinks interpolating between different vacua, indeed survive in the large μ limit provided that the quark mass differences Δm are zero (the latter play the role of a mass scale in the effective theory). Along the way we found the whole phase diagram on the $(\mu, \Delta m)$ plane, which shows a rich phase structure of the theory.

After that we took a U-turn at engaged into more symmetric developments. Namely, we studied non-Abelian string in the $\mathcal{N} = 2$ theory with the $U(N = 2)$ gauge group, $N_f = 4$ flavors of quarks and a Fayet-Iliopoulos term [28]. In this setting the world sheet theory is superconformal and critical. We have studied the BPS protected spectrum of the world sheet theory and then, using the 2D-4D correspondence, translated the results into the 4d SQCD terms.

At weak coupling the observed states are the perturbative gauge bosons and heavy solitonic objects (towers of dyons), together with their superpartners. When we enter into the strong coupling, the perturbative states and high-lying dyons decay into monopole-antimonopole pairs, each of which then stays tied by non-Abelian strings. This is a clear illustration of the “instead-of-confinement” mechanism.

Moreover, we have confirmed the existence of a massless b -baryon found earlier by treating the solitonic vortex as a critical superstring. This is an important result providing evidence for the consistency of such string theory approach.

The field theory approach developed here may also give us a way how to generalize these constructions to arbitrary N and N_f . This is certainly desirable. There is also an intriguing question of a connection with the AdS/CFT program. There are hints that may allow us to understand the reasons for or even prove some variants of the AdS/CFT hypothesis.

In fairness, it should be noted that here we did not consider the question of the spontaneously broken chiral symmetry. The thing is that in the $\mathcal{N} = 2$ gauge theory

chiral symmetry is broken already by the Yukawa couplings. Although this theory is called “supersymmetric QCD”, it is of course a bit different from the “original” QCD. It makes sense to investigate chiral symmetry in the $\mathcal{N} = 1$ SQCD, but this question is quite difficult and deserves a separate discussion.

This thesis broadens the understanding of non-Abelian strings in supersymmetric gauge theories, and of strong coupling phenomena in general. While it is not certain that this road will lead us to solving the confinement problem in the “real-world” QCD, it will certainly take us far. On the journey of understanding confinement in strongly coupled gauge theories, there are three major steps. The first one is the understanding of the basic nature of confinement. We can now say that we reached this stage in $\mathcal{N} = 2$ and $\mathcal{N} = 1$ theories. The second step is calculation of the hadron spectrum. In the light of the latest results (including some presented here), this step is underway in $\mathcal{N} = 2$ theories. The third step is derivation of the low energy theory of pion-nucleon interaction directly from the first principles. We are not there just yet, but this third step may be just within a hand’s reach.

APPENDIX A

Useful formulas in two spacetime dimensions

This Appendix contains some equations and conventions frequently used in two-dimensional physics.

Tensors in 2d:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -), \quad (\text{A.1.1})$$

$$\epsilon_{01} = +1, \quad \epsilon^{01} = -1, \quad (\text{A.1.2})$$

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}. \quad (\text{A.1.3})$$

Dual gauge field strength:

$$F^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu = F^{01} = -F_{01}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$F_{01} = \mathcal{E}, \quad (\text{A.1.5})$$

where \mathcal{E} is the electric field strength, and $\square = \partial_\mu \partial^\mu$.

Pure photon action:

$$\int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} = \int d^2x \frac{1}{2} A^\mu (\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu, \quad (\text{A.1.6})$$

Useful identity:

$$\begin{aligned} F^* \frac{1}{\square} F^* &= \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \frac{1}{\square} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta \\ &= \partial_\mu A_\nu \frac{1}{\square} (-g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \partial_\alpha A_\beta \\ &\simeq -A_\nu \frac{1}{\square} (-\square g^{\nu\beta} + \partial^\nu \partial^\beta) A_\beta \\ &= A_\mu A^\mu - A_\mu \frac{\partial^\nu \partial^\beta}{\square} A_\beta, \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

where \simeq involves integration by parts, i.e. it is an equality up to surface terms.

Gamma matrices:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{chir}} = \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1.8})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma_{\text{chir}}\} = 0. \quad (\text{A.1.9})$$

Derivatives:

$$\partial_L = \partial_t + \partial_z, \quad \partial_R = \partial_t - \partial_z, \quad (\text{A.1.10})$$

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - i A_\mu, \quad (\text{A.1.11})$$

$$\nabla = \gamma^\mu \nabla_\mu. \quad (\text{A.1.12})$$

Dirac fermion:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}, \quad \bar{\Xi} = \Xi^\dagger \gamma_0 = (\bar{\xi}_R, \bar{\xi}_L), \quad (\text{A.1.13})$$

$$\xi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_{\text{chir}})\Xi, \quad \xi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_{\text{chir}})\Xi. \quad (\text{A.1.14})$$

Relationship between Euclidean and Minkowski formulation.

Coordinates:

$$x_M^\mu = \{t_M, z\}, \quad (\text{A.1.15})$$

$$x_E^\mu = \{t_E, z\}.$$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -). \quad (\text{A.1.16})$$

The path integral in Minkowski formulation:

$$\mathcal{A}_M = \int D\varphi e^{iS_M} = \int D\varphi e^{i \int \mathcal{L}_M dt_M}. \quad (\text{A.1.17})$$

In passing to Euclidean, we substitute

$$\begin{aligned} (x^0)_M = t_M &\longrightarrow -it_E = -i(x^0)_E, \\ (k_0)_M &\longrightarrow i(k_0)_E, \\ (k_1)_M &\longrightarrow (k_1)_E, \\ \square &\longrightarrow -\Delta = -(\partial_0^2 + \partial_1^2), \end{aligned} \quad (\text{A.1.18})$$

$$\mathcal{L}_M \longrightarrow -\mathcal{L}_E,$$

$$iS_M \longrightarrow -S_E,$$

Oscillating path integrand \longrightarrow Exponentially decaying path integrand .

For example, for the free scalar

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}\varphi(\square + m^2)\varphi, \quad (\text{A.1.19})$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}\varphi(-\Delta + m^2)\varphi. \quad (\text{A.1.20})$$

The situation with the Dirac fermion is a bit trickier:

$$\begin{aligned} \gamma_M^0 &\longrightarrow \gamma_E^0, \\ \gamma_M^1 &\longrightarrow i\gamma_E^1, \end{aligned} \quad (\text{A.1.21})$$

so that

$$\begin{aligned} \{\gamma_M^\mu, \gamma_M^\nu\} = 2g^{\mu\nu} &\longrightarrow \{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}, \\ (\gamma^\mu k_\mu)_M &\longrightarrow i(\gamma^\mu k_\mu)_E. \end{aligned} \quad (\text{A.1.22})$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} \partial_L^M = \partial_{t_M} + \partial_z, \quad \partial_R^M &= \partial_{t_M} - \partial_z, \\ \partial_L^E = \partial_{t_E} - i\partial_z, \quad \partial_R^E &= \partial_{t_E} + i\partial_z. \end{aligned} \quad (\text{A.1.23})$$

$$\begin{aligned} \Psi^M &\longrightarrow \Psi^E, \\ \bar{\Psi}^M &\longrightarrow i\bar{\Psi}^E. \end{aligned} \quad (\text{A.1.24})$$

The fields Ψ^E and $\bar{\Psi}^E$ are no longer related by conjugation (in fact, there is no notion of conjugation in Euclidean spacetime).

For the photon,

$$\begin{aligned} (A_0)_M &\longrightarrow i(A_0)_E, \\ (A_1)_M &\longrightarrow (A_1)_E, \\ F_{01}^M &\longrightarrow iF_{01}^E, \\ (F^*)_M &\longrightarrow i(F^*)_E. \end{aligned} \quad (\text{A.1.25})$$

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^M F_M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{0j}^M F_{0j}^M - \frac{1}{4}F_{jk} F_{jk}, \quad (\text{A.1.26})$$

The Lagrangians:

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^E F_E^{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{0j}^E F_{0j}^E + \frac{1}{4}F_{jk} F_{jk}. \quad (\text{A.1.27})$$

APPENDIX B

Solution of the Dirac equation for superorientational modes

In this Appendix we solve Dirac equations (2.5.14). After a substitution

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{1-}(r) &= \frac{1}{r\phi_2(r)}\Psi(r), \\ \lambda_{(1)}(r) &= ig_2^2\Lambda(r)\end{aligned}$$

equations (2.5.14) reduce to

$$\begin{aligned}\frac{1}{rg_2^2\phi_1\phi_2}\partial_r\Psi &= \Lambda, \\ r\partial_r\Lambda + f_N\Lambda - \frac{\phi_1}{\phi_2}\Psi &= -\frac{\mu_2 f_N}{2}\frac{\phi_1}{\phi_2},\end{aligned}\tag{B.1.1}$$

which in turn gives an equation of second order for Ψ :

$$\partial_r^2\Psi - \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2}{N}(f - f_N)\right)\partial_r\Psi - g_2^2\phi_1^2\Psi = -\frac{\mu_2 f_N}{2}g_2^2\phi_1^2.\tag{B.1.2}$$

First let us solve the homogeneous version of (2.5.14), i. e. put $\mu_2 = 0$. The solutions are

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{1-} &= c\frac{f_N}{r\phi_2}, \\ \lambda_{(1)} &= c\frac{ig_2^2}{2}\left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1}\right).\end{aligned}$$

with some constant c . They correspond to $\Psi = f_N$; indeed, this is a solution for homogeneous version of (B.1.2). With the help of it we can reduce the order of this equation. Let us take

$$\Psi(r) = \mu_2 f_N(r) \left(\int_0^r dx \chi(x) + c_1 \right),$$

with some constant c_1 , then from (B.1.2) it follows that

$$\partial_r \chi + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{f_N} r^2 g_2^2 (\phi_1^2 - \phi_2^2) - 1 - \frac{2}{N} (f - f_N) \right) \chi = -\frac{1}{2} g_2^2 \phi_1^2. \quad (\text{B.1.3})$$

This is just an equation of the first order; its solution can be found very easily as

$$\chi = -\frac{g_2^2 r \phi_2^2}{2 f_N^2} \left(\int_0^r \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2}{\phi_2^2} f_N^2 + c_2 \right). \quad (\text{B.1.4})$$

Putting all this together, we obtain:

$$\bar{\psi}_{i-}(r) = -\mu_2 g_2^2 \frac{f_N(r)}{r \phi_2(r)} \left(\int_0^r dx \frac{x \phi_2^2(x)}{2 f_N^2(x)} \left(\int_0^x \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_N^2(y) + c_2 \right) + c_1 \right). \quad (\text{B.1.5})$$

with some new constant c_1 .

For this solution to behave well at the origin we have to put $c_1 = 0$. Considering the infinity, we should also require that

$$c_2 = -\int_0^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_N^2(y).$$

This gives

$$\bar{\psi}_{i-}(r) = \frac{\mu_2 g_2^2}{2} \frac{f_W(r)}{r \phi_2(r)} \int_0^r dx \frac{x \phi_2^2(x)}{f_W^2(x)} \int_x^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_W^2(y). \quad (\text{B.1.6})$$

for $\bar{\psi}_{i-}$ and

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)}(r) &\equiv \lambda_-^{22} + \lambda_-^{21} = \\ &= \frac{i \mu_2 g_2^2}{2} \left(\frac{g_2^2}{2} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \int_0^r dx \frac{x \phi_2^2(x)}{f_W^2(x)} \int_x^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_W^2(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_2}{\phi_1 f_W} \int_r^\infty \frac{dy}{y} \frac{\phi_1^2(y)}{\phi_2^2(y)} f_W^2(y) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1.7})$$

for $\lambda_{(1)}$. By direct substitution we verified that these modes indeed satisfy the Dirac equations.

Now let us consider Dirac equations (2.5.18) with the non-zero eigenvalue m_{or} . Applying the method developed above we find the solutions

$$\bar{\psi}_{i-}(r) = - \left(m_{or} - \mu_2 \frac{g_2^2}{2} \right) \frac{f_N(r)}{r\phi_2(r)} \int_0^r dx \frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)} \int_x^\infty dy \frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} \quad (\text{B.1.8})$$

for $\bar{\psi}_{i-}$ and

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)}(r) = & -i \frac{m_{or}}{2} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) - ig_2^2 \left(m_{or} - \mu_2 \frac{g_2^2}{2} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\phi_2}{\phi_1} \right) \times \\ & \int_0^r dx \frac{x\phi_2^2(x)}{f_N^2(x)} \int_x^\infty dy \frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} - i \left(m_{or} - \mu_2 \frac{g_2^2}{2} \right) \frac{\phi_2}{f_N\phi_1} \int_r^\infty dy \frac{f_N^2(y)\phi_1^2(y)}{y\phi_2^2(y)} \end{aligned} \quad (\text{B.1.9})$$

for $\lambda_{(1)}$.

