Труды Петрозаводского государственного университета
Серия *"Прикладная математика и информатика"* Выпуск 6, 1997

УДК 518.61

Восстановление сигнала в радиодиагностических исследованиях

Е. К. Белый

В статье исследуются необходимые и достаточные условия существования кусочно-линейных аппроксимаций сигнала, устойчивых по отношению к некоторому определенному ниже классу вариаций. Физический аналог таких вариаций — аддитивные высокочастотные шумы с нулевым математическим ожиданием. Полученные автором результаты могут быть обобщены также (кроме кусочно-линейных) на более широкий класс кусочных аппроксимаций.

Сигналом, в общем случае, называют знак, физический процесс или явление, которые несут информацию о каком-либо событии, состоянии объекта либо передают команды управления, оповещения. Иногда, например в работе [1], сигнал понимается в более узком смысле, как процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений. При использовании радиографических методов полученные с приборов кривые несут информацию о состоянии систем человеческого организма и поэтому могут рассматриваться как сигнал. Таким образом, мы будем отождествлять сигнал с функциональной зависимостью, заданной плоской кривой. Радиодиагностическое исследование представляет собой стохастическую систему [2], следовательно, в процессе первичной обработки важно использование методов аппроксимации данных, устойчивых по отношению к стохастическим факторам [2].

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на интервале $[a,b]$ и задано некоторое разбиение интервала $[a,b]$ на n частей:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\ . \tag{1}$$

На каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$, где $i = 0,1,2,\ldots n-1$, функция $f(t)$ аппроксимируется линейной $L_i(t) = a_i + b_i t$, где коэффициенты a_i и b_i определены по методу наименьших квадратов. Кусочно-линейную функцию, аппроксимирующую $f(t)$ на интервале $[a,b]$, можно представить в виде

$$f^*(t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i L_i(t)\ ,$$

где $\eta_i = 1$, если $t \in (t_i, t_{i+1})$, иначе $\eta_i = 0$. При этом пока мы будем считать, что в узлах разбиения функция f^* не определена. Качество аппроксимации оценивается по формуле

$$F(t_1, .., t_{n-1}) = \int_a^b [f(t) - f^*(t, t_1, \ldots, t_{n-1})]^2 dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a_i + b_i t - f(t))^2 dt\ .$$

Лемма 1. *Функционал $F(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$, область определения которого задана условиями (1) , принимает в своей области определения минимальное значение.*

Доказательство. Замыканием области определения функционала F будет область, заданная выражением

$$a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{n-1} \le t_n = b,$$

то есть условиями (1), в которых знак $<$ изменен на знак $\le$. Совпадение двух узлов фактически означает удаление одного из узлов. Таким образом, функционал F можно определить и на замыкании области его определения. Как непрерывная функция, определенная на замкнутом множестве, функционал F должен достигать на своем замыкании наименьшего и наибольшего значений. Совпадение, например, узлов t_i и t_{i+1} означает, что интервалы $[t_{i-1}, t_i]$ и $[t_i, t_{i+1}]$ слились в один интервал $[t_{i-1}, t_{i+1}]$. На этом интервале функция f(t) будет аппроксимирована некоторой линейной функцией $L^*(t)$. Теперь внутри интервала $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ произвольным образом разместим узел t_i. В соответствии с критерием наименьших квадратов на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ будет существовать функция $L_{i-1}(t)$, которая на этом интервале дает наилучшую линейную аппроксимацию f(t), а значит, и не худшую, чем $L^*(t)$. Аналогично и для интервала $[t_i, t_{i+1}]$. Таким образом, функционал $F(t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ не может принимать на границе области определения значения, меньшие, чем внутри области определения. Значит, наименьшее значение функционала лежит внутри области определения. В дальнейшем мы будем считать функционал F определенным на открытом множестве, заданном условиями (1). □

В работе [3] автором доказано утверждение, которое можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1. *В экстремальных точках функционала F для любого узла разбиения t_{i+1}, где $i = 0, 1, ...n-1$, справедливо, по крайней мере, одно из двух утверждений:*

1) $a_i + b_i t_{i+1} = a_{i+1} + b_{i+1} t_{i+1}$,

2) $\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2} + \dfrac{b_i + b_{i+1}}{2} t = f(t_{i+1})$.

