МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
ПО ПРОГРАММЕ МАГИСТРАТУРЫ

ДАВЫДОВА ЭМИЛИЯ ВЛАДИМИРОВНА

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Выполнил:
Студентка 2 курса очной формы обучения
Направление подготовки (специальность)
01.04.01 «Математика»
Направленность (профиль)
Дифференциальные уравнения,
динамические системы, оптимальное
управление

Допущено к защите в ГЭК и проверено на
объем заимствования:

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

_______________ / М.Г. Юмагулов

Руководитель
д.ф.-м.н., профессор

_______________ / М.Г. Юмагулов

УФА – 2021

Содержание

Введение

В этой работе говорится о знаменитой задаче небесной механики – задаче трех тел. Как и в любой другой науке здесь есть задача - задача N тел, которая полностью не может быть решена по каким-либо обстоятельствам. Этим обусловлено особое внимание ученых всего мира, хотя сам вопрос является достаточно важным для того, чтобы познать еще больше окружающий мир, точнее увидеть прошлое нашей планеты, Солнечной системы, галактики и т.д., а также предугадать будущее таковых. В этой задаче описывается движение каких-либо небесных тел, на которые оказывают свое влияние различные физические силы, в том числе взаимное притяжение тел друг к другу. Размеры тел (материальных точек), их плотность и другие их свойства влияют друг на друга и на построение орбиты тела малой массы. Притягиваясь то к одному, то к другому телу будет вырисовываться один из трех вариантов траекторий, которые описываются системой формул, которая является важным объектом в данной работе. Разбирается сама эта система в разных формах записи, её решения, свойства.

Сам же вопрос и состоит как раз-таки в том, какой именно вариант траектории будет. Зная достаточно много данных об этих материальных точках, можно ещё что-то прогнозировать, но, а если данных недостаточно, то система остается не разрешимой однозначно. Однако для некоторых конкретных случаев задача рассмотрена и имеет полученные учеными решения. Некоторые из них мы также рассмотрим. Эти постоянные решения называются точками либрации либо точками Лагранжа. Буду применять первое наименование, так как оно более употребляемое.

1 Вводные понятия и постановка задачи

1.1 Задача трех тел

1.1.1 О задаче n тел

Среди всевозможных научных сфер, в которых применяется теория гамильтоновых систем и их методы, находит себе место небесная механика. Вопросами небесной механики занимались такие учёные, как И.Ньютон, Л.Эйлер, Ж.Л.Лагранж и др. Подвергать анализу, изучению, исследованию большое разнообразие многообразных динамических моделей, которые описывают движение материальных точек.

Классической задачей здесь является задача n тел, которая занимает особое и важное место в науке. В чём же состоит такая особенность? В вакуумном пространстве, подобному космосу, находятся n тел, взаимодействующих друг с другом и влияющих друг на друга (на движение) по закону Ньютона о всемирном тяготении. Могут быть даны начальные условия, но где будут находится тела в последующие моменты времени нужно определить.

Если говорить о том, при каких n задача точно разрешена, то не трудно доказать, что для одного или двух тел. Если n=1 (имеется одно и только одно тело), то этот случай полностью совпадает с первым законом Ньютона, который называется законом инерции. Он гласит, что любая материальная точка, на которую не действую силы извне, будет находиться в состоянии покоя (сохранять состояние покоя) или двигаться равномерно и прямолинейно.

Если же n=2, то этот случай соответствует закону всемирного тяготения, который говорит о том, что тела двигаются в фиксированной плоскости, а их орбиты являются эллипсами, параболами или гиперболами. Вид орбиты будет зависеть от параметров, которые будут заданы.

А если n=3 и более, то возникают сложности. Они связаны с математическими расчётами. Такая задача не может быть решена полностью, точно и аналитически, а лишь приближенно.

Важную роль играет как раз-таки задача трёх тел, состоящая в рассмотрении движения тела M_3 малой массы m_3 относительно двух других массивных тел$M_1 u M_2$ с массами $m_1 u m_2$ соответственно. Массы всех трёх тел выбраны произвольным образом.

Однозначно можно сказать одно – тела с большей массой воздействую (притягивают) на тело малой массы гораздо сильнее, чем наоборот. Обратное воздействие не так заметно, но оно есть. Если тело имеет настолько малую массу в сравнении с другими, то оно практически не оказывает никакого влияния на две материальные точки, словно его масса равно нулю. В этом случае $M_1 u M_2$ называются основными точками, а M_3 – пассивно-гравитирующее тело. Так как M_3 не оказывает влияния на $M_1 u M_2$, то материальные точки $M_1 u M_2$ должны подчиняться закону задачи двух тел, а значит они должны двигаться в фиксированной плоскости по одной из трёх орбит, которые представляют собой эллипс, параболу или гиперболу.

Далее рассматривается так называемая плоская ограниченная эллиптическая задача трёх тел, которая предполагает, что $M_1 и M_2$ двигаются по траектории вида эллипс, а M_3 находится в плоскости их движения во всё время. Так же известно, что эксцентриситет лежит в пределах $0 \le \varepsilon < 1$.

Задача трех тел в отличие от задачи двух тел не имеет общего решения, которое разрешает прогнозировать положение любого из трех тел для каждого последующего момента времени t для любых значений скоростей и координат тел в начальный момент времени t = 0. Ученые обнаружили, что нельзя решить задачу в общем виде, то есть получить решение в виде конечных аналитических формулировок.

1.1.2 Уравнение движений в задаче трёх тел

Общая задача трёх тел в небесной механике задаётся системой обыкновенных дифференциальных уравнений порядка два

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \gamma m_2 \dfrac{q_2 - q_1}{|q_2 - q_1|^3} + \gamma m_3 \dfrac{q_3 - q_1}{|q_3 - q_1|^3} \\ \ddot{q}_2 = \gamma m_1 \dfrac{q_1 - q_2}{|q_1 - q_2|^3} + \gamma m_3 \dfrac{q_3 - q_2}{|q_3 - q_2|^3} \\ \ddot{q}_3 = \gamma m_1 \dfrac{q_1 - q_3}{|q_1 - q_3|^3} + \gamma m_2 \dfrac{q_2 - q_3}{|q_2 - q_3|^3} \end{cases}$$

где m_i — массы, γ – гравитационная постоянная, q_i — радиус-векторы, которые определяют положение тел, знак точка обозначает производную по t.

Имеем тем самым 9 нелинейных уравнений за счёт того, что все тела располагаются в пространстве и имеют три координаты их положения в нём.

Необычный интерес рождается в связи с поведением трёх тел в окрестности точек либрации – стационарных решений задачи.

При этом $0 \le \varepsilon < 1 и 0 \le \mu \le 1$, где μ – параметр масс. В частности, вероятны всевозможные бифуркации. Одновременно с этим в литературе чаще встречается заинтересованность в описании всевозможных сценариев бифуркации в окрестности треугольных точек либрации и куда реже в прямолинейных.

Пускай $M_1 и M_2 - гравитирующие\ тела$ такие, что вокруг тела M_1 движется тело M_2по эллипсу. Тогда у третьего тела M_3 движение в координатах Нехвилла будет описано системой дифференциальных уравнений:

ξ -2 η '= {1} over {1+ ecosv} {∂ Ω} over {∂ξ} , # η +2ξ '=$\frac{1}{1+ecosv}\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}$,

(1)

где

$$\Omega=\frac{\xi^2+\eta^2}{2}+W, W=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}, \mu=\frac{m_2}{m_1+m_2}, 0<\mu\le\frac{1}{2}, r_1=\sqrt{(\xi)^2+\eta^2}, r_2=¿\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}.$$

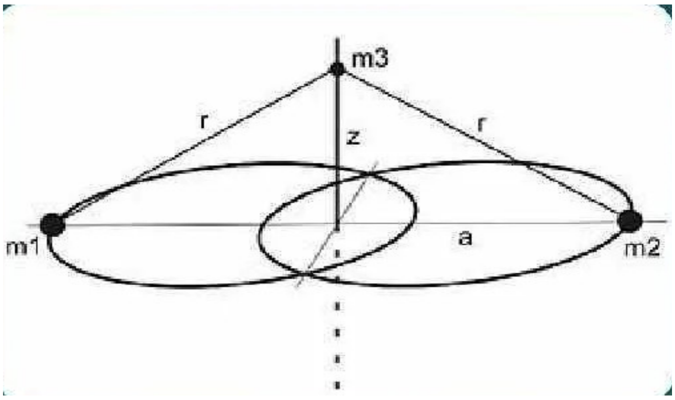
Будем считать v=t в уравнениях (1) и запишем в развернутом виде:

ξ -2 η =ρ left (ξ-μ+ {μ-1} over {{left ({ξ} ^ {2} + {η} ^ {2} right)} ^ {{

(2)

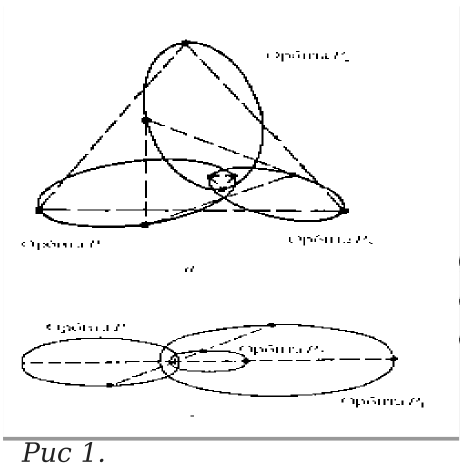
$$где\ \rho(t,\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon cost}, \mu=\frac{m_1}{m_0+m_1}\ .$$

Массы m_1 и m_2 двигаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. m_3 слишком мала относительно m_1 и m_2, чтобы влиять наих закон движения. Значит есть точка равновесия для M_3.