One can see, that the first and the last terms in the last expression behave at the origin as $1/r$. We can choose eigenvalue m_{or} to insure that $1/r$ terms cancel out. This gives the expression (2.5.19) for the mass m_{or} .

APPENDIX C

Coefficients of the effective action of the $\mathbb{CP}(N - 1)$ model

In this Appendix we derive the effective action (4.3.23).

C.1 Brief overview

We consider the masses on a circle (4.1.3). The effective action is derived in the vicinity of the vacuum with $\text{Im } \sigma = 0$.

Consider bosonic loops. In the Lagrangian (4.1.13) we can expand the $\sigma - n$ interaction term as

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 &\approx \left| \sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right|^2 |n^i|^2 \\ &+ 2 \text{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i \right) |n^i|^2 \\ &- 2 \text{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \text{Im } m_i |n^i|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.1.1})$$

where $\delta\sigma$ are the vacuum fluctuations around the vacuum with $\text{Im } \sigma = 0$. The diagram for the $\text{Re } \sigma$ kinetic term is then proportional to $(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i)^2$, while the kinetic term for $\text{Im } \sigma$ is proportional to $(\text{Im } m_i)^2$. Calculation of the diagrams itself is straightforward, see below.

Calculation of the fermion loops is a bit trickier. The fermion mass matrix can be read off from (4.1.13). Say, for the flavor number i ,

$$M_i = \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i \right) \cdot \text{Id} + i (\text{Im } m_i) \cdot \gamma_{\text{chir}} \quad (\text{C.1.2})$$

where Id is the 2×2 identity matrix, and γ_{chir} is the two-dimensional analogue of the γ_5 . This γ_{chir} interferes with the traces over the spinorial indices. Say, the fermionic

contribution to the $\text{Re } \sigma$ kinetic term coming from the diagram on Fig. 4.4b is

$$\begin{aligned}
\text{---}\sigma\text{---}\bigcirc_{\xi}^{\xi}\text{---}\sigma &= -(i\sqrt{2})^2 \sum_i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - M_i} \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M_i} \right] \\
&= -2 \sum_i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M_i^\dagger}{k^2 - |M_i|^2} \frac{\not{k} + \not{q} + M_i^\dagger}{(k+q)^2 - |M_i|^2} \right] \\
&= -4 \sum_i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{(k \cdot (k+q)) + (\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i)^2 - (\text{Im } m_i)^2}{(k^2 - |M_i|^2)((k+q)^2 - |M_i|^2)} \right]
\end{aligned} \tag{C.1.3}$$

where $|M_i|^2 = (\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re } m_i)^2 + (\text{Im } m_i)^2$. Calculation of the integral itself is straightforward, see below. The rest of the diagrams with fermionic loops are treated the same way. In the end we arrive at (4.3.25).

Note that in the limit $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ supersymmetry is restored. In this case, in the vacuum $D = 0$, $\text{Im } \sigma = 0$ we have

$$M_{\xi_k}^2 = m_{n_k}^2 = |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k|^2, \tag{C.1.4}$$

and the coefficients (4.3.25) reduce to

$$\frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2} = \frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} = \frac{1}{e_\gamma^2} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{|\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k|^2} \tag{C.1.5}$$

$$b_{\gamma, \text{Im } \sigma} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k}. \tag{C.1.6}$$

The rest of this Appendix contains details of this derivation.

C.2 Fermionic loops

Lagrangian for one fermionic flavor interacting with the photon:

$$\mathcal{L}_{\text{ferm-A}} = i \bar{\Xi} \not{\nabla} \Xi - \bar{\Xi} M \Xi \tag{C.2.1}$$

Here, the fermion mass

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m - \lambda(\mu) & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\langle\bar{\sigma}\rangle - \bar{m} - \bar{\lambda}(\mu) \end{pmatrix} \\
&= \text{Re} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m \right) \cdot \text{Id} - i \text{Im} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m \right) \cdot \gamma_{\text{chir}},
\end{aligned} \tag{C.2.2}$$

where Id is the 2×2 identity matrix. We will use the following shorthand notation:

$$M = R - I \cdot i\gamma_{\text{chir}}, \quad M^\dagger = R + I \cdot i\gamma_{\text{chir}} \quad (\text{C.2.3})$$

$$|M|^2 = R^2 + I^2 \quad (\text{C.2.4})$$

Furthermore, we have to include the interaction with vacuum fluctuations of the σ field:

$$\mathcal{L}_{\text{ferm}} = i\bar{\Xi}\not{\nabla}\Xi - \bar{\Xi}M\Xi - \sqrt{2}\text{Re}(\sigma)\bar{\Xi}\Xi + i\sqrt{2}\text{Im}(\sigma)\bar{\Xi}\gamma_{\text{chir}}\Xi \quad (\text{C.2.5})$$

For a particular flavor number k , the mass is given by the formula

$$\begin{aligned} |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 &= |\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\mu)|^2 \\ R_{k^{\text{th}} \text{ flavor}} &= \text{Re}\left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k\right) - \lambda(\mu) \\ I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}} &= \text{Im}\left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k\right) \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

Recall that we use the mass parameters m_k on the circle (4.1.3).

C.2.1 Photon kinetic term

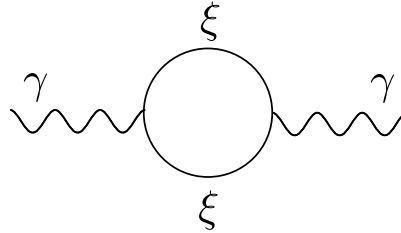


Figure C.1: Photon wave function renormalization

Consider the diagram from Fig. C.1. Corresponding contribution is

$$i\Pi^{\mu\nu} = -(+i)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - M} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \right] \quad (\text{C.2.7})$$

We will calculate this integral using the dimensional regularization. Now, using the identity

$$(\gamma^\mu k_\mu - M) (\gamma^\mu k_\mu + M^\dagger) = k^2 - |M|^2 + k_\mu \underbrace{(\gamma^\mu M^\dagger - M \gamma^\mu)}_{=0} \quad (\text{C.2.8})$$

we can rewrite the fermion propagators as

$$\frac{i}{\not{k} - M} = i \frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \quad (\text{C.2.9})$$

Let's calculate the trace in (C.2.7). We will use the following identities in $d = 2$ dimensions:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta] &= d (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] &= -\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma_{\text{chir}} \gamma^\nu \gamma_{\text{chir}}] = d g^{\mu\nu} \\ \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_{\text{chir}}] &= -d \epsilon^{\mu\nu} \\ \text{Tr} [\text{odd } \# \gamma^\mu] &= \text{Tr} [\gamma_{\text{chir}} \cdot \text{odd } \# \gamma^\mu] = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2.10})$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{q}] &= d (k^\mu q^\nu + k^\nu q^\mu - (k \cdot q) g^{\mu\nu}) \\ \text{Tr} [\gamma^\mu M^\dagger \gamma^\nu M^\dagger] &= d |M|^2 g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{C.2.11})$$

So, the trace in the numerator of (C.2.7) becomes

$$\begin{aligned} &\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + M^\dagger) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + M^\dagger)] \\ &= \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu (\not{k} + \not{q})] + \text{Tr} [\gamma^\mu M^\dagger \gamma^\nu M^\dagger] + \text{Tr} [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu M^\dagger] + \text{Tr} [\gamma^\mu M^\dagger \gamma^\nu (\not{k} + \not{q})] \\ &= d [k^\mu (k + q)^\nu + k^\nu (k + q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k + q) - |M|^2)] \end{aligned} \quad (\text{C.2.12})$$

The derivation to come follows closely [96, Sec. 7.5]. We will calculate the integral in (C.2.7) using the Feynman prescription:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - |M|^2) ((k + q)^2 - |M|^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - |M|^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - |M|^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.2.13})$$

where $l = k + xq$. In terms of l , the numerator of (C.2.7) is d times

$$\begin{aligned} 2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu} l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (|M|^2 + x(1-x)q^2) \\ + \text{terms linear in } l \end{aligned} \quad (\text{C.2.14})$$

Let us perform a Wick rotation:

$$l^0 = i l_E^0, \quad l_\mu l^\mu = -(l_E)^2 \quad (\text{C.2.15})$$

In terms of l_E the integral (C.2.7) becomes

$$i\Pi^{\mu\nu} = -i d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \times \frac{-g^{\mu\nu} \frac{2}{d} l_E^2 + g^{\mu\nu} l_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (|M|^2 + x(1-x)q^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (\text{C.2.16})$$

where we introduced $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, and used the fact that in d dimensions (see [96, p. 251 eq. (7.87)])

$$\int d^d l \ l^\mu l^\nu = \int d^d l \ \frac{1}{d} g^{\mu\nu} l^2 \quad (\text{C.2.17})$$

Now, we can evaluate the integrals over the momentum l_E (see [96, p. 251 eq. (7.85)]):

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \quad (\text{C.2.18})$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \quad (\text{C.2.19})$$

The integral (C.2.19) is divergent and would give a pole at $d = 2$, if it weren't for the factor $1 - d/2$ in (C.2.16):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{(-\frac{2}{d} + 1) l_E^2 g^{\mu\nu}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \\ &= g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (-\Delta) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &= g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (-|M|^2 + x(1-x)q^2) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \end{aligned} \quad (\text{C.2.20})$$

Combining this with (C.2.18) we get for the polarization operator (C.2.16):

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}(q) &= -d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \\
&\quad \times [g^{\mu\nu} (-|M|^2 + x(1-x)q^2) - 2x(1-x)q^\mu q^\nu \\
&\quad + g^{\mu\nu} (|M|^2 + x(1-x)q^2)] \\
&= (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \cdot \Pi(q^2)
\end{aligned} \tag{C.2.21}$$

where

$$\begin{aligned}
\Pi(q^2) &= \frac{2d\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{\Delta^{2-d/2}} \\
&\xrightarrow{d=2} \frac{4}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{1}{|M|^2}
\end{aligned} \tag{C.2.22}$$

To get the full fermionic contribution to the photon kinetic term, we have to sum over all fermionic flavors. Using (4.1.3) and (C.2.6) we get from (C.2.22) the photon normalization

$$\left(\frac{1}{e_\gamma^2} \right)_{\text{ferm}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{1}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{C.2.23}$$

where we used notation

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2. \tag{C.2.24}$$

C.2.2 Re σ kinetic term

Consider the diagram from Fig. C.2 with Re σ external legs. Corresponding contribution is

$$\begin{aligned}
iD_{\text{Re}\sigma} &= -(i\sqrt{2})^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - M} \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \right] \\
&= -2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \right]
\end{aligned} \tag{C.2.25}$$

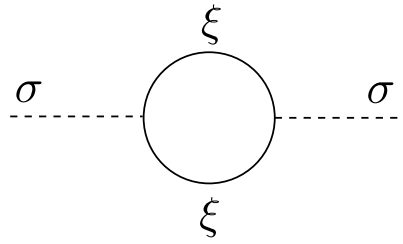


Figure C.2: Scalar wave function renormalization

Using the trace identities (C.2.10) we can evaluate the traces:

$$\begin{aligned}\text{Tr} [k\not{q}] &= d(k \cdot q) \\ \text{Tr} [M^\dagger M^\dagger] &= d(R^2 - I^2)\end{aligned}\tag{C.2.26}$$

where the real and imaginary masses R and I are defined in (C.2.3).