То есть либо кусочно-линейная функция $f^*(t, t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ может быть доопределена до непрерывной в узле t_{i+1}, либо среднее значение линейных функций, относящихся к смежным интервалам, равно $f(t_{i+1})$.

Определение 1. *Вариации функции $f(t)$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ будем называть допустимыми, если они не меняют найденные по методу наименьших квадратов коэффициенты a_i и b_i аппроксимирующей $f(t)$ линейной функции $L_i(t) = a_i + b_i t$.*

Лемма 2. *Пусть непрерывная функция $f(t)$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ аппроксимирована линейной $L_i(t) = a_i + b_i t$, где коэффициенты a_i и b_i определены методом наименьших квадратов. Тогда на указанном интервале существует бесконечное множество допустимых вариаций $h(t)$ функции $f(t)$.*

Доказательство. Для выполнения условий леммы достаточно, чтобы вариация h(t) удовлетворяла следующим условиям:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t)+h(t)]dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \ ,$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t)+h(t)]tdt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)tdt \ .$$

А значит,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} h(t)dt = 0, \ \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(t)tdt = 0 \ . \qquad (2)$$

Мы можем любой непрерывной вещественной функции $\varphi(t)$, определенной на интервале $[t_i, t_{i+1}]$, поставить в соответствие некоторую допустимую вариацию $h(t) = \tilde{a} + \tilde{b}t + \varphi(t)$, где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ подобраны так, чтобы выполнялись условия (2). Для этого достаточно найти $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ из уравнений:

$$\tilde{a}\int_{t_i}^{t_{i+1}} dt + \tilde{b}\int_{t_i}^{t_{i+1}} tdt = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t)dt \ ,$$

$$\tilde{a}\int_{t_i}^{t_{i+1}} tdt + \tilde{b}\int_{t_i}^{t_{i+1}} t^2dt = -\int_{t_i}^{t_{i+1}} t\varphi(t)dt \ .$$

□

Лемма 3. *Множество Ψ всех допустимых вариаций функции $f(t)$ на заданном интервале образует линейное пространство. То есть*
$h_1(t), h_2(t) \in \Psi \Longrightarrow \alpha h_1(t) + \beta h_2(t) \in \Psi$ *для* $\forall \alpha, \beta \in R$.

Выполнимость аксиом линейного пространства очевидна. Остальное доказывается непосредственной подстановкой в выражения (2).

Лемма 4. *Пусть даны $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}]$ и произвольное вещественное h_0. Всегда можно найти такую допустимую вариацию $h(t)$ функции $f(t)$ на заданном интервале, что $h(\tilde{t}) = h_0$. Причем таких вариаций может быть бесконечное число.*

Доказательство. Если $h_0 \neq 0$, то достаточно взять любую вариацию $h^*(t)$, для которой $h^*(\tilde{t}) \neq 0$, и построить новую $h(t) = h^*(t)\dfrac{h_0}{h^*(\tilde{t})}$. Согласно лемме 3 эта вариация также будет допустимой. Если $h_0 = 0$, то можно взять две любые различные допустимые вариации $h_1(t)$ и

$h_2(t)$, такие, что $h_1(\tilde{t}) = 1$ и $h_2(\tilde{t}) = 1$. Затем в качестве искомой взять вариацию $h(t) = h_1(t) - h_2(t)$. Согласно лемме 3 такая вариация также будет допустимой. В силу использованного принципа построения допустимых вариаций с условием $h(\tilde{t}) = h_0$ будет бесконечно много. □

Лемма 5. *Пусть даны $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2 \in [t_i, t_{i+1}]$ и заданы вещественные h_1^0 и h_2^0. Всегда можно найти такую допустимую вариацию $h(t)$ функции $f(t)$ на заданном интервале, что $h(\tilde{t}_1) = h_1^0$ и $h(\tilde{t}_2) = h_2^0$.*

Доказательство. Берем любую вариацию $h_1(t)$, удовлетворяющую условию $h_1(\tilde{t}) = h_1^0$, и из всех вариаций, равных нулю в точке $\tilde{t}_1$, любую такую $h_2(t)$, которая отлична от нуля в точке $\tilde{t}_2$. За искомую примем вариацию $h(t) = h_1(t) + h_2^0 h_2(t)/h_2(\tilde{t})$. □

Лемма 6. *Существуют вариации $h(t)$ функции $f(t)$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$, такие, что*

1) $h(t) = 0$ при $t \notin [\tilde{a}, \tilde{b}]$, где $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [t_i, t_{i+1}]$,

2) $h(t)$ принимает на концах интервала заданные значения $h(\tilde{a}) = h_1^0$ и $h(\tilde{b}) = h_2^0$, где h_1^0, h_2^0, — некоторые заданные вещественные числа.