Точки M_1, M_2 и M_3 двигаются по некоторым траекториям P_1, P_2 и P_3соответственно. Эти тела находятся в вершинах равностороннего треугольника, размер которого произволен, и будут в последующем двигаться таким образом, что будет всё время образовываться треугольник (См. рис 1). Такая точка равновесия называется треугольной.

Будучи в одной плоскости, все три точки неизменно располагаются на одной прямой, которая вращается вокруг их центра масс. И такие решения получили название прямолинейных точек. (См. рис 2).



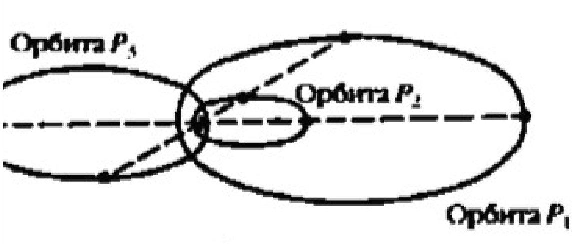


Рис 1. *Рис 2.*

1.2 Точки либрации задачи трёх тел

Обратимся вновь к системе (1). Если приравнять правую часть к нулю, то будут найдены пять постоянных решений этой системы, которые называются точками либрации или точками Лагранжа – это точки системы двух массивных тел и тела малой массы, на которое действуют только силы гравитации со стороны других тел и никаких других сил. Эти точки делятся на два типа: L_1, L_2, L_3 – прямолинейные, $L_4 u L_5$ – треугольные точки либрации (см. рис.3). В плоскости (ξ, η) точки либрации L_1, L_2, L_3 находятся на прямой η = 0, найти их в явном виде пока что не представляется возможным, что вызывает ещё больший интерес, можно лишь приближенно. Координаты двух других точек L_4 и L_5можно найти в явном виде точно, и они будут следующие: $L_4\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $L_5\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

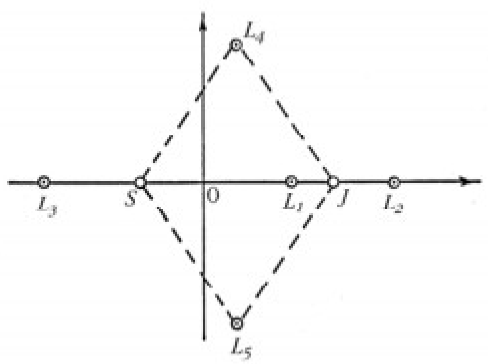


Рис.3. Точки либрации (О – центр масс тел S и J).

Убедимся в правильности найденных координат подстановкой их в систему уравнений. Подставим $L_4\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в систему (1)

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' = \rho\left(\xi - \mu + \dfrac{\mu-1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\xi - \dfrac{\mu}{\left((\xi-1)^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}(\xi-1)\right) \\ \eta'' + 2\xi' = \rho\left(\eta + \dfrac{\mu-1}{\left(\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\eta - \dfrac{\mu}{\left((\xi-1)^2+\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}\eta\right) \end{cases}$$

и проверим равенства.

$$\begin{cases} 0 = \rho\left(\dfrac{1}{2} - \mu + \dfrac{\mu-1}{2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\mu}{2\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ 0 = \rho\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mu-1}{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mu}{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \rho\left(\dfrac{1}{2} - \mu + \dfrac{\mu-1}{2} + \dfrac{\mu}{2}\right) \\ 0 = \rho\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}(\mu-1)}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\mu}{2}\right) \end{cases}, \quad ¿ \quad , \begin{cases} 0=0 \\ 0=0 \end{cases}.$$

Аналогично можно подставить координаты точки L_5 и убедиться в том, что она тоже является решением системы (1).

Спектральные свойства всех пяти точек важны и в практическом, и в теоретическом планах. Особую важность составляет вопрос об их устойчивости и того, как устойчивость взаимосвязана с параметрами μ и ε. Треугольные точки либрации могут быть и устойчивыми, и неустойчивыми. И нужно отметить тот факт, что прямолинейные точки будут неустойчивы при всех μ и малых ε. Вообще говоря, треугольным точкам посвящено много научных работ, а вот прямолинейные изучены меньше. Хоть они и остаются формально неустойчивыми, наука говорит о том, что с помощью каких-то технических хитростей можно добиться их устойчивости.

1.3 Постановка задачи

Перед тем как приступить непосредственно к изложению и разбору задачи трех тел и задачи о параметрическом резонансе, то есть к основному содержанию работы, абсолютно необходимо изучить некоторые вспомогательные вопросы, чтобы войти в курс дела и лучше понимать, о чем будет идти речь. А точнее цели описываются далее.

Вопрос нахождения точек либрации очень актуален, поскольку космос и всё, что с ним связано, интересовали людей раньше и продолжают интересовать сегодня. Точки либрации притягивают особое внимание из-за современной возможности отправки космических аппаратов в космос. Эти точки помогают спланировать траекторию и поставить задачи для космического аппарата в плане того, как долететь до какого-либо космического тела типа комет и т.д. и облететь массивные тела типа планет.

Данная работа посвящена больше вопросу построения областей устойчивости прямолинейных точек либрации – это три из пяти точек. Ставится задача трех тел, рассмотрение задачи с точки зрения теории гамильтоновых систем. Рассматриваются точки либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел, вопрос об устойчивости гамильтоновых систем, зависящих от параметра. При этом особое внимание уделяется рассмотрению критических случаев. Перед рассмотрением задачи о параметрическом резонансе, нужно привести вспомогательные сведения, которые касаются данного вопроса.

2 Вспомогательные сведения из теории гамильтоновых систем

2.1 Гамильтоновые системы

Основным вопросом будет устойчивость прямолинейных точек либрации как в круговой, так и в эллиптической задаче трёх тел системы

$$\left\{ \xi \text{ -2 η '= \{1\} over \{1+ ecosv\} \{∂ Ω\} over \{∂ ξ\} , \# η +2} \xi ' = \frac{1}{1+ecosv} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta}, \right.$$

(1)

где

$$\Omega = \frac{\xi^2+\eta^2}{2} + W, W = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}, 0<\mu\leq\frac{1}{2}, r_1 = \sqrt{(\xi)^2+\eta^2}, r_2 = \text{¿}\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}$$

в её линейной постановке. Иначе говоря, нужно перейти от нелинейной системы (1) к линеаризованной в окрестности точки системе. Далее будет реализован переход к системе Гамильтона.

Система Гамильтона – это частный случай динамической системы, в которой силы не зависят от скорости.

Динамическая система – это система, для которой задана функциональная зависимость между положением в фазовом пространстве и временем каждого элемента этой системы.

Пусть H(u,v,t) – скалярная вещественная функция переменных u¿$\left(u_1, \ldots, u_N\right) \in R^N, v=\left(v_1, \ldots, v_N\right) \in R^N u t \in R$.Будем предполагать, что H(u,v,t) дважды непрерывно дифференцируема по u и v и непрерывна по t. Гамильтоновыми системами называют системы дифференциальных уравнений вида

$$u'_j = \frac{\partial H}{\partial v_j}, v'_j = \frac{-\partial H}{\partial u_j} \left(j = 1, \ldots, N \right).$$

(2)

Чтобы определить линейную гамильтоновую систему (ЛГС) нужно положить

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, H'(x,t) = \begin{pmatrix} H'_u \\ H'_v \end{pmatrix};$$

(3)

здесь $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, H'_u = \begin{pmatrix} H'_{u1} \\ \vdots \\ H'_{uN} \end{pmatrix}, H'_v = \begin{pmatrix} H'_{v1} \\ \vdots \\ H'_{vN} \end{pmatrix}.$

Тогда систему (2) можно записать в равносильном виде:

$$\frac{dx}{dt} = J H'(x,t), x \in R^{2N},$$

(4)

где $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

(5)

здесь I – единичная (N×N) матрица.

$$det J = det\, J^{-1} = 1, J^{-1} = J^{¿} = -J, (Jx, x) = 0 \, для \, \forall x \in R^{2N}.$$

(6)

Гамильтонова система (4) будет линейной, если H’(x,t) является линейной по x, то есть

$$H'(x,t)=A(t)x,$$

(7)

где A(t) – некоторая квадратная матрица.