Again, we will evaluate the integral in dimensional regularization using the Feynman prescription (C.2.13). Introducing $l = k + xq$, we can rewrite the numerator of (C.2.25) as

$$\begin{aligned}\text{Num} &= d((k \cdot (k + q)) + (R^2 - I^2)) \\ &= d(l^2 - x(1 - x)q^2 + (R^2 - I^2)) + \text{terms linear in } l\end{aligned}\tag{C.2.27}$$

Introducing again $\Delta = |M|^2 - x(1 - x)q^2$, performing a Wick rotation (C.2.15) and using (C.2.18) and (C.2.19) we arrive at

$$\begin{aligned}D_{\text{Re}\sigma} &= -2d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{-l_E^2 - x(1 - x)q^2 + (R^2 - I^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= -2d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \frac{d}{2} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} + \frac{-x(1 - x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta^{2-d/2}} \right)\end{aligned}\tag{C.2.28}$$

Denote

$$1 - \frac{d}{2} = \varepsilon, \quad d = 2 - 2\varepsilon\tag{C.2.29}$$

Using the gamma function decomposition

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon} - \gamma\tag{C.2.30}$$

$$\Gamma(1 + \varepsilon) = \varepsilon\Gamma(\varepsilon) \approx 1 - \varepsilon\gamma\tag{C.2.31}$$

the first (singular) term of (C.2.28) can be rewritten as

$$\begin{aligned}
\text{singular} &= \frac{d}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \frac{d}{2} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} \\
&= \frac{2 - 2\varepsilon}{(4\pi)^{1-\varepsilon}} \Gamma(1 + \varepsilon) \frac{1}{\Delta^\varepsilon} (1 - \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon} \\
&= \frac{2}{4\pi} (1 - \varepsilon)^2 \Gamma(1 + \varepsilon) \left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \\
&\approx \frac{2}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon} (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon\gamma) \left(1 + \varepsilon \ln \frac{4\pi}{\Delta}\right) \\
&\approx \frac{2}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - 2 + \ln 4\pi - \ln \Delta\right)
\end{aligned} \tag{C.2.32}$$

We see that this expression is divergent. If we were to use Pauli-Villars regularization, then instead of (C.2.32) we would get

$$\text{singular} = \frac{2}{4\pi} (-1 + \ln M_{\text{uv}}^2 - \ln \Delta) \tag{C.2.33}$$

Either way, we will be interested only in $q^2 \rightarrow 0$ behavior, particularly in $O(q^2)$ terms, so we can throw the divergent terms out. The remaining integral is

$$\begin{aligned}
D_{\text{Re}\sigma}^{\text{fin}} &= -4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{\Delta}{|M|^2} + \frac{-x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta} \right) \\
&= -4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-x^2q^2 + (R^2 - I^2)}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right) \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} -4 \frac{1}{4\pi} q^2 \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{|M|^2} + \frac{1}{6} \frac{R^2 - I^2}{|M|^4} \right) \\
&= 2 \frac{1}{4\pi} q^2 \frac{1}{3} \frac{|M|^2 + 2I^2}{|M|^4}
\end{aligned} \tag{C.2.34}$$

To get the full fermionic contribution to the kinetic term, we have to sum over all fermionic flavors. Using (4.1.3) and (C.2.6) we get from (C.2.34) the normalization factor

$$\left(\frac{2}{e_{\text{Re}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[2 \frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 + 2I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}^2}{|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^4} \right] \tag{C.2.35}$$

or, equivalently,

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{M_{\xi_k}^2 + 2(\text{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k))^2}{M_{\xi_k}^4} \right] \tag{C.2.36}$$

where we used notation

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{th} \text{ flavor}}|^2 \quad (\text{C.2.37})$$

In the vacuum where $\text{Im } \sigma = 0$ we have

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re } \sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{M_{\xi_k}^2 + 2(\text{Im } m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} \right] \quad (\text{C.2.38})$$

C.2.3 Im σ kinetic term

The derivation follows closely that of the previous section.

Consider the diagram from Fig. C.2, only with $\text{Im } \sigma$ as external lines. Corresponding contribution is

$$\begin{aligned} iD_{\text{Im } \sigma} &= -(-\sqrt{2})^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\gamma_{\text{chir}} \frac{i}{\not{k} - M} \gamma_{\text{chir}} \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \right] \\ &= 2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\gamma_{\text{chir}} \frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma_{\text{chir}} \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.39})$$

Using the trace identities (C.2.10) we can evaluate the traces:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_{\text{chir}} \not{k} \gamma_{\text{chir}} \not{q}] &= -d(k \cdot q) \\ \text{Tr} [\gamma_{\text{chir}} M^\dagger \gamma_{\text{chir}} M^\dagger] &= d(R^2 - I^2) \end{aligned} \quad (\text{C.2.40})$$

where the real and imaginary masses R and I are defined in (C.2.3).

Again, we will evaluate the integral in dimensional regularization using the Feynman prescription (C.2.13). Introducing $l = k + xq$, we can rewrite the numerator of (C.2.25) as

$$\begin{aligned} \text{Num} &= d(-k \cdot (k + q)) + (R^2 - I^2) \\ &= d(-l^2 + x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)) + \text{terms linear in } l \end{aligned} \quad (\text{C.2.41})$$

Introducing again $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, performing a Wick rotation (C.2.15) and using (C.2.18) and (C.2.19) we arrive at

$$\begin{aligned} iD_{\text{Im } \sigma} &= 2d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2 + x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= 2d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \frac{d}{2} \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} + \frac{x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta^{2-d/2}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.2.42})$$

The story with singularities repeats again. We throw out the q^2 -independent terms and obtain

$$\begin{aligned}
iD_{\text{Im}\sigma}^{\text{fin}} &= 4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(-\ln \frac{\Delta}{|M|^2} + \frac{x(1-x)q^2 + (R^2 - I^2)}{\Delta} \right) \\
&= 4 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left(\frac{+x^2q^2 + (R^2 - I^2)}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right) \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} 4 \frac{1}{4\pi} q^2 \left(+\frac{1}{3} \frac{1}{|M|^2} + \frac{1}{6} \frac{R^2 - I^2}{|M|^4} \right) \\
&= 2 \frac{1}{4\pi} q^2 \frac{1}{3} \frac{3|M|^2 - 2I^2}{|M|^4}
\end{aligned} \tag{C.2.43}$$

To get the full fermionic contribution to the kinetic term, we have to sum over all fermionic flavors. Using (4.1.3) and (C.2.6) we get from (C.2.43) the normalization factor

$$\left(\frac{2}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[2 \frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{3|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 - 2I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}^2}{|M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^4} \right] \tag{C.2.44}$$

or, equivalently,

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{3M_{\xi_k}^2 - 2(\text{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k))^2}{M_{\xi_k}^4} \right] \tag{C.2.45}$$

where we used notation

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 \tag{C.2.46}$$

In the vacuum where $\text{Im}\sigma = 0$ we have

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \right)_{\text{ferm}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3M_{\xi_k}^2 - 2(\text{Im} m_k)^2}{M_{\xi_k}^4} \right] \tag{C.2.47}$$

C.2.4 $A_\mu - \text{Im}\sigma$ mixing

Consider the diagram from Fig. C.3. Corresponding contribution is

$$\begin{aligned}
iV_{\text{mix}} &= - (+i) (-\sqrt{2}) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - M} \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \gamma^{\text{chir}} \right] \\
&= \sqrt{2} i \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma^{\text{chir}} \right]
\end{aligned} \tag{C.2.48}$$

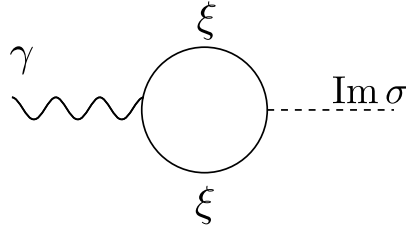


Figure C.3: Photon-scalar mixing

Using the trace identities (C.2.10) we can evaluate the traces:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [k\gamma^\mu(k + \not{q})\gamma_{\text{chir}}] &= 0 \\
 \text{Tr} [k\gamma^\mu M^\dagger\gamma_{\text{chir}}] &= d k_\nu (-R\epsilon^{\nu\mu} + iI g^{\nu\mu}) \\
 \text{Tr} [M^\dagger\gamma^\mu(k + \not{q})\gamma_{\text{chir}}] &= d (-R\epsilon^{\mu\nu} + iI g^{\mu\nu})(k_\nu + q_\nu) \\
 \text{Tr} [M^\dagger\gamma^\mu M^\dagger\gamma_{\text{chir}}] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{C.2.49}$$

where the real and imaginary masses R and I are defined in (C.2.3).

Again, we will evaluate the integral in dimensional regularization using the Feynman prescription (C.2.13). Introducing $l = k + xq$, we can rewrite the numerator of (C.2.25) as

$$\begin{aligned}
 \text{Num} &= d(k_\nu (-R\epsilon^{\nu\mu} + iI g^{\nu\mu}) + (-R\epsilon^{\mu\nu} + iI g^{\mu\nu})(k_\nu + q_\nu)) \\
 &= d(k_\nu (R\epsilon^{\mu\nu} + iI g^{\mu\nu}) + (-R\epsilon^{\mu\nu} + iI g^{\mu\nu})(k_\nu + q_\nu)) \\
 &= d(-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(2k_\nu + q_\nu)g^{\mu\nu}) \\
 &= d(-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(1 - 2x)q_\nu g^{\mu\nu}) + \text{terms linear in } l
 \end{aligned}
 \tag{C.2.50}$$

Introducing again $\Delta = |M|^2 - x(1 - x)q^2$, performing a Wick rotation (C.2.15) and

using (C.2.18) and (C.2.19) we arrive at

$$\begin{aligned}
V_{\text{mix}} &= \sqrt{2}d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(1-2x)q_\nu g^{\mu\nu}}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\
&= -\sqrt{2}d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(1-2x)q_\nu g^{\mu\nu}}{\Delta^{2-d/2}} \right) \\
&\stackrel{d=2}{=} -2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu} + iI(1-2x)q_\nu g^{\mu\nu}}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&= -2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{-Rq_\nu \epsilon^{\mu\nu}}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&\stackrel{q \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{R}{|M|^2} q_\nu \epsilon^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{C.2.51}$$

To get the full fermionic contribution to the kinetic term, we have to sum over all fermionic flavors. Using (4.1.3) and (C.2.6) we get from (C.2.51) the mixing coupling constant

$$\sqrt{2}b_{\gamma, \text{Im } \sigma} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{R}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{C.2.52}$$

or, equivalently,

$$b_{\gamma, \text{Im } \sigma} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\text{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k) - \lambda(\mu)}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{C.2.53}$$

where we used notation

$$M_{\xi_k}^2 \equiv |M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}|^2 \tag{C.2.54}$$

In the vacuum where $\text{Im } \sigma = 0$ this becomes

$$b_{\gamma, \text{Im } \sigma} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k - \lambda(\mu)}{M_{\xi_k}^2} \right] \tag{C.2.55}$$

This corresponds to the term in the effective Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{mix}} = \sqrt{2}b \text{Im } \sigma \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = -\sqrt{2}b \text{Im } \sigma F^* \tag{C.2.56}$$

C.2.5 Would-be $A_\mu - \text{Re } \sigma$ mixing

Consider the diagram like on Fig. C.3, only with $\text{Re } \sigma$ instead of $\text{Im } \sigma$. Corresponding contribution is

$$\begin{aligned} iV_{\text{mix Re}} &= -(+i)(-i\sqrt{2}) \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{\not{k} - M} \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - M} \right] \\ &= -\sqrt{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{\not{k} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{q} + M^\dagger}{k^2 - |M|^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.2.57})$$

Using the trace identities (C.2.10) we can evaluate the traces:

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\not{k} \gamma^\mu (\not{k} + \not{q})] &= 0 \\ \text{Tr} [\not{k} \gamma^\mu M^\dagger] &= d k_\nu (Rg^{\nu\mu} - iI\epsilon^{\nu\mu}) \\ \text{Tr} [M^\dagger \gamma^\mu (\not{k} + \not{q})] &= d (Rg^{\mu\nu} - iI\epsilon^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu) \\ \text{Tr} [M^\dagger \gamma^\mu M^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2.58})$$

where the real and imaginary masses R and I are defined in (C.2.3).

Again, we will evaluate the integral in dimensional regularization using the Feynman prescription (C.2.13). Introducing $l = k + xq$, we can rewrite the numerator of (C.2.25) as

$$\begin{aligned} \text{Num} &= d (k_\nu (Rg^{\nu\mu} - iI\epsilon^{\nu\mu}) + (Rg^{\mu\nu} - iI\epsilon^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu)) \\ &= d (k_\nu (Rg^{\mu\nu} + iI\epsilon^{\mu\nu}) + (Rg^{\mu\nu} - iI\epsilon^{\mu\nu}) (k_\nu + q_\nu)) \\ &= d (Rg^{\mu\nu} (2k_\nu + q_\nu) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu) \\ &= d (Rg^{\mu\nu} q_\nu (1 - 2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu) + \text{terms linear in } l \end{aligned} \quad (\text{C.2.59})$$

Introducing again $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, performing a Wick rotation (C.2.15) and

using (C.2.18) and (C.2.19) we arrive at

$$\begin{aligned}
V_{\text{mix Re}} &= i\sqrt{2}d \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{Rg^{\mu\nu} q_\nu(1-2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\
&= i\sqrt{2}d \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{Rg^{\mu\nu} q_\nu(1-2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{\Delta^{2-d/2}} \right) \\
&\stackrel{d=2}{=} i2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{Rg^{\mu\nu} q_\nu(1-2x) - iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&= i2\sqrt{2} \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{-iI\epsilon^{\mu\nu} q_\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\
&\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{I}{|M|^2} q_\nu \epsilon^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{C.2.60}$$

To get the full fermionic contribution to the kinetic term, we have to sum over all fermionic flavors. Using (4.1.3) and (C.2.6) we get from (C.2.60) the corresponding coupling constant

$$b_{\text{mix Re}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{I_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}}{M_{\xi_k}^2} \tag{C.2.61}$$

or, equivalently,

$$b_{\text{mix Re}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{2} \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Im}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k)}{M_{\xi_k}^2} \tag{C.2.62}$$

This vanishes exactly in the vacuum where $\text{Im}\sigma = 0$.