Доказательство. Чтобы найти вариацию, удовлетворяющую первому условию, достаточно положить $h(t) = 0$ при $t \notin [\tilde{a}, \tilde{b}]$ и рассмотреть вариации $h(t)$, удовлетворяющие условиям (2), но только на интервале $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [t_i, t_{i+1}]$:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} h(t)dt = 0 \qquad \text{и} \qquad \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} h(t)tdt = 0\ .$$

То есть достаточно повторить все рассуждения леммы 2 для интервала $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [t_i, t_{i+1}]$. Вариации, удовлетворяющие первому условию леммы, образуют линейное пространство. Поэтому, на основании леммы 5, мы можем строить такие вариации $h(t)$, что $h(\tilde{a}) = h_1^0$ и $h(\tilde{b}) = h_2^0$ для любых заданных вещественных h_1^0, h_2^0. В частности, можно строить допустимые вариации, при которых значение $h(t)$ отлично от нуля только в некоторой сколь угодно малой окрестности одного из концов интервала $[t_i, t_{i+1}]$ и при этом сохраняется непрерывность варьируемой функции $f(t)$ на $[t_i, t_{i+1}]$. □

Все утверждения лемм 2–6 относились к одному из интервалов разбиения всей области определения $f(t)$, то есть к $[t_i, t_{i+1}]$, где

$i = 0, 1, ...n-1$ и рассмотренные допустимые вариации функции $f(t)$ на данном интервале не гарантировали сохранение ее непрерывности на границах интервала. В следующей лемме разрешается и эта проблема.

Лемма 7. *Существует такая вариация $h(t)$ функции $f(t)$, определенная на интервале $[t_i, t_{i+2}]$, что*

1) $h(t_{i+1}) = h_0$, где h_0 — некоторое заданное вещественное число,

2) $h(t) = 0$ при $t \notin [t_{i+1} - \varepsilon, t_{i+1} + \varepsilon]$ для $\forall \varepsilon > 0$,

3) $h(t)$ — допустимая вариация как на интервале $[t_i, t_{i+1}]$, так и на интервале $[t_{i+1}, t0_{i+2}]$, то есть не меняет значений коэффициентов $a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}$ соответствующих линейных функций $L_i(t)$ и $L_{i+1}(t)$.

Доказательство. По лемме 6 мы, с одной стороны, можем на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ задать такую допустимую вариацию $h_1(t)$, что $h_1(t) = 0$ при $t \leq t_{i+1} - \varepsilon$ и $h_1(t_{i+1}) = h_0$. С другой стороны, мы можем на интервале $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ задать допустимую вариацию $h_2(t)$, такую, что $h_2(t) = 0$ при $t \geq t_{i+1} + \varepsilon$ и $h_2(t_{i+1}) = 0$. Теперь определим на интервале $[t_i, t_{i+2}]$ вариацию $h(t)$, такую, что:

$$h(t) = \begin{cases} h_1(t) & , \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] , \\ h_2(t) & , \quad \forall t \in (t_{i+1}, t_{i+2}] . \end{cases}$$

Построенная вариация является допустимой на обоих интервалах, меняет значения $f(t)$ только в заданной сколь угодно малой окрестности узла t_{i+1}, принимает в t_{i+1} значение h_0 и сохраняет непрерывность функции $f(t)$ на всей области ее определения. □

Пусть разбиение (1) соответствует оптимальному значению функционала $F(t_1, t_2, ...t_{n-1})$. По теореме 1 для любого узла разбиения должно быть выполнено одно из условий:

1) $L_i(t_{i+1}) = L_{i+1}(t_{i+1})$ или

2) $\dfrac{L_i(t_{i+1}) + L_{i+1}(t_{i+1})}{2} = f(t_{i+1})$, где $i = 0, 1, ...n-2$.