Можно (7) представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = JA(t)x, x \in R^{2N},$$

(8)

где A(T) – вещественная непрерывная по t.

2.2 Линейные автономные гамильтоновые системы и их спектральные свойства

Вещественную матрицу B порядка $2N \times 2N$ будем называть гамильтоновой, если она представима в виде B=JA при некоторой симметрической матрице A. Симметрическую матрицу A порядка $2N \times 2N$ можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & (A_2)^T \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix},$$

$в \, которой \, A_j - матрица \, порядка \, N \times N$, при этом матрицы A_1 и A_3 являются симметрическими. Вещественную матрицу B порядка $2N \times 2N$ будем называть гамильтоновой матрицей, если она в некотором базисе пространства R^{2N} представима в виде:

$$\widetilde{B} = JA, \qquad (9)$$

где A – симметрическая (2N×$2N¿$ матрица, а J – матрица (5).

Теперь поговорим о спектральных свойствах постоянной гамильтоновой матрицы. Собственные значения матрицы JA являются решениями характеристического уравнения

$$p(\lambda) \equiv det(JA - \lambda I) = 0. \qquad (10)$$

Теорема 1. *Многочлен* $p(\lambda)$ *является четной функцией, т.е.* $p(-\lambda) = p(\lambda)$. *Для участвующих в операторе JA матриц J и A имеют место равенства:*

$$(JA)^{¿} = A^{¿} J = -AJ. \qquad (11)$$

Здесь учитывается симметричность матрицы A. Из теоремы 1 следует, что характеристический многочлен (10) содержит только четные степени, т.е. имеет вид:

$$p(\lambda) = \lambda^{2N} + a_1 \lambda^{2N-2} + a_2 \lambda^{2N-4} + \ldots + a_{N-1} \lambda^2 + a_n. \qquad (12)$$

Теорема 2. *Пусть матрица JA имеет собственное значение* λ. *Тогда* $-\lambda, \acute{\lambda}, -\acute{\lambda}$ *также являются собственными значениями этой матрицы, причем той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса. Если оператор JA имеет нулевое собственное значение* $\lambda = 0$, *то алгебраическая кратность этого собственного значения является четным числом.*

Собственные значения возникают комплексными четверками $\pm\alpha\pm\beta i$, вещественными парами $\pm\alpha$, чисто мнимыми парами $\pm\omega i$или в виде нулевого собственного значения четной алгебраической кратности (рис. 1).

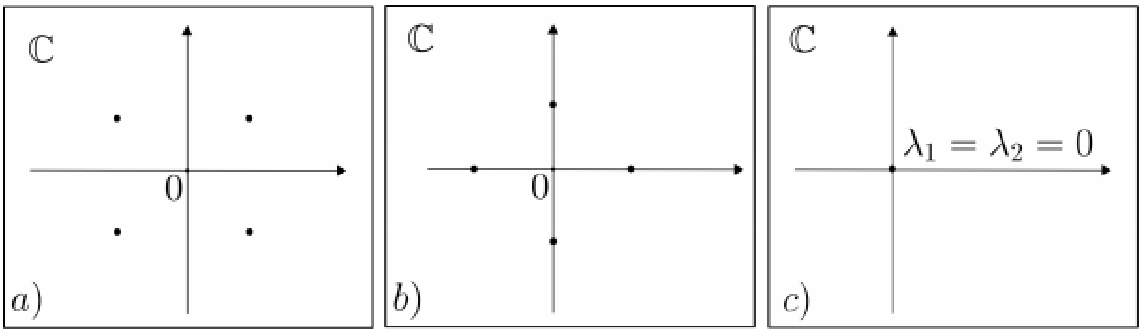


рис.1

Рассмотрим устойчивость автономной линейной гамильтоновой системы:

$$\frac{dx}{dt} = JAx, x \in R^{2N}$$

(13)

Система имеет особенности, которые влияют на свойства ее устойчивости. Линейная гамильтонова система не может быть асимптотически устойчивой.

G 1. Если матрица JA имеет собственное значение $\lambda=\alpha+i\beta$ с отрицательной вещественной частью, то она имеет собственное значение $-\lambda=-\alpha-i\beta$ с положительной вещественной частью. Поэтому у матрицы JA не могут все собственные значения иметь отрицательные вещественные части и, следовательно, у системы (13) не может выполняться признак асимптотической устойчивости.

Теорема 2. *Пусть матрица JA имеет собственное значение с ненулевой вещественной частью. Тогда система (13) неустойчива.*

Теорема 3. *Пусть все собственные значения матрицы JA имеют нулевую вещественную часть. Тогда если все эти собственные значения являются полупростыми, то система (13) является устойчивой по Ляпунову (но не асимптотически). Если же хотя бы одно из этих собственных значений является неполупростым, то система (13) неустойчива.*

2.3 Линейные неавтономные гамильтоновые системы и их спектральные свойства

Рассмотрим линейную неавтономную гамильтонову систему вида (8):

$$\frac{dx}{dt} = JA(t)x,\ x \in R^{2N}, \quad (14)$$

в котором A(t) – вещественная непрерывная симметрическая (2N×$2N$¿ матрица, а J – матрица (5). Будем предполагать, что A(t) является T-периодической матрицей: $A(t+T) \equiv A(t)$. Систему (14) будем называть линейной периодической гамильтоновой системой (ЛПГС).

Пусть X(t) – фундаментальная матрица решений системы (14), а V=X(T) – ее матрица монодромии. Характер устойчивости системы (14) определяется свойствами собственных значений матрицы монодромии V, т.е. мультипликаторами системы (14). В свою очередь, собственные значения матрицы V являются решениями характеристического уравнений

$$p(\mu) \equiv det(V - \mu I) = 0. \qquad (15)$$

Степень многочлена $p(\mu)$ является четным числом.

Многочлен

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \qquad (16)$$

где $a_0 \neq 0$, называется возвратным, если $a_k = a_{n-k} (k = 0, 1, \ldots, n)$.

Пусть многочлен (17) является возвратным. В этом случае уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (17)$$

также будем называть возвратным. Имеют место следующие свойства возвратного уравнения (17).

- Возвратное уравнение (17) не имеет нулевой корень z=0.
- Пусть возвратное уравнение (17) имеет корень z_0. Тогда число $z = \frac{1}{z_0}$ также является корнем этого уравнения той же кратности.
- Пусть возвратное уравнение (17) четной степени имеет корень z=1 или z=-1. Тогда этот корень имеет четную кратность.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости линейной периодической гамильтоновой системы (14).

Система (14) имеет свои особенности, которые влияют на свойства ее устойчивости. Укажем некоторые из этих особенностей.

Как и в автономном случае, линейная периодическая гамильтонова система (14) не может быть асимптотически устойчивой, т.е. линейная периодическая гамильтонова система (14) не может быть асимптотически устойчивой.

Справедливость этого утверждения вытекает из приводимых ниже свойства G1 и признаков устойчивости системы (14).

G1. Если система (14) имеет мультипликатор μ_0 такой, что $|\mu_0 \vee$¿1, она имеет мультипликатор $1/\mu_0$, модуль которого больше единицы. Поэтому у системы (14) не могут все мультипликаторы μ удовлетворять неравенству $|\mu \vee$¿1.

Признаки устойчивости. Пусть система (14) имеет мультипликатор μ_0 такой, что $\mu_0 \neq 1$. Тогда система (14) неустойчива.

Таким образом, система (14) может быть устойчивой только тогда, когда все ее мультипликаторы удовлетворяют равенству $|\mu \vee$¿1, т.е. являются числами вида $\mu = e^{i\varphi}$.

Теорема 4. *Пусть все мультипликаторы системы (14) удовлетворяют равенству* $|\mu \vee$¿1. *Тогда если все эти мультипликаторы являются полупростыми, то система (14) является устойчивой по Ляпунову. Если же хотя бы один из этих мультипликаторов является неполупростым, то система (14) неустойчива.*

2.4 Задача о параметрическом резонансе

2.4.1 Резонансы в задаче об устойчивости ЛПГС

Для невозмущенной автономной системы (14) матрица монодромии V в T-периодической задаче имеет вид V=e^{TJA_0}. При этом мультипликаторы μ системы (14) связаны с собственными значениями λ матрицы JA_0 равенством $\mu=e^{T\lambda}$. В силу указанных выше свойств линейных гамильтоновых систем и в соответствии с теорией возмущений линейных операторов (см., например, [1]), верно, следующее: если матрица JA_0 имеет хотя бы одно собственное значение с ненулевой вещественной частью, то возмущенная ЛПГС

$$\frac{dx}{dt}=JA(t,\varepsilon)x,\, x\in R^{2N}, \tag{18}$$

в которой $A(t,\varepsilon)$ – вещественная симметрическая матрица и T-периодическая по t матрица (т.е. A(t+T, ε)≡$A(t,\varepsilon)$¿, а матрица J определена равенством (5), будет неустойчивой при всех малых |ε |.