For the same reason, the diagram Fig. C.2 with one external leg $\text{Re}\sigma$ and another $\text{Im}\sigma$ (i.e. a would-be $\text{Re} - \text{Im}$ mixing) also vanishes.

C.3 Bosonic loops

C.3.1 Preliminaries

The bosonic Lagrangian is (Euclidean version)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{bos}} &= |\nabla_\mu n^i|^2 + iD(\bar{n}_i n^i - 2\beta) \\
&\quad + \sum_i \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 |n^i|^2 + v(\mu) \sum_i \text{Re} \Delta m_{i0} |n^i|^2 \tag{C.3.1}
\end{aligned}$$

We can expand the σ term as

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{2}\sigma - m_i \right|^2 &\approx \left| \sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right|^2 + 2 \operatorname{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \operatorname{Re} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right) \\ &\quad + 2 \operatorname{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \operatorname{Im} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3.2})$$

where $\delta\sigma$ is the vacuum fluctuations.

Introducing the masses of the n^k fields

$$m_{n_k}^2 = i\langle D \rangle + v(\mu)\Delta m_k + \left| \sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_k \right|^2 \quad (\text{C.3.3})$$

we can write down the relevant Lagrangian (Minkowski version)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{bos}} &= \left| \nabla_\mu n^i \right|^2 - \sum_i m_{n_k}^2 |n^i|^2 \\ &\quad + \sum_i 2 \operatorname{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \operatorname{Re} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right) |n^i|^2 \\ &\quad + \sum_i 2 \operatorname{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot \operatorname{Im} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right) |n^i|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.3.4})$$

For simplicity, in loop calculations we will be calculating Feynman diagrams for one single flavor, and only then summing up over all flavors. So, we will work with the Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{single flavor}} &= \left| \nabla_\mu n \right|^2 - M^2 |n|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot R |n|^2 \\ &\quad + 2 \operatorname{Im}(\sqrt{2}\delta\sigma) \cdot I |n|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.3.5})$$

where we have denoted

$$\begin{aligned} R &= \operatorname{Re} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right) \\ I &= \operatorname{Im} \left(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - m_i \right) \end{aligned} \quad (\text{C.3.6})$$

C.3.2 Photon kinetic term

Consider the diagram like on Fig. C.1 only with the bosonic loop. Corresponding contribution is

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} i(-(k^\mu + q^\mu) - k^\mu) \frac{i}{k^2 - M^2} i(-(k^\nu + q^\nu) - k^\nu) \frac{i}{(k+q)^2 - M^2} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} (2k^\mu + q^\mu)(2k^\nu + q^\nu) \frac{1}{k^2 - M^2} \frac{1}{(k+q)^2 - M^2} \end{aligned} \quad (\text{C.3.7})$$

We will calculate this integral using the dimensional regularization. The derivation to come follows closely [96, Sec. 7.5]. We will calculate the integral in (C.3.7) using the Feynman prescription (C.2.13):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - |M|^2)((k+q)^2 - |M|^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - |M|^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - |M|^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.3.8})$$

where $l = k + xq$. In terms of l , the numerator of (C.3.7) is

$$\begin{aligned} \text{Num} &= (2k^\mu + q^\mu)(2k^\nu + q^\nu) \\ &= (2l^\mu + (1-2x)q^\mu)(2l^\nu + (1-2x)q^\nu) \\ &= 4l^\mu l^\nu + (1-2x)^2 q^\mu q^\nu + \text{terms linear in } l \end{aligned} \quad (\text{C.3.9})$$

Let us perform a Wick rotation:

$$l^0 = il_E^0, \quad l_\mu l^\mu = -(l_E)^2 \quad (\text{C.3.10})$$

In terms of l_E the integral (C.3.7) becomes

$$i\Pi^{\mu\nu} = i \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{-l_E^2 \frac{4}{d} g^{\mu\nu} + (1-2x)^2 q^\mu q^\nu}{(l_E^2 + \Delta)^2} \quad (\text{C.3.11})$$

where we introduced $\Delta = |M|^2 - x(1-x)q^2$, and used the fact that in d dimensions (see [96, p. 251 eq. (7.87)])

$$\int d^d l \, l^\mu l^\nu = \int d^d l \, \frac{1}{d} g^{\mu\nu} l^2 \quad (\text{C.3.12})$$

Now, we can evaluate the integrals over the momentum l_E (see [96, p. 251 eq. (7.85)]):

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \quad (\text{C.3.13})$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \quad (\text{C.3.14})$$

We get for the polarization operator (C.3.11):

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{\Delta^{1-d/2}} \\ &\times \left[-2g^{\mu\nu} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \frac{(1-2x)^2 q^\mu q^\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3.15})$$

This expression has a pole at $d = 2$, but we can ignore it since we are interested only in the quadratic in q^μ part, and the pole doesn't contain such terms¹. So, the finite part at $d = 2$ is:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{fin}}^{\mu\nu}(q) &= \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left[2g^{\mu\nu} \ln \frac{|M|^2 - x(1-x)q^2}{|M|^2} + \frac{(1-2x)^2 q^\mu q^\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right] \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \left[-2g^{\mu\nu} \frac{-x(1-2x)q^2}{|M|^2 - x(1-x)q^2} + \frac{(1-2x)^2 q^\mu q^\nu}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \right] \\ &= (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \cdot \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \frac{(1-2x)^2}{|M|^2 - x(1-x)q^2} \\ &\underset{q \rightarrow 0}{\approx} (-q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \frac{1}{|M|^2} \end{aligned} \quad (\text{C.3.16})$$

To get the full bosonic contribution to the photon kinetic term, we have to sum over all flavors. Using (4.1.3) and (C.3.3) we get from (C.3.16) the photon normalization

$$\left(\frac{1}{e_\gamma^2} \right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{m_{n_k}^2} \right] \quad (\text{C.3.17})$$

where we used notation

$$m_{n_k}^2 \equiv M_{k^{\text{th}} \text{ flavor}}^2 \quad (\text{C.3.18})$$

¹This pole cancels anyway with the corresponding pole from the 1-loop diagram with two external legs and 4-point coupling.

C.3.3 Re σ kinetic term

Consider the diagram like on Fig. C.2 only with the scalar n loop and Re σ external legs. Corresponding contribution is

$$\begin{aligned} iD_{\text{Re}\sigma} &= (iR)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{i}{k^2 - M^2} \frac{i}{(k+q)^2 - M^2} \right] \\ &= R^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left[\frac{1}{k^2 - M^2} \frac{1}{(k+q)^2 - M^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3.19})$$

Introducing again $\Delta = M^2 - x(1-x)q^2$, performing a Wick rotation (C.2.15) and using (C.2.18) we arrive at

$$\begin{aligned} D_{\text{Re}\sigma} &= R^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \\ &= R^2 \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \\ &\stackrel{d=2}{=} R^2 \int_0^1 dx \frac{1}{4\pi} \frac{1}{M^2 - x(1-x)q^2} \\ &\underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4\pi} \frac{R^2}{M^4} \frac{1}{6} q^2 \end{aligned} \quad (\text{C.3.20})$$

To get the full bosonic contribution to the kinetic term, we have to sum over all flavors. Using (4.1.3) and (C.3.3) we get from (C.3.20) the normalization factor

$$\left(\frac{2}{e_{\text{Re}\sigma}^2} \right)_{\text{bos}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[2 \frac{1}{4\pi} \frac{4}{6} \frac{(\text{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle) - m_i)}{m_{n_k}^4} \right] \quad (\text{C.3.21})$$

or, equivalently,

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2} \right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{(\text{Re}(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle) - m_i)^2}{m_{n_k}^4} \right] \quad (\text{C.3.22})$$

In the vacuum where $\text{Im}\sigma = 0$ we have

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2} \right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{(\sqrt{2}\langle\sigma\rangle - \text{Re}m_i)^2}{m_{n_k}^4} \right] \quad (\text{C.3.23})$$

C.3.4 Im σ kinetic term

Calculation of the Im σ kinetic term is almost the same as for the Re σ , except for the vertex coefficient I instead of R . So, for a single flavor we get (cf. (C.3.20))

$$D_{\text{Im}\sigma} \underset{q \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{4\pi} \frac{I^2}{M^4} \frac{1}{6} q^2 \quad (\text{C.3.24})$$

while for the full bosonic contribution in the vacuum where Im $\sigma = 0$ we have

$$\left(\frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} \right)_{\text{bos}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{2}{3} \frac{(\text{Im } m_i)^2}{m_{n_k}^4} \right] \quad (\text{C.3.25})$$

C.3.5 Would-be mixings

There are a few more diagrams with bosonic loops which, however, do not contribute.

First, there is the Im σ – Re σ mixing diagram. However, it is proportional to

$$[\text{Im } \sigma - \text{Re } \sigma]_{\text{mixing}} \sim \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(\text{Re} \left(\sqrt{2} \langle \sigma \rangle - m_i \right) \right) \cdot \left(\text{Im} \left(\sqrt{2} \langle \sigma \rangle - m_i \right) \right) \right\} \quad (\text{C.3.26})$$

which vanishes in the vacuum with Im $\sigma = 0$.

Second, there are A_μ – Re σ mixing, and the A_μ – Im σ mixing diagrams. However, these are proportional to q^μ without any $\epsilon^{\mu\nu}$, and therefore they must vanish due to gauge invariance. (Actually we checked explicitly that they do indeed vanish.)

C.4 Final result

Collecting all the above results, we arrive at the effective action (4.3.23) (Minkowski notation)

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{e_{\text{Im}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Im } \sigma|^2 + \frac{1}{e_{\text{Re}\sigma}^2} |\partial_\mu \text{Re } \sigma|^2 - V(\sigma) - \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im}\sigma} \text{Im } \sigma F^* \right\}. \quad (\text{C.4.1})$$

The constants of these effective action are given by (C.2.23) and (C.3.17), (C.2.38) and (C.3.23), (C.2.47) and (C.3.25), (C.2.55), and we get (4.3.25).

APPENDIX D

Photon propagator in two spacetime dimensions

In this Appendix we discuss an issue of the photon mass compatible with gauge invariance.

D.1 Photon propagator in the generalized gauge

Let's start from a "bare" photon propagator in a generalized Feynman gauge:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^0 &= -i e_\gamma^2 \frac{1}{k^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \nu^{-1}) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \\ &= -i e_\gamma^2 \left[\frac{1}{k^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \nu^{-1} \frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.1.1})$$

As one can see, it generally contains the transverse and the longitudinal parts.

Now consider the photon-scalar mixing of Sec. (4.3.2) in the supersymmetric case. (The question considered here is most clear in this setting.) To derive the full photon propagator, we must consider a sum of diagrams iterating the photon and scalar $\text{Im } \sigma$ lines (see Fig. 4.5). Such an iteration gives for the full propagator

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^0 + G_{\mu\nu}^0 \omega^{\nu'\mu'} G_{\mu'\nu}^0 + \dots \quad (\text{D.1.2})$$

where the quantity $\omega^{\nu'\mu'}$ is given by the $\text{Im } \sigma$ line and two vertices (an "amputated" photon-scalar-photon diagram),

$$\begin{aligned} \omega^{\alpha\beta} &= i\sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} \varepsilon^{\alpha\beta'} k_{\beta'} \cdot \left(-\frac{i}{2} \right) e_{\text{Im } \sigma}^2 \frac{1}{k^2} \cdot i\sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} k_{\alpha'} \varepsilon^{\alpha'\beta} \\ &= -i e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma}^2 \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

This is a purely transverse quantity, and therefore only transverse part of (D.1.1) gets renormalized. We find for the full photon propagator:

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = -i e_\gamma^2 \left[\frac{1}{k^2 - m_\gamma^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \nu^{-1} \frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right] \quad (\text{D.1.4})$$

where the photon mass equals that of $\text{Im } \sigma$,

$$m_\gamma^2 = m_{\text{Im } \sigma}^2 = e_\gamma^2 e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma}^2 = 4\Lambda^2. \quad (\text{D.1.5})$$

We obtained the result (D.1.4) at first by direct calculation, and then by applying a general formula from [97, page 325 equation 7-17]¹, the result is of course the same. The bare propagator (D.1.1) is renormalized in such a way that the pole in front of the transversal part is shifted, while the longitudinal part stays unchanged.