По лемме 7 мы можем задать вариацию $f(t)$ в любой сколь угодно малой окрестности любого узла t_{i+1}, где $i = 0, 1, ...n-2$, такую, что эта вариация не меняет значений коэффициентов линейных функций $L_i(t)$ и $L_{i+1}(t)$, меняет значение $f(t)$ в узле t_{i+1} и сохраняет непрерывность $f(t)$ на всей области ее определения. Допустим, в узле не выполнено первое условие. Тогда такая вариация функции $f(t)$ приведет к тому, что не будет выполняться второе условие, что означает — разбиение перестало быть оптимальным. С другой стороны, если в узле выполнено условие $L_i(t_{i+1}) = L_{i+1}(t_{i+1})$, то любая допустимая вариация не меняет оптимального разбиения. Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 2. *Оптимальная аппроксимация функции $f(t)$ кусочно-линейной функцией $f^*(t, t_1, t_2, ..., t_{n-1})$ тогда и только тогда устойчива к допустимым вариациям $f(t)$, когда линейные функции $L_i(t)$ образуют непрерывную ломаную.*

Двум исследованным в этом параграфе условиям оптимального расположения узла можно дать простую геометрическую интерпретацию. Если разбить область определения функции на два интервала, при оптимальном расположении единственного узла разбиения, то в узле разбиения 0 будет выполнено одно из условий теоремы 1. Причем в случае функции, график которой показан на рис. 1а, это будет

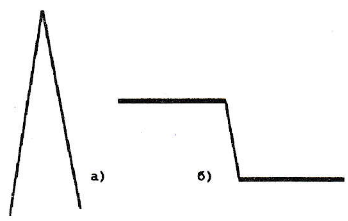

Рис. 1. Два локальных типа сигнала

первое условие (устойчивое оптимальное разбиение), а в случае, изображенном на рис. 1б, — второе. Для кривой на рис. 1б не удалось получить оптимальную непрерывную аппроксимацию потому, что неудачно выбрано количество узлов разбиения (должно быть не менее трех узлов).

В работе [3] автором предложен алгоритм, позволяющий найти оптимальную в указанном выше смысле аппроксимацию. Выбор исходного разбиения (а также количества разбиений) зависит от особенностей исследуемого класса кривых, характера шумов, а также от целей исследования. Иногда имеет смысл исходное количество узлов брать заведомо большее, а затем исключать те узлы, в которых имеет место разрыв. При этом на практике имеет смысл наложить запрет на сближение узлов на расстояние, меньшее некоторого установленного минимального. Такой подход использован автором при восстановлении сигнала в изображенном на рис. 2 примере. Здесь а) — исходный

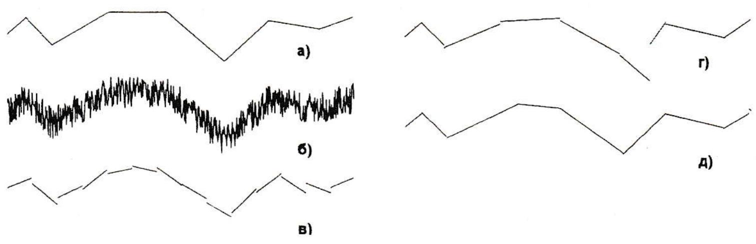

Рис. 2. Восстановление сигнала

сигнал, б) — искаженный шумом, смоделированным посредством датчика случайных чисел, в) — исходная кусочно-линейная аппроксимация, г) — аппроксимация на 100-й итерации, д) — аппроксимация на 1000-й итерации. Поскольку смоделированный шум только приближенно можно считать аддитивным с нулевым математическим ожиданием, восстановленный сигнал может в какой-то мере отличаться от исходного.

Литература

1. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1988.

2. *Чернецкий В. И.* Математическое моделирование стохастических систем. Петрозаводск, 1994.

3. *Белый Е. К.* Об одном методе сглаживания экспериментальных кривых // Труды Петрозаводского гос. ун-та. Сер. “Прикладная математика и информатика”. Петрозаводск, 1994. Вып. 3. С. 8-12.