Пусть все собственные значения матрицы JA_0 являются чисто мнимыми, а именно, ими являются числа:

$$\pm i\omega_1, i\omega_2, \ldots, i\omega_N, \tag{19}$$

где $\omega_j \geq 0$. Если некоторое собственное значение $i\omega_m$ имеет алгебраическую кратность k, то в списке (19) число $i\omega_m$ встречается ровно k раз. В этом случае при ε =0 все мультипликаторы ЛПГС (18) по модулю равны единице. Как было отмечено выше, особый интерес представляют ситуации, когда некоторые из этих мультипликаторов являются кратными.

Кратные мультипликаторы системы (14) возникают (см., например, [2]) при выполнении одного из условий:

S1) среди чисел (19) имеется хотя бы одно $i\omega_{m_0}$ такое, что:

$$i\omega_{m_0}=\frac{\pi k_0}{T}\,\textit{при некотором целом неотрицательном}\,k_0; \tag{20}$$

S2) среди чисел (19) имеется хотя бы одна пара $i\omega_{m_0}$ и $i\omega_{l_0}\left(m_0\neq l_0\right)$ такая, что:

$$i\omega_{m_0}\text{-}i\omega_{l_0}=\frac{2\pi k_0}{T}\quad \text{при некотором целом } k_0. \tag{21}$$

Замечание 1. *Равенство (20) означает, что соответствующий мультипликатор системы (14) равен 1 (если* k_0 *- четно) или -1 (если* k_0-¿*нечетно) четной кратности. Отсюда следует, что при выполнении равенства (20) невозмущенная система (14) не обладает свойством сильной устойчивости.*

Замечание 2. *Равенство (21) означает, что соответствующий мультипликатор системы (15) является кратным, при этом он равен*

$$\mu_0=e^{T\omega_{m0}i}=e^{T\omega_{l0}i}. \tag{22}$$

Если при этом числа ω_{m_0} и ω_{l_0}не удовлетворяют соотношению вида (20) (т.е. ω_{m_0}, $\omega_{l_0} \neq \frac{\pi k}{T}$ при любых целых k), то для мультипликатора (22) выполнено: $\mu_0 \neq \pm 1$.

Условие S2 охватывает и случай, когда матрица JA_0 имеет кратное чисто мнимое собственное значение. А именно, этот случай имеет место, если равенство (21) выполнено при k_0=0: тогда $\omega_{m0} i = \omega_{l0} i$.

2.4.2 Задача о параметрическом резонансе

Задачу исследования устойчивости системы (18) в условиях типа S1 или S2, часто называют (см., например,[1]) задачей о параметрическом резонансе, а сами эти соотношения называют параметрическими резонансами. При этом соотношение типа (20) называют простым резонансом, а соотношение типа (21) - комбинационным резонансом.

Задаче исследования устойчивости линейных гамильтоновых систем с периодическим возмущением и, в частности, задаче о параметрическом резонансе посвящено множество работ. Большинство исследований основаны на методах нормализации линейных гамильтоновых систем и на преобразовании гамильтониана системы (1) путём замены переменных.

Другие подходы исследования задачи о параметрическом резонансе основаны на классической теории возмущений линейных операторов. Исследования продолжаются в различных направлениях. Основную сложность здесь представляет задача построения формул первого приближения для мультипликаторов возмущённой неавтономной периодической гамильтоновой системы.

Задача о параметрическом резонансе для ЛПГС (1) изучается в следующих основных случаях, соответствующих условиям S1 и S2:

P_1. Матрица JA_0 имеет кратное собственное значение $\lambda = i\omega_0, где\, \omega_0 \geq 0 и\, \omega_0 \neq \frac{\pi k}{T}$ при натуральных k.

P_2. Матрица JA_0 имеет два простых собственных значения $\lambda_1 = i\omega_1$ и $\lambda_2 = i\omega_2, где\, \omega_1, \omega_2 > 0 и\, \omega_1, \omega_2 \neq \frac{\pi k}{T}$ при натуральных k, при этом $\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi k_0}{T}$ при некотором k_0.

P_3. Матрица JA_0 имеет простое собственное значение $\lambda = i\omega_0, где\, \omega_0 = \frac{\pi k_0}{T}$ при натуральных k_0.

Будем предполагать, что остальные (отличные от $\pm i\omega_0$ в случаях P_1 и P_3 и от $\pm i\omega_1 и \pm i\omega_2$ в случаях P_2.

Случаи P_1 и P_3 соответствую условию (21), а случай P_3 – условию (20); впрочем, если в случае $P_1 имеем\, \omega_0 = 0$, то он соответствует обоим условиям (20) и (21).

Нам удобно систему (1) представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = J\left[A_0 + \varepsilon S_1(t) + S_2(t, \varepsilon)\right]x, x \in R^{2N},$$

(23)

в котором J - это матрица (5), $A_0 \equiv A(t, 0)$- постоянная симметрическая матрица, $S_1(t) и S_2(t, \varepsilon)$ – вещественные, симметрические и T-периодические по t матрицы, при этом матрица $S_2(t, \varepsilon)$ является гладкой по ε и удовлетворяет соотношению: $\left\| S_2(t, \varepsilon) \right\| O(\varepsilon^2) при\, \varepsilon \to 0$ равномерно по t.

2.4.3 Анализ случая P_3

Рассмотрим более детально случай P_3.

Здесь матрица монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$ «невозмущённой» системы

$$\frac{dx}{dt} = JA_0 x, x \in R^{2N}$$

(24)

имеет полупростое собственное значение μ_0 кратности 2, где $\tau=1$ (если k_0 чётно) или $\tau=-1$ (если k_0 нечётно).

Матрица монодромии $V(\varepsilon)$ «возмущённой» системы (23) при малых $|\varepsilon|$ имеет пару собственных значений $\mu_1(\varepsilon) u \mu_2(\varepsilon)$ таких, что $\mu_1(0)=\mu_2(0)=\tau$. Функции $\mu_1(\varepsilon) u \mu_2(\varepsilon)$ непрерывно дифференцируемы и представимы в виде

$$\mu_1(\varepsilon)=\tau+\mu_1^{(1)}(\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right), \mu_2(\varepsilon)=\tau+\mu_1^{(2)}(\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right) \qquad (25)$$

Приведём утверждения относительно вычисления коэффициентов $\mu_1^{(j)}$ в формулах (25). С этой целью отметим, что в рассматриваемом случаи имеется ненулевой вектор $e+ig \in C^{2N}$, где $e, g \in R^{2N}$ такой, что:

$$JA_0(e+ig)=i\omega_0(e+ig).$$

(26)

При этом векторы $e, g \in R^{2N}$ будут собственными и для матрицы монодромии $V_0 = e^{JA_0T}$, отвечающими полупростому собственному значению τ кратности 2.

Лемма 1. *Имеет место соотношение:* $(e, Jg) \neq 0$.

Положим

$$\nu = \frac{1}{(e, Jg)}.$$

(27)

Число (e, Jg), а следовательно, и число ν, является вещественным. Определим матрицу:

$$B = \nu\tau \begin{bmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -a \end{bmatrix},$$

(28)

в котором числа $a, b_1 u b_2$ определяются равенствами:

$$a = \int_0^T \{\cos(2\omega_0 t)(S_1(t)e, J g) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)[(S_1(t)g, J g) - (S_1(t)e, J e)]\} dt, (29)$$

$$b_1 = \int_0^T ¿¿$$

$$b_2 = b_1 - [(S_0 e, Je) + (S_0 g, Jg)];$$

(31)

здесь $S_0 = \int_0^T S_1(t) dt$, S_1 – матрица из (23).

Теорема 5. *Коэффициенты* $\mu_1^{(1)} u \mu_1^{(2)}$ *в формулах (25) – это собственные значения матрицы (28).*

Положим

$$\Delta = a^2 + b_1 b_2.$$

(32)

Собственные значения $\lambda_1 u \lambda_2$ матрицы (28) – это числа $\lambda_{1,2}=\pm\nu\tau\sqrt{\Delta}$, которые могут быть как вещественными, так и чисто мнимыми. Следовательно, коэффициенты $\mu_1^{(1)} u \mu_1^{(2)}$ в формулах (25) – это числа

$$\mu_1^{(1)}=\nu\tau\sqrt{\Delta},\mu_1^{(2)}=-\mu_1^{(1)}.$$

(33)

Приведём некоторые следствия теоремы 5.