Formula (D.1.4) can be compared with a massive photon propagator in a general gauge (see, for example, [97, page 619 equation 12-226])

$$G_{\mu\nu}^{\text{mass}} = -i e_\gamma^2 \frac{1}{k^2 - m_\gamma^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \nu^{-1}) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - m_\gamma^2 / \nu} \right). \quad (\text{D.1.6})$$

One can see that (D.1.4) and (D.1.6) do not generally coincide. Why so? Turns out that there is more than one way to give the photon a mass in two spacetime dimensions. The propagator (D.1.6) corresponds to just one of them, namely the Higgs mechanism.

D.2 Photon masses

Consider usual action of a massive vector field in Minkowski spacetime

$$S = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} A_\mu A^\mu \right\}. \quad (\text{D.2.1})$$

This action by itself is not gauge invariant. (It could have been turned into a gauge invariant action by means of Higgs mechanism.) The generalized photon propagator is given by (D.1.6).

However, in two spacetime dimensions there is another way to introduce the photon mass. This other option does not destroy gauge invariance. Consider the effective action for the Schwinger model (with fermions integrated out):

$$\begin{aligned} S_{\text{schw}} &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} F^* \frac{1}{\square} F^* \right\} \\ &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{m_\gamma^2}{2} A_\mu \frac{\partial^\nu \partial^\beta}{\square} A_\beta \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.2.2})$$

¹Note a different photon field normalization in [97].

For the transition here see Eq. (A.1.7). Adding to the Lagrangian in (D.2.2) a gauge fixing term

$$-\frac{\nu}{2}(p_\mu A^\mu)^2 \quad (\text{D.2.3})$$

we can write generalized photon propagator

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = -i \left[\frac{1}{k^2 - m_\gamma^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \nu^{-1} \frac{k^\mu k^\nu}{k^4} \right] \quad (\text{D.2.4})$$

The action (D.2.2) appears to be non-local, but actually it is not. In two dimensions, the vector field can be parametrized as

$$A_\mu = \partial_\mu \alpha + \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (\text{D.2.5})$$

In this parametrization (D.2.2) becomes

$$\begin{aligned} S_{\text{schw}} &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} (\square \phi)(\square \phi) + \frac{m_\gamma^2}{2} \phi \square \phi \right\} \\ &= \int d^2x \frac{1}{2} \phi (\square + m_\gamma^2) \square \phi \end{aligned} \quad (\text{D.2.6})$$

Equation of motion for the ϕ field is

$$\square(\square + m_\gamma^2)\phi = 0. \quad (\text{D.2.7})$$

So, it would appear that the field ϕ has two modes, one massless and the other massive. However, the massless mode is unphysical, since it corresponds to a trivial vector field strength:

$$F^* = -F_{01} = -(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = \square \phi, \quad (\text{D.2.8})$$

$$\square \phi = 0 \iff F_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{D.2.9})$$

D.3 Our model

Let's start from our effective action (4.3.23) in Minkowski spacetime. As we derived previously, if we start from the photon propagator in a generalized gauge (D.1.1) and then diagonalize our effective action, we will get exactly (D.2.4) multiplied by e_γ^2 . We do not get (D.1.6), *and this is a good thing*, since it is (D.2.4) that corresponds to the gauge invariant effective action in our case, and not (D.1.6).

Let's look at this situation more closely. First, drop from (4.3.23) the terms with $\text{Re } \sigma$ and $V(\sigma)$, which are irrelevant for our purposes:

$$S_{\text{eff}} = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{e_{\text{Im } \sigma}^2} |\partial_\mu \text{Im } \sigma|^2 + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} \text{Im } \sigma F^* \right\}, \quad (\text{D.3.1})$$

The scalar field enters (D.3.1) at most quadratically, so it can be integrated out using its equation of motion:

$$-\frac{2}{e_{\text{Im } \sigma}^2} \square \text{Im } \sigma + \sqrt{2} b_{\gamma, \text{Im } \sigma} F^* = 0 \implies \text{Im } \sigma = \frac{1}{\square} \frac{1}{\sqrt{2}} e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma} F^* \quad (\text{D.3.2})$$

Substituting this back into (D.3.1) gives

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}} &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4e_\gamma^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma}^2 F^* \frac{1}{\square} F^* \right\} \\ &= \frac{1}{e_\gamma^2} \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_\gamma^2}{2} F^* \frac{1}{\square} F^* \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.3.3})$$

where $m_\gamma^2 = e_\gamma^2 e_{\text{Im } \sigma}^2 b_{\gamma, \text{Im } \sigma}^2$. This is obviously equivalent to (D.2.2).

APPENDIX E

Modular functions

In this Appendix we discuss some properties of the modular functions used in Chapter 5.

E.1 θ functions

Let us introduce the nome

$$q = e^{i\pi\tau_{\text{SW}}} = e^{2i\pi\tau} \quad (\text{E.1.1})$$

where τ_{SW} is the gauge coupling defined in (5.9.1). We define θ -functions as in [2]. In terms of the nome (E.1.1) they are

$$\begin{aligned} \theta_1(q) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{(n+1/2)^2} = 2q^{1/4}(1 + q^2 + \dots), \\ \theta_2(q) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = 1 - 2q + \dots, \\ \theta_3(q) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2q + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.1.2})$$

There are many relations among these, e.g. [98]

$$\theta_3^4 = \theta_2^4 + \theta_1^4. \quad (\text{E.1.3})$$

The θ functions (E.1.2) are obviously invariant under T transformation $\tau_{\text{SW}} \rightarrow \tau_{\text{SW}} + 2$ (5.9.18). Moreover, the following identities [98, eq. (8.10)] hold for the $T^{\frac{1}{2}}$ (5.9.18) transformation:

$$\begin{aligned} \theta_1(\tau_{\text{SW}} + 1) &= e^{\frac{i\pi}{4}} \theta_1(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_2(\tau_{\text{SW}} + 1) &= \theta_3(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_3(\tau_{\text{SW}} + 1) &= \theta_2(\tau_{\text{SW}}). \end{aligned} \quad (\text{E.1.4})$$

Under S (5.9.18), we have [98, eq. (8.9)]

$$\begin{aligned}\theta_1\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) &= \sqrt{-i\tau_{\text{SW}}}\theta_2(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_2\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) &= \sqrt{-i\tau_{\text{SW}}}\theta_1(\tau_{\text{SW}}), \\ \theta_3\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) &= \sqrt{-i\tau_{\text{SW}}}\theta_3(\tau_{\text{SW}}),\end{aligned}\tag{E.1.5}$$

where $\sqrt{-i\tau_{\text{SW}}} = +1$ for $\tau_{\text{SW}} = i$. Here we slightly abused notation by using the same letter θ as in (E.1.2).

E.2 The h function

From the θ functions we can build modular functions. In the SW curve (5.9.3) the h function was used, which is defined as [89]

$$h(\tau_{\text{SW}}) = \frac{2\theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}{\theta_2^4(\tau_{\text{SW}}) - \theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}\tag{E.2.1}$$

or, in terms of the nome (E.1.1),

$$h(q) = 32q + O(q^2).\tag{E.2.2}$$

The S -transformation acts on (E.2.1) as

$$h\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) = -2 - h(\tau_{\text{SW}}),\tag{E.2.3}$$

and the combination

$$h \cdot (h + 2) = \frac{4\theta_1^4\theta_2^4}{(\theta_2^4 - \theta_1^4)^2}\tag{E.2.4}$$

is invariant with respect to S and T transformations. Under the half shift $T^{\frac{1}{2}}$ it becomes

$$h(\tau_{\text{SW}} + 1) \cdot (h(\tau_{\text{SW}} + 1) + 2) = -\frac{4\theta_3^4(\tau_{\text{SW}}) \cdot \theta_2^4(\tau_{\text{SW}})}{(\theta_3^4(\tau_{\text{SW}}) + \theta_1^4(\tau_{\text{SW}}))^2}.\tag{E.2.5}$$

E.3 The λ function

In Chapter 5 we have also used the modular λ function (see e.g. (5.9.14)) which can be expressed as

$$\lambda(\tau_{\text{SW}}) = \frac{\theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}{\theta_3^4(\tau_{\text{SW}})} = 16q - 128q^2 + O(q^3) \quad (\text{E.3.1})$$

where q is the nome (E.1.1). This function is again invariant under the T transformation, while under S it transforms as

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}}\right) = 1 - \lambda(\tau_{\text{SW}}). \quad (\text{E.3.2})$$

Under the half shift (E.1.4) λ becomes

$$\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1) = \frac{\lambda(\tau_{\text{SW}})}{\lambda(\tau_{\text{SW}}) - 1} = -\frac{\theta_1^4(\tau_{\text{SW}})}{\theta_2^4(\tau_{\text{SW}})}. \quad (\text{E.3.3})$$

From (E.3.2) and (E.3.3) we see that under the S transformation

$$\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1) \xrightarrow{S} \lambda\left(-\frac{1}{\tau_{\text{SW}}} + 1\right) = \frac{1}{\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}. \quad (\text{E.3.4})$$

Using (E.2.4) and (E.3.3) we can write down a relation between λ and h function,

$$-h(\tau_{\text{SW}})[h(\tau_{\text{SW}}) + 2] = \frac{4\lambda(\tau_{\text{SW}} + 1)}{(1 + \lambda(\tau_{\text{SW}} + 1))^2}. \quad (\text{E.3.5})$$

The inverse of $\lambda(\tau)$ is given in terms of the hypergeometric functions

$$\tau = i \frac{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; 1 - \lambda)}{{}_2F_1(1/2, 1/2; 1; \lambda)}. \quad (\text{E.3.6})$$

In terms of the complete elliptic integral of the first kind $K(k)$,

$$\tau = i \frac{K(\sqrt{1 - \lambda})}{K(\sqrt{\lambda})}. \quad (\text{E.3.7})$$

APPENDIX F

More on the central charge of the $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model

In this Appendix we discuss some additional properties of the central charge and secondary curves of marginal stability in the $\mathbb{WCP}(2, 2)$ model.

F.1 Secondary curves

Now we will investigate decays of particles, not covered in Sec. 5.6, and draw the corresponding CMS. Do this end, one has to keep in mind that the BPS kink central charge (5.3.4) is, generally speaking, a multi-branched function. On the β plane, it can have branch cuts originating at the points where the kink mass develops some kind of a singularity. (This could be ignored while considering the primary CMS (5.6.2) and (5.6.3), but not for the present task.) From the explicit expressions for the kink mass we see that it is singular at the origin (see Eq. (5.5.13) and (5.5.14)) and at the AD points (see Eq. (5.3.19)). Therefore there are cuts originating from these points (modulo the 2π periodicity in the θ_{2d} direction).