Следствие 1. *В случае* P_3 *мультипликатор* μ_0*системы (24) равен* $\tau=1$ *или* $\tau=-1$ *и является полупростым кратности 2. Система (24) не является сильно устойчивой. Для малых* $|\varepsilon|$ *мультипликатор* μ_0*расщепляется в соответствии с формулами (25) и (33).*

Следствие 2. *Пусть* $\Delta<0$*.Тогда для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (23) при малых* $|\varepsilon|$ *мультипликатор* τ *системы (24) остаётся на единичной окружности:* $|\mu_1(\varepsilon)|=|\mu_2(\varepsilon)|=1$*. В этом случае система (23) остаётся устойчивой.*

Следствие 3. *Пусть* $\Delta>0$*.Тогда для данного возмущения* $S_1(t)$ *системы (23) при малых ненулевых* $|\varepsilon|$ *мультипликатор* τ *системы (24) покидает единичную окружность:* $|\mu_1(\varepsilon)|<1 u |\mu_2(\varepsilon)|>1$*. В этом случае система (23) не устойчива при малых ненулевых* $|\varepsilon|$*.*

3 Приближённое исследование прямолинейных точек либрации

3.1 Построение точек либрации

Обратимся к системе (1) или (2).

⎰ξ -2 η '= {1} over {1+ ecosv} {∂ Ω} over {∂ξ} , # η +2ξ '= $\frac{1}{1+ecosv}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}$,

(1)

где

$$\Omega=\frac{\xi^2+\eta^2}{2}+W\,,W=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2}\,,\mu=\frac{m_2}{m_1+m_2}\,,0<\mu\leq\frac{1}{2}\,,r_1=\sqrt{(\xi)^2+\eta^2}\,,r_2=¿\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}.$$

Будем считать v=t в уравнениях (1) и запишем в развернутом виде:

⎰ξ -2 η =ρ left (ξ-μ+ {μ-1} over {{left ({ξ} ^ {2} + {η} ^ {2} right)} ^ {{3}

(2)

В плоскости (ξ,η) точки либрации $L_1, L_2 u L_3$ находятся на прямой η = 0, найти их в явном виде пока что не представляется возможным, что и вызывает интерес и важность данного вопроса. Координаты можно представить в виде

$L_1(\xi_1(\mu),0,0,\xi_1(\mu))$,

$L_2(\xi_2(\mu),0,0,\xi_2(\mu))$,

$L_3(\xi_3(\mu), 0, 0, \xi_3(\mu))$.

Приравняем правую часть уравнений (1) к нулю и решим полученную систему. Пусть η = 0, тогда из первого уравнения получим

$$\xi - \mu + \frac{\mu - 1}{|\xi|^3}\xi - \frac{\mu}{|\xi - 1|^3}(\xi - 1) = 0.$$

(3)

Знак при ξ и его значение влияет на раскрытие модулей, т.е. (3) распадётся на три случая (уравнения), которые будут соответствовать одной из прямолинейных точек либрации: $L_1(\xi < 0), L_2(0 < \xi < 1), L_3(\xi > 1)$.

Убрав знак модуля и сократив нужные элементы, получим:

$$\xi - \mu + \frac{\mu - 1}{\xi^2} - \frac{\mu}{(\xi - 1)^2} = 0$$

Приведём к общему основанию и приравняем числитель к 0:

$$\xi^3(\xi^2 - 2\xi + 1) - \mu\xi^2(\xi^2 - 2\xi + 1) + (\mu - 1)(\xi^2 - 2\xi + 1) - \mu\xi^2 = 0$$

$$\xi^5 - 2\xi^4 + \xi^3 - \mu\xi^4 + 2\mu\xi^3 - \mu\xi^2 + \mu\xi^2 - 2\xi\mu + \mu - \xi^2 + 2\xi - 1 - \mu\xi^2 = 0$$

$$\xi^5 - \xi^4(2 + \mu) + \xi^3(1 + 2\mu) - \xi^2(\mu - \mu + 1 + \mu) - \xi(2\mu - 2) + \mu - 1 = 0$$

$$\xi^5 - \xi^4(2 + \mu) + \xi^3(1 + 2\mu) - \xi^2(1 + \mu) - 2\xi(\mu - 1) + \mu - 1 = 0$$

При различном расположении точек либрации получим уравнения для нахождения координат:

$$L_1(\xi < 0): \xi^5 - \xi^4(2 + \mu) + \xi^3(1 + 2\mu) - \xi^2(\mu - 1) + 2\xi(\mu - 1) - \mu + 1 = 0;$$

$$L_2(0<\xi<1): \xi^5-\xi^4(2+\mu)+\xi^3(1+2\mu)+\xi^2(\mu-1)-2\xi(\mu-1)+\mu-1=0$$

$$L_3(\xi>1): \xi^5-\xi^4(2+\mu)+\xi^3(1+2\mu)-\xi^2(\mu+1)-2\xi(\mu-1)+\mu-1=0$$

Будем рассматривать точки $L_1, L_2 u L_3$ при различных μ. Из каждого полученного уравнения сразу просчитаем приблизительное (или точное по возможности) значение ξ. Результаты приведены ниже.

Для $L_1(\xi<0)$:

μ	0.	0.	0.	0	0.	0.	0.	0.	0.
ξ	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Табл.1

Для $L_2(0<\xi<1)$:

μ	0.1	0.2	0.	0.	0	0.	0.	0.	0.9
ξ	0.7	0.6	0.	0.	0	0.	0.	0.	0.2

Табл. 2

Для $L_3(\xi>1)$:

μ	0	0.2	0	0	0	0.6	0	0	0
ξ	1	1.4	1	1	1	1.7	1	1	1

Табл. 3

Динамические свойства точек либрации значительны в практическом и теоретическом планах. Тут в отдельности значимы и интересны вопросы об устойчивости по Ляпунову точек либрации и, в частности, зависимости свойств устойчивости от параметров ε и μ, вопросы существования в окрестностях точек либрации периодических и ограниченных решений, условия качественных перестроек (бифуркациях) поведения решений системы (1). Зафиксируем то, что точки либрации $L_1, L_2 u L_3$ неустойчивы при небольших ε и всех μ. Наряду с этим точки либрации L_4 и L_5могут быть устойчивыми и неустойчивыми и, значит, в их окрестностях допустимы разнообразные бифуркации.

Для определенности будем рассматривать точку L_1. Дальнейшие рассуждения будут верны и для остальных прямолинейных точек.

3.2 Переход к гамильтоновой форме

Обратимся вновь к системе

ξ-2 η '= {1} over {1+ ecosv} {∂ Ω} over {∂ ξ} , # η +2ξ '=$\frac{1}{1+ecosv}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}$,

(1)

где

$$\Omega=\frac{\xi^2+\eta^2}{2}+W,W=\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2},\mu=\frac{m_2}{m_1+m_2},0<\mu\leq\frac{1}{2},r_1=\sqrt{(\xi)^2+\eta^2},r_2=¿\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}.$$

В системе (1) произведем замену $x_1=\xi,x_2=\eta,x_3=\xi'-\eta,x_4=\eta'+\xi$.

Следовательно,

$\xi¿x_1,\eta¿x_2,\xi'=x_3+\eta=x_3+x_2,\eta'=x_4-\xi=x_4-x_1.$

Поэтому

$$x_1'=\xi'=x_3+x_2,x_2'=\eta'=x_4-x_1,x_3'=\xi''-\eta'=\left|\begin{matrix}\xi''\,находим\\ из(1)\end{matrix}\right|=\rho\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}++2\eta'-\eta'=\eta'+\rho\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}=x_4$$

и

$$x_4'=\eta''+\xi'=\rho\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}-2\xi'+\xi'=\rho\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}-\xi'=-x_3-x_2+\rho\frac{\partial\Omega}{\partial\eta}$$

Тогда система (1) запишется в виде:

$$\begin{cases}x_1'=x_2+x_3\\ x_2'=-x_1+x_4\\ x_3=-x_1+x_4+\rho\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\\ x_4'=-x_2-x_3+\rho\frac{\partial\Omega}{\partial x_2},\end{cases}$$

(2)

где $$\Omega(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + W,$$

(3)

$$W = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_1},$$

(4)

$$r_1 = \sqrt{(x_1)^2 + x_2^2}, r_2 = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}.$$

(5)

Гамильтоновой системой четвертого порядка называется система вида

$$\begin{cases} x_1^{'} = \frac{\partial H}{\partial x_3} \\ x_2^{'} = \frac{\partial H}{\partial x_4} \\ x_3^{'} = \frac{-\partial H}{\partial x_1} \\ x_4^{'} = \frac{-\partial H}{\partial x_2} \end{cases}$$

(6)

где $H(x_1, x_2, x_3, x_4, t)$ – функция Гамильтона.

Для системы (2) в качестве функции $H(x_1, x_2, x_3, x_4, t)$ возьмем функцию

$$H = \frac{1}{2}\left(p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2\right) + p_\xi \eta - p_\eta \xi + \frac{ecosv}{2(1 + ecosv)}\left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\right) - \frac{1}{1 + ecosv} W,$$

$где\, p_\xi = \xi^{'} - \eta, p_\eta = \eta^{'} + \xi, p_\zeta = \zeta'$, т.е.

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}{2} + x_2 x_3 - x_1 x_4 - \rho\, \Omega(x_1, x_2).$$

(7)

Лемма 2. *Функция (7) является функцией Гамильтона системы (2).*

<u>Доказательство:</u> Используем (9), чтобы получить из (10) систему (5). По отдельности распишем каждую из четырех строчек системы, находя их частные производные.

$$x_1^{'}=\frac{\partial H}{\partial x_3}=H_{x_3}^{'}=\left(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{2}+x_2x_3-x_1x_4-\rho\,\Omega\left(x_1,x_2\right)\right)_{x_3}^{'}=x_3+x_2+0+0=x_3+x_2$$

$$x_2^{'}=\frac{\partial H}{\partial x_4}=H_{x_4}^{'}=\left(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{2}+x_2x_3-x_1x_4-\rho\,\Omega\left(x_1,x_2\right)\right)_{x_4}^{'}¿x_4+0-x_1+0=x_4-x_1$$

$$x_3^{'}=\frac{-\partial H}{\partial x_1}=-H_{x_1}^{'}=-\left(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{2}+x_2x_3-x_1x_4-\rho\,\Omega\left(x_1,x_2\right)\right)_{x_1}^{'}=-\left(x_1-x_4+0-\rho\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\right)=¿$$

$$x_4^{'}=\frac{-\partial H}{\partial x_2}=-H_{x_2}^{'}=-\left(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{2}+x_2x_3-x_1x_4-\rho\,\Omega\left(x_1,x_2\right)\right)_{x_2}^{'}=-\left(x_2+x_3+0-\rho\frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\right)=-$$

Тем самым получили (2), что и требовалось доказать.

3.3 Линеаризация задачи

Линеаризованное в точке $L_1\left(\xi_1(\mu),0,0,\xi_1(\mu)\right)$ уравнение для системы (2) имеет вид: $\frac{dh}{dt}=F^{'}\left(L_1\right)h\text{, }где\,h\in R^4,F^{'}-матрица\,Якоби.$

$$F^{'}\left(L_1\right)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ \rho a_1 & a_2 & 0 & 1\\ a_3 & \rho a_4 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(8)

$$a_1=-1+\left(\Omega_{x_1}^{'}\right)_{x_1}^{'},\;где\,x_1=\xi_1(\mu),x_2=0,x_4=\xi_1(\mu)$$

$$\Omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+\frac{(1-\mu)}{\sqrt{\left(x_1\right)^2+x_2^2}}+\frac{\mu}{\sqrt{\left(x_1-1\right)^2+x_2^2}}$$

$$\Omega'_{x_1}=x_1-\frac{(1-\mu)\bullet\frac{1}{2}\bullet 2(x_1)}{\sqrt{((x_1)^2+x_2^2)^3}}-\frac{\mu\bullet\frac{1}{2}\bullet 2(x_1-1)}{\sqrt{((x_1-1)^2+x_2^2)^3}}=x_1-\frac{(1-\mu)(x_1)}{\sqrt{((x_1)^2+x_2^2)^3}}-\frac{\mu(x_1-1)}{\sqrt{((x_1-1)^2+x_2^2)^3}}$$

$$\Omega'_{x_2}=x_2-\frac{(1-\mu)\bullet\frac{1}{2}\bullet 2x_2}{\sqrt{((x_1)^2+x_2^2)^3}}-\frac{\mu\bullet\frac{1}{2}\bullet 2x_2}{\sqrt{((x_1-1)^2+x_2^2)^3}}=x_2-\frac{(1-\mu)x_2}{\sqrt{((x_1)^2+x_2^2)^3}}-\frac{\mu x_2}{\sqrt{((x_1-1)^2+x_2^2)^3}}$$

$$(\Omega'_{x_1})'_{x_1}=1-\frac{(1-\mu)\sqrt{((x_1)^2+x_2^2)^3}-(1-\mu)(x_1)\bullet\frac{3}{2}\sqrt{((x_1)^2+x_2^2)}\bullet 2(x_1)}{((x_1)^2+x_2^2)^3}-\frac{-\mu\sqrt{((x_1-1)^2+x_2^2)^3}-\mu\bullet(x}{((x}$$

$$a_1=-1+1-\frac{(1-\mu)(\xi_1)^3-3(1-\mu)(\xi_1)^3}{(\xi_1)^6}-\frac{\mu(\xi_1-1)^3-3\mu(\xi_1-1)^3}{(\xi_1-1)^6}=\frac{-(1-\mu)-3(1-\mu)}{(\xi_1)^3}-\frac{-\mu-3}{(\xi_1-}$$

$$a_2=(\Omega'_{x_1})'_{x_2}$$

$$(\Omega'_{x_1})'_{x_2}=\frac{(1-\mu)(x_1)\bullet\frac{3}{2}\bullet\sqrt{(x_1)^2+x_2^2}\bullet 2x_2}{((x_1)^2+x_2^2)^3}+\frac{\mu(x_1-1)\bullet\frac{3}{2}\bullet\sqrt{(x_1-1)^2+x_2^2}\bullet 2x_2}{((x_1-1)^2+x_2^2)^3}$$

$$a_2=0$$

$$a_3=(\Omega'_{x_2})'_{x_1}=a_2=0$$

$$a_4=-1+(\Omega'_{x_2})'_{x_2}$$

$$(\Omega'_{x_2})'_{x_2}=1-\frac{(1-\mu)\sqrt{((x_1)^2+x_2^2)^3}-x_2(1-\mu)\bullet\frac{3}{2}\sqrt{(x_1)^2+x_2^2}\bullet 2x_2}{((x_1)^2+x_2^2)^3}-\frac{-\mu\bullet\sqrt{((x_1-1)^2+x_2^2)^3}-x_2\mu\bullet\frac{3}{2}}{((x_1-1)^2+x}$$

$$a_4=\frac{-(1-\mu)\bullet(\xi_1)^3}{(\xi_1)^6}-\frac{\mu(\xi_1-1)^3}{(\xi_1-1)^6}=\frac{-1-\mu}{(\xi_1)^3}-\frac{\mu}{(\xi_1-1)^3}\ .$$

Таким образом, линеаризованная в окрестности точки L_1 система (8) имеет вид

$$\frac{dh}{dt}=F'(L_1)h,h\in R^4,$$

(9)

где $$F'(L_1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \rho a_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho a_4 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

(10)

$a\,числа\,a_1\,и\,a_4\,определяются\,формулами$

$$a_1=\frac{2(1-\mu)}{(\xi_1)^3}+\frac{2\mu}{(\xi_1-1)^3}\ ,\ a_4=\frac{-1-\mu}{(\xi_1)^3}-\frac{\mu}{(\xi_1-1)^3}.$$

3.4 Исследование резонансных свойств матрицы Якоби

Для исследования задачи определим топологический тип прямолинейных точек через нахождение собственных значений матрицы Якоби. Рассмотрим один из трех случаев.

Найдём собственные значения матрицы (10) при различных значениях параметра масс $\mu\in[0,1)\,и\,\rho=1$, решив характеристическое уравнение $\lambda^4-(a_1+a_4-2)\lambda^2+(a_1+a_1a_4+a_4+1)=0$. Приближённые результаты приведены в таблице 4.

Значения $\mu\,и\,\xi$		**Значения** $a_1\,и\,a_4$		**Хар. уравнение**	**Собственные значения**
μ=	$\xi=-0.94$	$a_1=$¿-2.1834	$a_4=$¿1.0917	$\lambda^4+3.0917\lambda^2-2.4$	$\lambda_{1,2}=\pm 0.812$ $\lambda_{3.4}=\pm 1.936$
μ=	$\xi=-0.88$	$a_1=$¿-2.3855	$a_4=$¿1.1928	$\lambda^4+3.1927\lambda^2-3.0$	$\lambda_{1,2}=\pm 0.875$ $\lambda_{3.4}=\pm 1.989$
μ=	$\xi=-0.82$	$a_1=$¿-2.6087	$a_4=$¿1.3044	$\lambda^4+3.3043\lambda^2-3.7$	$\lambda_{1,2}=\pm 0.940$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.046$
μ=	$\xi=$	$a_1=$¿-2.8584	$a_4=$¿1.4292	$\lambda^4+3.4292\lambda^2-4.5$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.007$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.108$
μ=	$\xi=-0.69$	$a_1=$¿-3.1397	$a_4=$¿1.5699	$\lambda^4+3.5698\lambda^2-5.4$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.078$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.175$
μ=	$\xi=-0.63$	$a_1=$¿-	$a_4=$¿1.73	$\lambda^4+3.73195\lambda^2-6.$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.153$

		3.4639	*195*		$\lambda_{3.4}=\pm 2.2498$
μ	$\xi=-0.55$	$a_1=¿$-*3.8489*	$a_4=¿$*1.9244*	$\lambda^4+3.9245\lambda^2-8.3$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.2361$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.3351$
μ	$\xi=$	$a_1=¿$-*4.3309*	$a_4=¿$*2.1655*	$\lambda^4+1.6415\lambda^2-10.$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.5901$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.0421$
μ	$\xi=-0.35$	$a_1=¿$-5.0135	$a_4=¿$*2.5067*	$\lambda^4+4.5068\lambda^2-14.$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.4570$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.5748i$

Табл.4

На основе полученных данных можем сделать вывод о топологическом типе точки, он имеет вид (1, 2, 1).