F.1.1 “Extra” kink decays

When we go from strong coupling into the weak coupling domain $\beta \gg 0$, the kinks $[Z_P]$, $P = 1, 2$ do not decay (they become massless at the AD points on the right curve (5.6.2), and they can be “dragged” through these points, where these kinks are the only massless particles and therefore absolutely stable [87]). On the other hand, the kinks $[Z_K]$, $K = 3, 4$ have masses of the order $|m_K - \bar{m}|$, and therefore they could decay into, say, a pair $[Z_P] + \text{bifundamental}$. They can decay via the process

$$[Z_K] \rightarrow [Z_P] + [-i(m_P - m_K)]. \quad (\text{F.1.1})$$

In the dual weak coupling domain $\beta \ll 0$, the P -kinks decay via

$$[Z_P] \rightarrow [Z_K] + [i(m_P - m_K)]. \quad (\text{F.1.2})$$

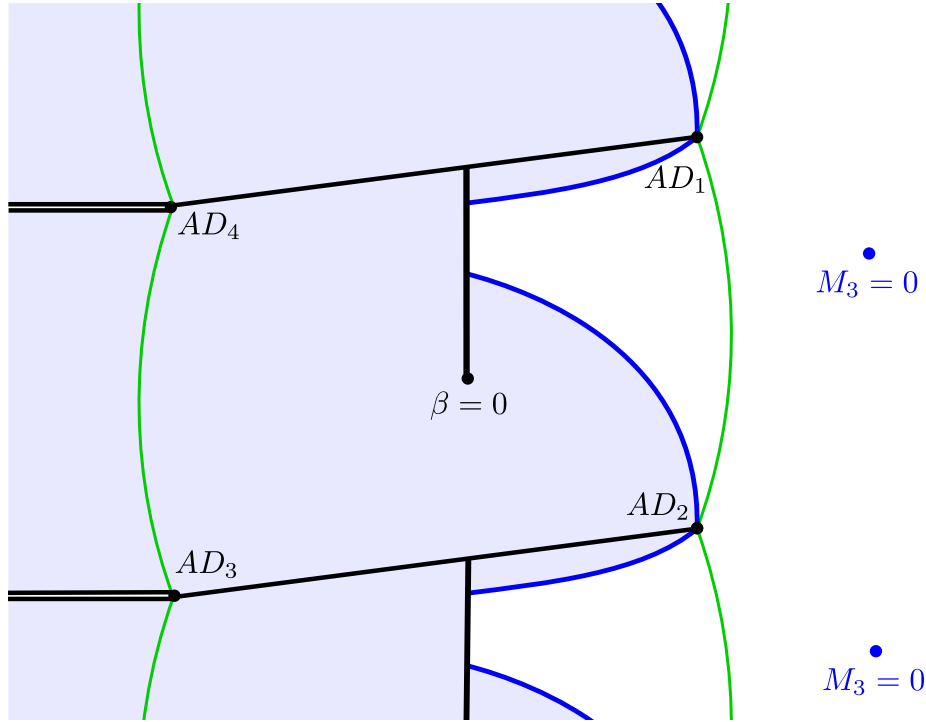


Figure F.1: Complex plane of β . Schematic representation of the CMS structure for the M_3 kink decay. (Picture for M_4 is qualitatively the same.) Thin green lines are the primary curves. Thick black lines are the cuts. Thick blue lines are the CMS for the decays of M_3 . Blue-shaded region is the domain of existence of M_3 . The blue points on the right are where the mass of would-be M_3 state would vanish, see (F.1.4).

Moreover, under some conditions these kinks must decay, otherwise they could become massless at some points at weak coupling. To see this, consider a K -kink central charge at weak coupling in the $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$ limit (5.3.10). Formula (5.3.20) can be straightforwardly generalized for K -kinks as

$$Z_K \approx -\beta_{CP(1)} \cdot \delta m_{12} + i(m_K - \bar{m}) + \frac{\delta m_{12}}{\pi}, \quad (\text{F.1.3})$$

so that the mass of the corresponding state is the limit $\text{Re } \beta \equiv r \gg 1$ is given by

$$M_K \approx |\delta m_{12}| \cdot \left(r - \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\Delta m}{\delta m_{12}} \right| - \frac{1}{\pi} - \text{Im} \frac{m_K - \bar{m}}{\delta m_{12}} \right). \quad (\text{F.1.4})$$

We see that for certain mass choices there are points at weak coupling (r.h.s. domain $\beta \gg \beta_{AD}$) where M_K vanish. Therefore, these states must decay. Analogously, M_P kinks ($P = 1, 2$) may become massless in the dual weak coupling domain

$\beta \ll -\beta_{AD}$. Their mass in this limit is given by

$$M_P \approx |\delta m_{34}| \cdot \left(r - \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\Delta m}{\delta m_{34}} \right| - \frac{1}{\pi} + \text{Im} \frac{m_P - \tilde{m}}{\delta m_{34}} \right). \quad (\text{F.1.5})$$

The CMS equation for both decays (F.1.1) and (F.1.2) is

$$\text{Re} \left(\frac{Z_P}{m_P - m_K} \right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re} \left(\frac{Z_K}{m_P - m_K} \right) = 0. \quad (\text{F.1.6})$$

We must add to this equation the condition that a particle cannot decay into heavier particles:

$$|Z_K| = |Z_P| + |-i(m_P - m_K)| \quad \text{for the decay (F.1.1)}, \quad (\text{F.1.7})$$

$$|Z_P| = |Z_K| + |i(m_P - m_K)| \quad \text{for the decay (F.1.2)}.$$

In the case when m_1, m_2, m_K for some K lie on a straight line in the complex plane, the CMS for the decay (F.1.1) *coincides with the primary curve* (5.6.2). Conversely, when for some P the masses m_P, m_3, m_4 are aligned, the CMS for (F.1.2) coincides with the dual primary curve (5.6.3).

The CMS equation (F.1.6) simplifies in the $\mathbb{CP}(1)$ limit (5.3.10). Using a simple generalization of the approximate central charge formula (5.3.19) we can rewrite this equation near an AD point as:

$$\text{Re} \left[\frac{m_1 - m_2}{m_P - m_K} \cdot (\beta - \beta_{AD_P})^{3/2} \right] = 0 \quad (\text{F.1.8})$$

for $P = 1, 2$. (The indices of AD points follow Fig. 5.4.) This equation is equivalent to

$$\cos \left(\frac{3}{2} \arg(\beta - \beta_{AD_P}) + \phi_{PK} \right) = 0, \quad \phi_{PK} = \arg \left(\frac{m_1 - m_2}{m_P - m_K} \right). \quad (\text{F.1.9})$$

The solution is represented by lines originating from the AD_P point and going out at angles

$$\arg(\beta - \beta_{AD_P}) = -\frac{2}{3} \phi_{PK} - \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{F.1.10})$$

From this equation we see that, generally speaking, three different CMS originate in the Argyres-Douglas point AD_P (this is very similar to the $\mathbb{CP}(1)$ case). However, only some of them satisfy the additional condition (F.1.7). Namely, for (F.1.7) to be true, we have to impose

$$\arg Z_P - \arg(-i(m_P - m_K)) \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (\text{F.1.11})$$

This condition leaves us with even n in (F.1.10). These are the CMS for the decay (F.1.1) near the point AD_P .

Let us look at the equation (F.1.10) more closely. Depending on ϕ_{PK} , the qualitative picture changes. When it is zero, then the CMS is stretched between AD_1 and AD_2 and coincides with the primary curve (5.6.2). When $\phi_{PK} \in [-\pi/2, 0)$, the CMS bends into the strong coupling domain, and the kink M_K cannot penetrate into the weak coupling domain at $\beta > 0$. If $\phi_{PK} \in (0, \pi/2]$, the CMS for the K -kink decay goes into the weak coupling domain, and the K -kink is present in some subregion of the weak coupling at $\beta > 0$. But of course it cannot reach the region where its mass would vanish, see (F.1.4). Other values of ϕ_{PK} are recovered by relabeling $1 \leftrightarrow 2$. On Fig. F.1 we present the CMS for the $[Z_3]$ kink decays (CMS for decays of $[Z_4]$ is qualitatively the same).

The same argument can be applied to the P -kinks near the dual weak coupling domain at $\beta < 0$. If $\arg((m_4 - m_3)/(m_P - m_K))$ is zero, the CMS for the decay (F.1.2) coincides with the dual primary curve (5.6.3). When this arg is positive, the P -kinks cannot penetrate into the dual weak coupling region. When it is negative, the P -kinks are present in a subregion of the dual weak coupling domain, but they never reach the regions where their masses would vanish.

F.1.2 Decay of strong coupling tower of higher winding states

Now we briefly discuss decays of the $n \neq 0$ states of the tower (5.5.15). In the limit $\Delta m \gg \delta m_{12}, \delta m_{34}$ they can decay into the states of lower winding with emission of bifundamentals. For example, if $n > 0$, some of the decays are

$$\begin{aligned} [Z_1^{[n]}] &\rightarrow [Z_4^{[n]}] + [i(m_1 - m_4)], \\ [Z_4^{[n]}] &\rightarrow [Z_2^{[n-1]}] + [i(m_1 - m_3)]. \end{aligned} \tag{F.1.12}$$

More generally, the $n > 0$ states can decay as

$$\begin{aligned} [Z_P^{[n]}] &\rightarrow [Z_K^{[n]}] + [i(m_P - m_K)], \\ [Z_K^{[n]}] &\rightarrow [Z_{\tilde{P}}^{[n-1]}] + [i(m_{\tilde{P}} - m_{\tilde{K}})], \end{aligned} \tag{F.1.13}$$

where P, \tilde{P} is some permutation of indices 1, 2, and K, \tilde{K} is a permutation of 3, 4. The states with $n < 0$ decay similarly.

The corresponding CMS satisfies the equation

$$\operatorname{Re} \left(\frac{Z_P^{[n]}}{m_P - m_K} \right) = 0, \quad \operatorname{Re} \left(\frac{Z_K^{[n]}}{m_{\tilde{P}} - m_{\tilde{K}}} \right) = 0. \quad (\text{F.1.14})$$

Far from the origin, when $\beta \gg 1$ in the $\mathbb{CP}(1)$ limit (5.3.10), the equations (F.1.14) differ from (F.1.6) only by $O(\delta m_{12}/\Delta m, \delta m_{34}/\Delta m)$ terms; therefore, the corresponding CMS should be close on each other, at least in some region.

Careful numerical studies show that there are two possibilities: either the CMS (F.1.14) form closed curves lying inside the strong coupling domain, or they form spirals that go to the origin. In any case, it follows that the higher winding states considered here live exclusively inside the strong coupling domain and cannot get into the weak coupling regions.

F.2 Central charge windings at strong coupling

In this Section we are going to derive different windings of the central charge (5.3.4) indicated on Fig. 5.4.

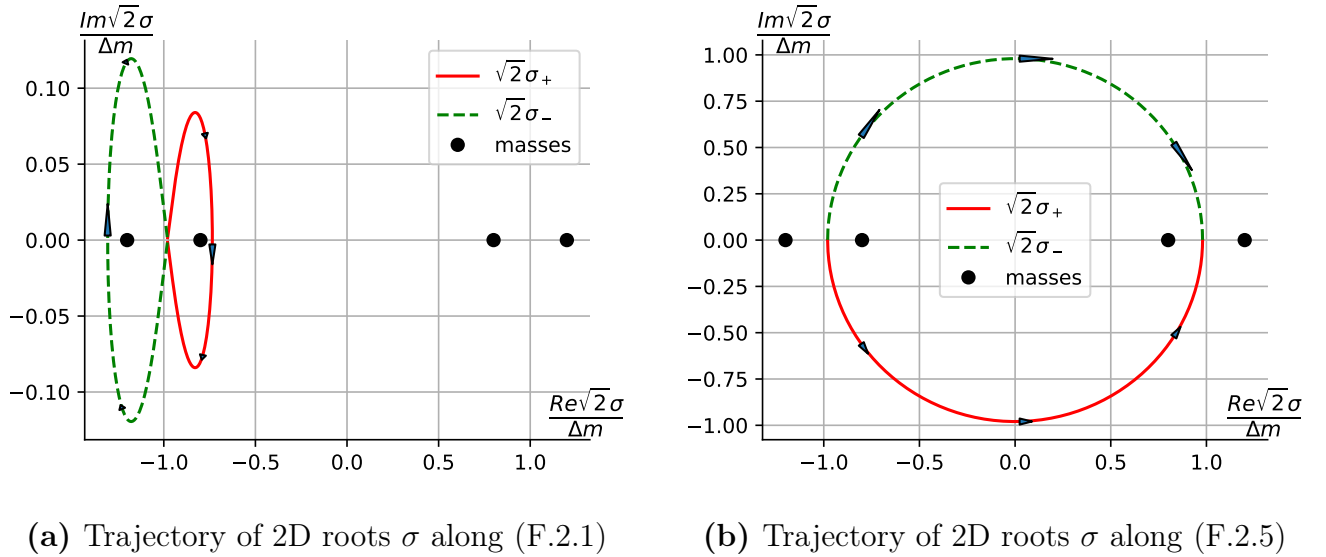


Figure F.2: Trajectories of 2D roots σ along different β -paths. Numerical results. Complex plane of $\sqrt{2}\sigma$. We see that σ -roots encircle the masses m_A (represented by bullets).