Напомним, что в системе (9) имеет место резонанс, соответствующий случаю P_3, если матрица

$$F^{'}\left(L_1\right) имеет\, собственные\, значения \pm i\omega_0, где\, \omega_0=\frac{\pi k_0}{T}, k_0-натуральное\, число.$$

У нас $T=2\pi$, следовательно, $\omega_0=\frac{k_0}{2}$. Случаи $k_0=1, k_0=2, k_0=3$ быть не могут. Нам подходит $k_0=4$.Для этого нужно взять значение $\mu=0.22$. Вообще говоря,$резонанс\, возникает\, при\, T=2\pi m$, а $T=2\pi$ называется главным резонансом.

Около $\mu=0.2$ есть такое μ , при котором возникает резонанс. Найдем его приближенно методом перебора (см. табл. 5).

μ	$\xi=-$	$a_1=¿$**-2.4067**	$a_4=¿$**1.2034**	$\lambda^4+3.2034\lambda^2-3.$	$\lambda_{1,2}=\pm 0.88$ $\lambda_{3.4}=\pm 1.99$
μ	$\xi=-$	$a_1=$-*2.42803*	$a_4=¿$*1.21401*	$\lambda^4+3.21401\lambda^2-3$	$\lambda_{1,2}=\pm 0.88$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.00$

Табл.5

Аналогично для $\mu=0.6$(см. табл. 6):

μ	$\xi=-0.62$	$a_1=¿$**-3.4983**	$a_4=¿$**1.7491**	$\lambda^4+3.7492\lambda^2-6.8$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.16$ $\lambda_{3.4}=\pm 2.25$

Табл.6

И для $\mu=0.7(см.табл.7)$:

μ=	$\xi=-$	$a_1=$¿**-3.80704**	$a_4=$¿**1.9035**	$\lambda^4+3.9035\lambda^2-8.1$	$\lambda_{1,2}=\pm 1.22$ $\lambda_{3,4}=\pm 2.32$

Табл.7

Из таблицы 5 получаем, что при $\mu=0.22$собственные значения имеют вид $\lambda=\pm 2i$. А это значит, что $\omega_0=\frac{\pi k_0}{T}=\frac{\pi k_0}{2\pi}=\frac{k_0}{2}=2$, следовательно, $k_0=4$. Так как k_0 – чётное число, то число из пункта 2.4.3 $\tau=1$.

3.5 Исследование главных резонансов

Исследуем задачу о гиперболичности. Система будет не автономной, если $\rho\neq 1$. Когда $\varepsilon=0$, то мы имеем круговую задачу, а интересует нас эллиптическая задача при малых ε, т.е. рассматриваем задачу о гиперболичности системы для значений (μ,ε), которые лежат на вертикальной прямой P, которая проходит через точку с координатами ($\mu_0,0$¿ (См. рисунок 5). Поэтому расширим задачу и будет исследовать гиперболичность для значений (μ,ε) , которые лежат на $\mu_0+m\varepsilon,$ где m – некоторый фиксированный коэффициент. Простыми словами, мы хотим подняться вверх на плоскости, для чего делаем замену $\mu=\mu_0+m\varepsilon$=0,22 +$m\varepsilon$

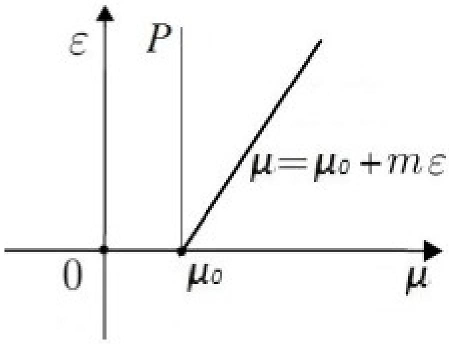


Рис.5

Для того, чтобы приближенно построить мультипликаторы возмущенной системы нужно сначала построить мультипликаторы невозмущенной системы. Так как система автономна, то ее матрица монодромии V в T-периодической задаче является матричной экспонентой $V=e^{TJB(\mu)}$. Поэтому ее мультипликаторы определяются равенствами p = $e^{T\lambda}$, где λ – собственные значения матрицы JB(μ).

Разберем случаи, когда матрица JB(μ) имеет пару простых чисто мнимых собственных значений ±iω_0 , где $\omega_0=\pm\frac{\pi k_0}{T}$ при некотором натуральном k_0. Другими словами (учитывая, что в нашем случае T = 2π), критическим случаем может быть только ситуация, когда матрица JB(μ) имеет пару собственных значений ± $\frac{k_0 i}{2}$ при некотором натуральном k_0. Отсюда вытекает вопрос: есть ли такие $e^{T\lambda}=1$ при T = 2π, 4 π, …?

Рассмотрим нашу систему в линеаризованном виде:

$$h^{'}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \rho a_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho a_4 & -1 & 0 \end{pmatrix} h, h\in R^4$$

(11)

Т.е. она имеет вид:

$h^{'}=B(\varepsilon,\mu,t)h,h\in R^4,$

(12)

$$где\, B(\varepsilon,\mu,t)=F^{'}(L_1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \rho a_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho a_4-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$Поскольку\, \mu(\varepsilon)=\mu_0+m\varepsilon$, то (4.1) принимает уточненный вид:

$h^{'}=B(\varepsilon,\mu(\varepsilon),t)h,h\in R^4$

(13)

Введем обозначение JA=$B(\varepsilon,\mu(\varepsilon),t)$.

Матрица JA имеет простое собственное значение $\lambda=i\omega_0,где\, \omega_0=\frac{\pi k_0}{T}при\, некотором\, натуральном\, k_0$. Исходя из таблицы 1 предыдущего пункта данной работы, можно обратить внимание на то, что существуют такие μ, при котором возникает сильный резонанс – при $\mu=0.22$ с периодом Т=2π. Разберём этот случай. Линейная система в круговой задаче (4.2) (где $\rho=1¿$ имеет четыре мультипликатора $\mu_1=\mu_2=1,\mu_3<1,\mu_4>1(См.рис.6)$.

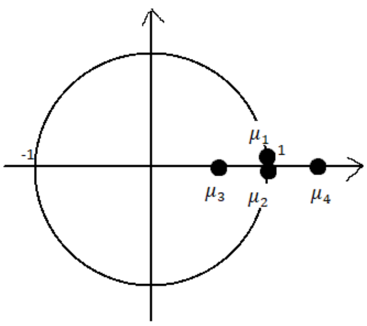


Рис. 6

Мультипликаторы определяются формулой $\mu=e^{\omega T}$.

Поэтому $\mu_1=\mu_2=e^{2i*2\pi}=1, \mu_3=e^{0.88*2\pi}>1, \mu_4=e^{-0.88*2\pi}<1$.

Введём определение.

Определение 1. *Систему* $x'=B_0 x$ *назовём сильно гиперболичной с топологическим типом (1, 2, 1), если при всех малых* ε*система* $x'=B_0 x+\varepsilon S_1(t)x$*также имеет топологический тип (1, 2, 1).*

Используя известную формулу разложения $\frac{1}{1+q}=1-q+q^2-q^3+\ldots,$ получим $\frac{1}{1+\varepsilon cost}=1-\varepsilon cost+\varepsilon^2\cos^2 t-\ldots,$ следовательно, $\rho=\frac{1}{1+\varepsilon cost}\approx 1-\varepsilon cost$. И можно представить параметр масс в виде $\mu=\mu_0+m\varepsilon$, где m выбрано произвольно.

Рассмотрим основную линейную систему $h'=B_0(\mu)h+S_1 h$ *,где*

$$S_1(t)=B'_\varepsilon(\varepsilon,t)|_{\varepsilon=0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1(m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2(m) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1(m,t)=\left(\frac{a_1(\mu_0+m\varepsilon)}{1+\varepsilon cost}\right)'_{\varepsilon=0}, f_2(m,t)=\left(\frac{a_4(\mu_0+m\varepsilon)}{1+\varepsilon cost}\right)'_{\varepsilon=0}.$$

В нашем случае матрица $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \rho a_1(\mu) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho a_4(\mu) & -1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет вид:

$$B(\varepsilon,t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a_1(\mu_0+m\varepsilon)}{1+\varepsilon cost} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{a_4(\mu_0+m\varepsilon)}{1+\varepsilon cost} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому $B(\varepsilon,\mu,t)=B_0(\mu)+\varepsilon S_1+\ldots,$

$$где\, B_0=B(0,t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1(\mu_0) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_4(\mu_0) & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные векторы матрицы

$$B_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1(\mu_0) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_4(\mu_0) & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}42803 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}21401 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как собственные значения $\lambda=\pm 2i$, имеем $B_0 z=z\bullet 2i.$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}42803 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1{,}21401 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}.$$