F.2.1 Winding along θ_{2d}

Now we are going to derive the $AD_1 \rightarrow AD_2$ phase shift from Fig. 5.4. For simplicity we consider the $\mathbb{CP}(1)$ limit (5.3.10). Positions of AD points AD_1 and

AD_2 are approximately given by (5.3.16). Consider a trajectory in the β plane, where the coupling flows continuously from one AD point at β_{AD} to another at $\beta_{AD} + i$

$$\beta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{2 \Delta m}{\delta m_{12}} + \frac{i(t - \pi)}{2\pi} - \varepsilon, \quad 1 \gg \varepsilon > 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (\text{F.2.1})$$

Here, ε is just a regularization parameter. Then,

$$e^{-2\pi\beta} \approx - \left(\frac{\delta m_{12}}{2 \Delta m} \right)^2 e^{-it} (1 + 2\pi\varepsilon), \quad (\text{F.2.2})$$

and for the expression under the square root in (5.3.5) (i.e. the discriminant) we get

$$D \approx \frac{\delta m_{12}^2}{4} + \Lambda_{CP(1)}^2 = \frac{\delta m_{12}^2}{4} (1 - (1 + \tilde{\varepsilon})e^{-it}), \quad 1 \gg \tilde{\varepsilon} > 0. \quad (\text{F.2.3})$$

This expression winds around 1 with the radius $(1 + \tilde{\varepsilon})$ clockwise. Then the σ vacua, which are approximately given by

$$\sqrt{2}\sigma_{\pm} \approx \pm \frac{\Delta m}{2} + \sqrt{D}, \quad (\text{F.2.4})$$

wind, see Fig. F.2a. In the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, the root $\sqrt{2}\sigma_+$ winds around $(-\Delta m + \delta m_{12})/2 = -m_2$ clockwise, while $\sqrt{2}\sigma_-$ winds around $(-\Delta m - \delta_{12})/2 = -m_1$ clockwise, both with radius $\delta m_{12} (1 + \tilde{\varepsilon}/2)$.

This yields nontrivial phase shifts in the mirror variables, see (5.5.3). While Y 's stay intact, the X_1 winds because of $\sqrt{2}\sigma_-$ and picks up $-2\pi i$. X_2 winds because of $\sqrt{2}\sigma_+$ and picks up $-2\pi i$. Then, the complexified kink central charge defined by $Z = 2(\mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_-) - \mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_+))$ is shifted by $-i(m_1 - m_2)$. Therefore if $Z_2 = 0$ at AD_2 than $Z_1 = Z_2 + i(m_1 - m_2)$ becomes zero at AD_1 , see (5.5.6). In other words $[Z_1]$ and $[Z_2]$ kinks are massless at AD points AD_1 and AD_2 respectively.

With the same reasoning we can prove the $AD_3 \rightarrow AD_4$ shift from Fig. 5.4.

F.2.2 From positive to negative β

Now, consider the trajectory in the β plane going from right to left, i.e. from AD_2 to AD_3 on Fig. 5.4. For simplicity we consider the limit of real $\Delta m \gg \delta m_{12} = \delta m_{34} > 0$.

$$\beta \approx t \left[\frac{1}{\pi} \ln \frac{2 \Delta m}{\delta m_{12}} - \varepsilon \right] - \frac{i}{2}, \quad 1 \gg \varepsilon > 0, \quad t \in [1, -1]. \quad (\text{F.2.5})$$

When t changes from 1 to -1 , the value of β flows from AD_2 to AD_3 . Then we have

$$e^{-2\pi\beta} \approx - \left(\frac{\delta m_{12}}{2\Delta m} \right)^{2t} (1 + 2\pi t\varepsilon), \quad (\text{F.2.6})$$

and for the expression under the square root in (5.3.5) (i.e. the discriminant) we get

$$D \approx \delta m_{12}^2 \left(1 - \frac{\left(\frac{2\Delta m}{\delta m_{12}} \right)^{2(1-t)} (1 + 2\pi t\varepsilon)}{\left(1 + \left(\frac{\delta m_{12}}{2\Delta m} \right)^{2t} (1 + 2\pi t\varepsilon) \right)^2} \right). \quad (\text{F.2.7})$$

When $\delta m_{12} < \Delta m$, this expression always gives negative D . There is no nontrivial windings of the roots. However the first term in the root formula (5.3.5) changes smoothly from $-\Delta m/2$ to $+\Delta m/2$ as t is varied from 1 to -1 . Therefore, both SW roots evolve from the vicinity of $-\Delta m/2$ at $\beta \sim AD_2$ to the vicinity of $+\Delta m/2$ at $\beta \sim AD_3$. Turns out that in terms of $\sqrt{2}\sigma_{\pm}$ from (F.2.4), the root $\sqrt{2}\sigma_+$ travels in the lower half plane, while the root $\sqrt{2}\sigma_-$ travels in the upper half plane, see Fig. F.2b.

From this and the map (5.5.3) it follows that, when β flows from AD_2 to AD_3 , the mirror variable X_1 stays in the right half plane $\text{Re } X_1 > 0$, Y_4 stays in the left half plane $\text{Re } Y_4 < 0$. X_2 and Y_3 each pick up $+i\pi$ because of the σ_+ change, while because of the σ_- they each pick up $-i\pi$. All in all, the complexified kink central charge defined by $Z = 2(\mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_-) - \mathcal{W}_{\text{mirror}}(Vac_+))$ is shifted by $-i(m_2 - m_3)$, which is exactly the shift indicated on Fig. 5.4. Thus $[Z_2]$ and $[Z_3]$ kinks are massless at AD points AD_2 and AD_3 respectively.

With the same reasoning we can prove the $AD_4 \rightarrow AD_1$ monodromy from Fig. 5.4. Note that these results are consistent with the \mathbb{Z}_2 transformation, see Fig. 5.4.

APPENDIX G

More on self-dual couplings

Consider 4D self-dual points. Corresponding τ_{SW} should satisfy the equation

$$\tau_{\text{SW}} = \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}}. \quad (\text{G.1.1})$$

The solution in the upper half plane is

$$\tau_0 = i. \quad (\text{G.1.2})$$

However, if we take into account also T duality, then the equation (G.1.1) is modified:

$$\tau_{\text{SW}} = \frac{-1}{\tau_{\text{SW}}} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{G.1.3})$$

Solving this equation, we obtain a whole series of self-dual points,

$$\tau_{\pm k} = k \pm \sqrt{k^2 - 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{G.1.4})$$

or, equivalently,

$$\tau_{\pm k} = \pm(k - \sqrt{k^2 - 1}), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (\text{G.1.5})$$

For $k = 0$ this gives (G.1.2). For $k = 1$, this gives a point

$$\tau_1 = 1. \quad (\text{G.1.6})$$

Now consider the 2D self-dual points. An obvious point (5.9.22) is

$$\beta_0 = 0, \quad e^{-2\pi\beta_0} = +1. \quad (\text{G.1.7})$$

But if we take into account the 2d T duality $\beta \rightarrow \beta + i$, we see that in fact there is a whole series of the points self-dual under S (5.9.22),

$$\beta_k = \frac{i}{2}k, \quad e^{-2\pi\beta_k} = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{G.1.8})$$

We have seen some of them in Sec. 5.9:

$$\begin{aligned}\tau_0 = i &\leftrightarrow \beta_1 = \frac{i}{2}, \\ \tau_1 = 1 &\leftrightarrow \beta_0 = 0.\end{aligned}\tag{G.1.9}$$

Bibliography

- [1] N. Seiberg and E. Witten, *Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B426**, 19 (1994), (E) **B430**, 485 (1994) [hep-th/9407087].
- [2] N. Seiberg and E. Witten, *Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric QCD*, Nucl. Phys. **B431**, 484 (1994) [hep-th/9408099].
- [3] G. 't Hooft, *Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Nonabelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **190**, 455-478 (1981)
- [4] S. Mandelstam, *Vortices and Quark Confinement in Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rept. **23**, 245-249 (1976)
- [5] A. Hanany and D. Tong, *Vortices, instantons and branes*, JHEP **0307**, 037 (2003). [hep-th/0306150].
- [6] R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi and A. Yung, *Non-Abelian superconductors: Vortices and confinement in $\mathcal{N} = 2$ SQCD*, Nucl. Phys. B **673**, 187 (2003). [hep-th/0307287].
- [7] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian string junctions as confined monopoles*, Phys. Rev. D **70**, 045004 (2004) [hep-th/0403149].
- [8] A. Hanany and D. Tong, *Vortex strings and four-dimensional gauge dynamics*, JHEP **0404**, 066 (2004) [hep-th/0403158].
- [9] D. Tong, *TASI Lectures on Solitons*, arXiv:hep-th/0509216.
- [10] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Solitons in the Higgs phase: The moduli matrix approach*, J. Phys. A **39**, R315 (2006) [arXiv:hep-th/0602170].
- [11] M. Shifman and A. Yung, *Supersymmetric Solitons and How They Help Us Understand Non-Abelian Gauge Theories*, Rev. Mod. Phys. **79**, 1139 (2007)

- [hep-th/0703267]; for an expanded version see *Supersymmetric Solitons*, (Cambridge University Press, 2009).
- [12] D. Tong, *Quantum Vortex Strings: A Review*, *Annals Phys.* **324**, 30 (2009) [arXiv:0809.5060 [hep-th]].
- [13] M. Shifman and A. Yung, *Lessons from supersymmetry: “Instead-of-Confinement” Mechanism*, *Int. J. Mod. Phys. A* **29**, no. 27, 1430064 (2014) [arXiv:1410.2900 [hep-th]].
- [14] A. Abrikosov, *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, *Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957); Russian original – *ZhETF* **32**, 1442 (1957);
H. Nielsen and P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, *Nucl. Phys.* **B61**, 45 (1973). [Reprinted in *Solitons and Particles*, Eds. C. Rebbi and G. Soliani (World Scientific, Singapore, 1984), p. 365].
- [15] D. Tong, *Monopoles in the Higgs phase*, *Phys. Rev. D* **69**, 065003 (2004) [arXiv:hep-th/0307302].
- [16] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian flux tubes in $N=1$ SQCD: supersymmetrizing world-sheet supersymmetry*, *Phys. Rev. D* **72**, 085017 (2005) [arXiv:hep-th/0501211].
- [17] M. Edalati and D. Tong, *Heterotic vortex strings*, *JHEP* **0705**, 005 (2007) [arXiv:hep-th/0703045].
- [18] M. Shifman and A. Yung, *Heterotic Flux Tubes in $\mathcal{N} = 2$ SQCD with $\mathcal{N} = 1$ Preserving Deformations*, *Phys. Rev. D* **77**, 125016 (2008) Erratum: [*Phys. Rev. D* **79**, 049901 (2009)] [arXiv:0803.0158 [hep-th]].
- [19] E. Ievlev and A. Yung, *Non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD*, *Phys. Rev. D* **95**, 125004 (2017) [arXiv:1704.03047 [hep-th]].
- [20] E. Ievlev and A. Yung, *Non-Abelian strings in $N = 1$ supersymmetric QCD (Conference Paper)*, *EPJ Web Conf.* **191**, 06003 (2018)
- [21] E. Ievlev and A. Yung, *What Become of Semilocal non-Abelian strings in $\mathcal{N} = 1$ SQCD*, *Phys. Rev. D* **98**, 094033 (2018) [arXiv:1810.07149 [hep-th]].
- [22] A. Gorsky, E. Ievlev and A. Yung, *Dynamics of non-Abelian strings in the*

- theory interpolating from $\mathcal{N} = 2$ to $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **101**, 014013 (2020) [arXiv:1911.08328 [hep-th]].
- [23] D. Tong, *The quantum dynamics of heterotic vortex strings*, JHEP **0709**, 022 (2007) [arXiv:hep-th/0703235].
- [24] M. Shifman and A. Yung, *Large- N Solution of the Heterotic $N=(0,2)$ Two-dimensional $CP(N-1)$ Model*, Phys. Rev. D **77**, 125017 (2008) Erratum: [Phys. Rev. D **81**, 089906 (2010)] [arXiv:0803.0698 [hep-th]].
- [25] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Description of the Heterotic String Solutions in $U(N)$ SQCD*, Phys. Rev. D **79**, 085015 (2009) [arXiv:0901.4603 [arXiv:hep-th]].
- [26] E. Witten, *Instantons, the Quark Model, and the $1/N$ Expansion*, Nucl. Phys. B **149**, 285 (1979).
- [27] E. Ievlev, M. Shifman and A. Yung, *String Baryon in Four-Dimensional $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD from the 2D-4D Correspondence*, Phys. Rev. D **102**, 054026 (2020) [arXiv:2006.12054 [hep-th]].
- [28] P. Fayet and J. Iliopoulos, *Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors*, Phys. Lett. B **51**, 461 (1974).
- [29] M. Shifman and A. Yung, *Critical String from Non-Abelian Vortex in Four Dimensions*, Phys. Lett. B **750**, 416 (2015) [arXiv:1502.00683 [hep-th]].
- [30] P. Koroteev, M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Vortex in Four Dimensions as a Critical String on a Conifold*, Phys. Rev. D **94** (2016) no.6, 065002 [arXiv:1605.08433 [hep-th]].
- [31] P. Koroteev, M. Shifman and A. Yung, *Studying Critical String Emerging from Non-Abelian Vortex in Four Dimensions*, Phys. Lett. **B759**, 154 (2016) [arXiv:1605.01472 [hep-th]].
- [32] N. Dorey, *The BPS spectra of two-dimensional supersymmetric gauge theories with twisted mass terms*, JHEP **9811**, 005 (1998) [hep-th/9806056].
- [33] D. Tong, *Monopoles in the Higgs phase*, Phys. Rev. D **69**, 065003 (2004) [hep-th/0307302].
- [34] For a review see e.g. A. Achucarro and T. Vachaspati, *Semilocal and electroweak strings*, Phys. Rept. **327**, 347 (2000) [hep-ph/9904229].

- [35] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian semilocal strings in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **73**, 125012 (2006) [arXiv:hep-th/0603134].
- [36] M. Eto, J. Evslin, K. Konishi, G. Marmorini, et al., *On the moduli space of semilocal strings and lumps*, Phys. Rev. D **76**, 105002 (2007) [arXiv:0704.2218 [hep-th]].
- [37] M. Shifman, W. Vinci and A. Yung, *Effective World-Sheet Theory for Non-Abelian Semilocal Strings in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **83**, 125017 (2011) [arXiv:1104.2077 [hep-th]].
- [38] P. Koroteev, M. Shifman, W. Vinci and A. Yung, *Quantum Dynamics of Low-Energy Theory on Semilocal Non-Abelian Strings*, Phys. Rev. D **84**, 065018 (2011) [arXiv:1107.3779 [hep-th]].
- [39] J. Chen, C. H. Sheu, M. Shifman, G. Tallarita and A. Yung, *Long Way to Ricci Flatness*, [arXiv:2006.01188 [hep-th]].
- [40] E. Witten, *Phases of $N = 2$ theories in two dimensions*, Nucl. Phys. B **403**, 159 (1993) [hep-th/9301042].
- [41] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD: Duality and Kinks on Confining Strings*, Phys. Rev. D **81**, 085009 (2010) [arXiv:1002.0322 [hep-th]].
- [42] A. D’Adda, A. C. Davis, P. DiVecchia and P. Salamonsen, *An effective action for the supersymmetric CP^{n-1} models*, Nucl. Phys. **B222** 45 (1983).
- [43] S. Cecotti and C. Vafa, *On classification of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric theories*, Comm. Math. Phys. **158** 569 (1993).
- [44] A. Hanany, K. Hori *Branes and $N=2$ Theories in Two Dimensions*, Nucl. Phys. B **513**, 119 (1998) [arXiv:hep-th/9707192].
- [45] N. Dorey, T. J. Hollowood and D. Tong, *The BPS spectra of gauge theories in two and four dimensions*, JHEP **9905**, 006 (1999) [arXiv:hep-th/9902134].
- [46] A. A. Penin, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov and S. V. Troitsky, *What becomes of vortices in theories with flat directions*, Phys. Lett. B **389**, 13 (1996) [hep-ph/9609257].
- [47] A. Yung, *Vortices on the Higgs Branch of the Seiberg-Witten Theory*, Nucl. Phys. B **562**, 191 (1999) [hep-th/9906243].

- [48] K. Evlampiev and A. Yung, *Flux Tubes on Higgs Branches in SUSY Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **662**, 120 (2003) [hep-th/0303047].
- [49] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Meissner effect in Yang-Mills theories at weak coupling*, Phys. Rev. D **71**, 045010 (2005) [arXiv:hep-th/0412082].
- [50] M. Shifman and A. Yung, *Moduli Space Potentials for Heterotic non-Abelian Flux Tubes: Weak Deformation*, Phys. Rev. D **82**, 066006 (2010) [arXiv:1005.5264 [hep-th]].
- [51] A. Hanany, M. J. Strassler and A. Zaffaroni, *Confinement and strings in MQCD*, Nucl. Phys. B **513**, 87 (1998) [hep-th/9707244].
- [52] A. I. Vainshtein and A. Yung, *Type I superconductivity upon monopole condensation in Seiberg–Witten theory*, Nucl. Phys. B **614**, 3 (2001) [arXiv:hep-th/0012250].
- [53] E. Witten, *Theta Dependence in the Large N Limit of Four-Dimensional Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **81**, 2862 (1998), [hep-th/9807109].
- [54] A. Hanany, M. J. Strassler and A. Zaffaroni, *Confinement and strings in MQCD*, Nucl. Phys. B **513**, 87 (1998) [arXiv:hep-th/9707244].
- [55] T. Vachaspati and A. Achucarro, *Semilocal cosmic strings*, Phys. Rev. D **44**, 3067 (1991).
- [56] M. Hindmarsh, *Existence and stability of semilocal strings*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1263 (1992).
- [57] M. Hindmarsh, *Semilocal topological defects*, Nucl. Phys. B **392**, 461 (1993) [arXiv:hep-ph/9206229].
- [58] J. Preskill, *Semilocal defects*, Phys. Rev. D **46**, 4218 (1992) [arXiv:hep-ph/9206216].
- [59] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian semilocal strings in $N=2$ supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **73**, 125012 (2006) [arXiv:hep-th/0603134].
- [60] M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Manifestly supersymmetric effective Lagrangians on BPS solitons*, Phys. Rev. D **73**, 125008 (2006) [arXiv:hep-th/0602289].

- [61] M. Eto, J. Evslin, K. Konishi, G. Marmorini, M. Nitta, K. Ohashi, W. Vinci and N. Yokoi, *On the moduli space of semilocal strings and lumps*, Phys. Rev. D **76**, 105002 (2007) [arXiv:0704.2218 [arXiv:hep-th]].
- [62] M. Shifman, W. Vinci and A. Yung, *Effective World-Sheet Theory for Non-Abelian Semilocal Strings in $N = 2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **83**, 125017 (2011) [arXiv:1104.2077 [arXiv:hep-th]].
- [63] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *Revisiting the Faddeev-Skyrme model and Hopf solitons*, Phys. Rev. D **88**, 045026 (2013) [arXiv:1306.2364 [arXiv:hep-th]].
- [64] A. Gorsky, M. Shifman and A. Yung, *The Higgs and Coulomb/confining phases in 'twisted-mass' deformed $CP(N-1)$ model*, Phys. Rev. D **73**, 065011 (2006) [arXiv:hep-th/0512153].
- [65] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Heterotic $N=(0,2)$ $CP(N-1)$ Model with Twisted Masses*, Phys. Rev. D **81**, 065025 (2010) [arXiv:0907.2715 [hep-th]].
- [66] V. Markov, A. Marshakov and A. Yung, *Non-Abelian vortices in $N = 1^*$ gauge theory*, Nucl. Phys. B **709**, 267 (2005) [arXiv:hep-th/0408235].
- [67] F. Ferrari, *Large N and double scaling limits in two dimensions*, JHEP **0205** 044 (2002) [arXiv:hep-th/0202002].
- [68] F. Ferrari, *Non-supersymmetric cousins of supersymmetric gauge theories: quantum space of parameters and double scaling limits*, Phys. Lett. **B496** 212 (2000) [arXiv:hep-th/0003142]; *A model for gauge theories with Higgs fields*, JHEP **0106**, 057 (2001) [arXiv:hep-th/0102041].
- [69] P. A. Bolokhov, M. Shifman and A. Yung, *Large- N Solution of the Heterotic $CP(N-1)$ Model with Twisted Masses*, Phys. Rev. D **82**, no. 2, 025011 (2010) Erratum: [Phys. Rev. D **89**, no. 2, 029904 (2014)] [arXiv:1001.1757 [hep-th]].
- [70] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein and V. Zakharov, *Two-dimensional sigma models: Modelling non-perturbative effects in quantum chromodynamics*, Physics Reports **116**, 6, 103 (1984)
- [71] T. Appelquist and J. Carazzone, *Infrared Singularities and Massive Fields*, Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).

- [72] E. Ievlev, *Эффективные теории на неабелевой струне в суперсимметричных калибровочных теориях: выпускная квалификационная работа* – Saint Petersburg State University, 2020.
- [73] M. Shifman and A. Yung, *Critical Non-Abelian Vortex in Four Dimensions and Little String Theory*, Phys. Rev. D **96**, no. 4, 046009 (2017) [arXiv:1704.00825 [hep-th]].
- [74] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Duality and Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **79**, 125012 (2009) [arXiv:0904.1035 [hep-th]].
- [75] A. Neitzke and C. Vafa, *Topological strings and their physical applications*, arXiv:hep-th/0410178.
- [76] P. Candelas and X. C. de la Ossa, *Comments on conifolds*, Nucl. Phys. **B342**, 246 (1990).
- [77] K. Ohta and T. Yokono, *Deformation of Conifold and Intersecting Branes*, JHEP **0002**, 023 (2000) [hep-th/9912266].
- [78] I. R. Klebanov and M. J. Strassler, *Supergravity and a Confining Gauge Theory: Duality Cascades and $chiSB$ -Resolution of Naked Singularities*, JHEP **0008**, 052 (2000) [hep-th/0007191].
- [79] J. Louis, *Generalized Calabi-Yau compactifications with D-branes and fluxes*, Fortsch. Phys. **53**, 770 (2005).
- [80] G. Veneziano and S. Yankielowicz, *An Effective Lagrangian For The Pure $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. B **113**, 231 (1982).
- [81] P. C. Argyres and M. R. Douglas, *New Phenomena in $SU(3)$ Supersymmetric Gauge Theory* Nucl. Phys. **B448**, 93 (1995) [arXiv:hep-th/9505062].
P. C. Argyres, M. R. Plesser, N. Seiberg, and E. Witten, *New $N=2$ Superconformal Field Theories in Four Dimensions* Nucl. Phys. **B461**, 71 (1996) [arXiv:hep-th/9511154].
- [82] M. Shifman, A. Vainshtein and R. Zwicky, *Central charge anomalies in 2-D sigma models with twisted mass*, J. Phys. A **39**, 13005 (2006) [hep-th/0602004].
- [83] M. Shifman, *Supersymmetric Solitons and Topology*, in *Topology and Geometry in Physics*, Eds. E. Bick and F.D. Steffen (Springer-Verlag, Berlin, 2005), p. 237.

- [84] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Confinement in $N=2$ Supersymmetric QCD: Duality and Kinks on Confining Strings*, Phys. Rev. D **81**, 085009 (2010) [arXiv:1002.0322 [hep-th]].
- [85] V. A. Fateev, I. V. Frolov and A. S. Schwarz, *Quantum Fluctuations Of Instantons In Two-Dimensional Nonlinear Theories*, Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 590 (1979) [Yad. Fiz. **30**, 1134 (1979)]; Nucl. Phys. B **154** (1979) 1. See also in A. Polyakov, *Gauge Fields and Strings* (Harwood Press, 1987).
- [86] K. Hori and C. Vafa, *Mirror symmetry*, [arXiv:hep-th/0002222].
- [87] F. Ferrari and A. Bilal, *The Strong coupling spectrum of the Seiberg-Witten theory*, Nucl. Phys. B **469**, 387 (1996) [hep-th/9602082].
- [88] P. Argyres, M. R. Plesser and A. Shapere, *The Coulomb Phase of $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD* Phys. Rev. Lett. **75**, 1699 (1995) [hep-th/9505100].
- [89] P. Argyres, M. Plesser and N. Seiberg, *The Moduli Space of $\mathcal{N} = 2$ SUSY QCD and Duality in $\mathcal{N} = 1$ SUSY QCD*, Nucl. Phys. **B471**, 159 (1996) [hep-th/9603042].
- [90] E. Gerchkovitz and A. Karasik, *New Vortex String World-sheet Theories from Super-Symmetric Localization*, JHEP **03**, 090 (2019) [arXiv:1711.03561 [hep-th]].
- [91] J. Song, *4d/2d correspondence: instantons and W-algebras*, <https://thesis.library.caltech.edu/7103/>. PhD thesis.
- [92] Y. Tachikawa, *$N=2$ supersymmetric dynamics for pedestrians*, Lect. Notes Phys. **890** (2014) [arXiv:1312.2684 [hep-th]].
- [93] M. Shifman and A. Yung, *Hadrons of $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD in Four Dimensions from Little String Theory*, Phys. Rev. D **98**, no. 8, 085013 (2018) [arXiv:1805.10989 [hep-th]].
- [94] M. Shifman and A. Yung, *Non-Abelian Duality and Confinement in $N=2$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **79**, 125012 (2009) [arXiv:0904.1035 [hep-th]].
- [95] M. Shifman and A. Yung, *r Duality and 'Instead-of-Confinement' Mechanism in $N=1$ Supersymmetric QCD*, Phys. Rev. D **86**, 025001 (2012) [arXiv:1204.4165 [hep-th]].

- [96] Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, (Perseus Books, Massachusetts, 1995).
- [97] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (Mcgraw-hill, New York, 1980)
- [98] K. Chandrasekharan, *Elliptic Functions*, (Springer-Verlag, Berlin, 1985).