Пусть $z_1=1$, тогда $\begin{cases} z_2+z_3=2i \\ -1+z_4=2iz_2 \\ -2.4+z_4=2iz_3 \\ 1.2z_2-z_3=2iz_4 \end{cases}$

Подстановкой одного уравнения в другое и т.д. находим $z_2=0.67850375i, z_3=1.39251875i, z_4=-0.3570075.$

При этом $z=e+ig=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.36 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 1.4 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Лемма 3. *Имеет место соотношение:* $(e,Jg)\neq 0.$

Проверим лемму. $Jg=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 1.4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}7 \end{pmatrix}$

$$(e, Jg) = \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6 \end{matrix}, \begin{matrix} 1,4 \\ 0 \\ 0 \\ -0,7 \end{matrix} \right) = 1.4 + 0.2 = 1.6 \neq 0$$

Положим

$$\nu = \frac{1}{(e, Jg)} = \frac{1}{1.6} \approx 0.6 \neq 0 \in R\left(m.\kappa\,(e, Jg) \in R\right).$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.36 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 1.4 \\ 0 \end{pmatrix}, Jg = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0 \\ 0 \\ -0,7 \end{pmatrix},$$

$$Je = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.36 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь схемой из п. 2.4.3, видим, что из (29)-(31) (того же пункта) следует, что далее нужно вычислить векторы $(S_1 e, Jg)$,$(S_1 g, Jg)$, $(S_1 e, Je)$.

$$S_1 e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.51m + 2.43 cost & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.98m + 1.3 cost & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.36 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = ¿ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.35m - 0.47 cost \end{pmatrix},$$

$$(S_1 e, Jg) = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0.51m + 2.43 cost \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1,4 \\ 0 \\ 0 \\ -0,7 \end{matrix} \right) = 0,$$

$$(S_1 g, Jg) = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.69m + 0.91 cost \end{matrix}, \begin{matrix} 1,4 \\ 0 \\ 0 \\ -0,7 \end{matrix} \right) = 0.48m - 0.64 cost,$$

$$\left(S_1 e, Je\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.36 \\ 0.51m+2.43cost, & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=-0.51m+2.4cost.$$

Просчитав скаляры, сможем использовать их в формулах (29)-(31) для нахождения коэффициентов, чтобы найти матрицу (28).

$$a=\int_0^T \{\cos(2\omega_0 t)(S_1(t)e, Jg)-\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)[(S_1(t)g, Jg)-(S_1(t)e, Je)]\}dt=\int_0^T \{\cos(4t)\cdot$$

$$b_1=\int_0^T ¿¿$$

$$b_2=b_1-\left[(S_0 e, Je)+(S_0 g, Jg)\right];$$

здесь $S_0=\int_0^T S_1(t)dt$, S_1 – матрица из (23).

$$S_0=\int_0^T S_1(t)dt=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1.02m\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.96m\pi & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_0 e=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1.02m\pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.96m\pi & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0.36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.02m\pi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(S_0 e, Je\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.36 \\ 1.02m\pi, & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=-1.02m\pi,$$

$$\left(S_0 g, Jg\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1.4 \\ 0 & 0 \\ 1.43m\pi, & 0 \\ -1.37m\pi & -0.7 \end{pmatrix}=0.96m\pi.$$

$$b_2=b_1-\left[(S_0 e, Je)+(S_0 g, Jg)\right]=-0.03m\pi-(-1.02m\pi+0.96m\pi)=-0.03m\pi+0.06m\pi$$

Подставили эти числа в формулу (32) пункта 2.4.3:

$\Delta = a^2 + b_1 b_2 = (-0{,}03 * 0{,}03) m\pi = -0.0009 m^2 \pi^2 < 0$ для $\forall m$.

Собственные значения $\lambda_1 u \lambda_2$ матрицы– это числа $\lambda_{1,2} = \pm 0.6\sqrt{-0.0009 m^2 \pi^2} = \pm 0.6 * 0.03 m\pi i = \pm 0.18 m\pi i$, которые являются чисто мнимыми. Следовательно, коэффициенты $\mu_1^{(1)} u \mu_1^{(2)}$ в формулах (25) – это числа

$$\mu_1^{(1)} = \nu\tau\sqrt{\Delta} = 0.18 m\pi i, \mu_1^{(2)} = -\mu_1^{(1)} = -0.18 m\pi i.$$

В нашем случае P_3 мультипликатор τсистемы равен $\tau = 1$ и является полупростым. Система не является сильно устойчивой. Для малых $|\varepsilon|$ мультипликатор τрасщепляется.

Опираясь на следствие 2 (п.2.4.3) и того факта, что $\Delta < 0$ можно сделать вывод о гиперболичности системы.

Таким образом, доказаны две теоремы. Рассмотрим две линейные системы $x' = B_0 x, x \in R^4$, *(14)*

$$где\, B_0 = J A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1(\mu_0) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_4(\mu_0) & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{2(1-\mu)}{(\xi_1)^3} + \frac{2\mu}{(\xi_1 - 1)^3}, \quad a_4 = \frac{-1-\mu}{(\xi_1)^3} - \frac{\mu}{(\xi_1 - 1)^3}$$

и

$x' = B_0(\varepsilon, \mu(\varepsilon), t) x, x \in R^4$ при всех малых ε. *(15)*

Здесь $\mu_0 \approx 0.22$.

Теорема 1. *В задаче о* $2\pi -$¿*периодических решениях линейной системе* (14) *имеет место сильный резонанс.*

А именно, матрица B_0 имеет собственные значения

$$\lambda = \pm i\omega_0, \omega_0 = \frac{\pi k_0}{T} = ¿ \frac{k_0}{2} npu\, k_0 = 4.$$

Теорема 2. *В задаче* $o 2\pi - ¿$*периодических решениях линейная система (14) является сильно гиперболичной.*

Другими словами, топологический тип автономной системы (14) совпадает с топологическим типом неавтономной системы.

Заключение

В настоящей работе изучены спектральные и резонансные свойства в окрестности прямолинейных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел (ПОЭЗТТ). Изучены формулы возмущения для мультипликаторов резонансной задачи. Доказано, что прямолинейные точки либрации в основных резонансах обладают свойством сильной гиперболичности.

Получены следующие результаты:

– исследовано построение прямолинейных точек либрации системы, имеющей сильный резонанс;

– изучены спектральные свойства прямолинейных точек либрации ПОЭЗТТ;

– изучены условия возникновения основных резонансов в ПОЭЗТТ;

- доказана сильная гиперболичность.

Я подтверждаю, что настоящая работа написана мною лично и не нарушает интеллектуальные права третьих лиц.

/Давыдова Э.В.

Список использованных источников и литературы

1. Давыдова Э.В. Исследование спектральных свойств треугольных точек либрации задачи трех тел, Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа»: Тезисы докладов. Уфа: Изд-во БашГУ, 2019. - 279 с.
2. Давыдова Э.В. О спектральных свойствах прямолинейных точек либрации ограниченной задачи трех тел. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа»: Тезисы докладов. Уфа: Аэтерна, 2020. - 276 с.

3. Демин В.Г. Судьба Солнечной системы. М.: Наука, 1975.

4. Дубошин Г.Н. Небесная механика: Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.

5. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальности "Астрономия". Издание 3-е, дополненное. М: Наука, 1975 . 800 с.

6. Дубошин Г.Н., «Справочное руководство по небесной механике и астродинамике», М.: «Наука», 1976.

7. Канонeнко А. Пять замечательных точек // Наука и жизнь. 1973. № 1. С. 42–46.

8. Като Т. Теория возмущений линейных матриц (Мир, М., 1975)

9. Лукьянов Л.Г. О законе сохранения энергии в ограниченной эллиптической задаче трех тел. Астрономический журнал, 2005.

10. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Лекции по небесной механике. Учебное пособие для высших учебных заведений. Алматы: “Эверо”, 2009. 277 с.

11. Лукьянов Л.Г., Ширмин Г.И. Поверхности Зундмана и устойчивость по Хиллу в задаче трех тел. Письма в Астрономический журнал, т. 33, № 8, с. 618-630, 2007

12. Маркеев А. П. Линейные гамильтоновые системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс (Ин-т компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2009)

13. Маркеев А. П. АСТРОНОМИЯ. «Задача трех тел и ее точное решение», Соросовский образовательный журнал, №9, 1999.

14. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999.

15. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.

16. Мартынова А.И., Орлов В.В., Рубинов А.В., Соколов Л.Л., Никифоров И.И. Динамика тройных систем. СПб.: "Изд-во С.-Петерб. ун-та», 2010. 216 с.

17. Маршал К. Задача трёх тел / К.П. Маршал. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

18. Парс Л. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971.

19. Себехей, Виктор. ТЕОРИЯ ОРБИТ. Ограниченная задача трех тел. Перевод с английского. Москва, Наука, 1982, 656 с.

20. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. Москва: "Наука", 1968, 800 с

21. Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С. Линейные гамильтоновые системы: введение в теорию и приложения: учебное пособие. Уфа:РИЦ БашГУ, 2020.-108 с.

Юдаргова Э.В.