"Применение законов физики элементарных частиц для описания релятивистских объектов".

1. Введение

Современная физика сталкивается с фундаментальной задачей объединения двух важнейших теорий: ***квантовой механики***, описывающей микроскопические процессы, и ***общей теории относительности***, объясняющей гравитационные взаимодействия на уровне массивных объектов. Эти две теории кажутся несовместимыми из-за различий в описании природы времени, пространства и энергии.

Одной из ключевых ***проблем*** современной науки, является понимание поведения элементарных частиц в условиях сильных гравитационных полей, создаваемых такими релятивистскими объектами, как черные дыры. В рамках общей теории относительности черные дыры — это области пространства-времени с *экстремальной гравитацией, деформирующей структуру Вселенной*. Вблизи горизонта событий физические законы изменяются, и возникает необходимость привлекать квантовую механику.

Данная работа направлена на исследование того, как знания о поведении элементарных частиц могут быть применены для описания ***релятивистских объектов****, таких как* ***черные дыры***, путем анализа физических процессов, происходящих вблизи горизонта событий.

Основные аспекты статьи:

- Обзор фундаментальных уравнений квантовой механики и общей теории относительности.
- Математическое преобразование уравнения Д'Аламбера в квантовую форму.
- Анализ физических эффектов, происходящих с элементарными частицами вблизи черных дыр.

Данный подход позволит показать, как квантовая механика может быть использована для моделирования поведения частиц в условиях экстремальной гравитации, а также подчеркнуть перспективы объединения двух фундаментальных теорий.

2. Теоретические основы

В данном разделе будут рассмотрены основные теоретические аспекты, лежащие в основе описания квантовых процессов. Особое внимание уделяется уравнению Шрёдингера как фундаментальному инструменту в квантовой механике, а также его физическому смыслу и выводам.

2.1 Уравнение Шрёдингера

Квантовая механика основывается на принципе описания состояний частиц через волновую функцию, Ψ которая содержит всю доступную информацию о системе. Эволюция волновой функции во времени и пространстве подчиняется уравнению Шредингера.

Рассмотрим общее уравнение Шрёдингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x,y,z,t)\Psi = i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta t}$$

где:

- **Ψ(x,y,z,t) —** волновая функция, определяющая вероятность нахождения частицы в определенной точке пространства в момент времени
- **m** — масса частицы.
- **$\hbar$=h/2π —** приведенная постоянная Планка
- **i** — мнимая единица ($i^2=-1$)
- **Δ —** оператор Лапласа, который в декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

- **U(x,y,z,t)** — потенциал, описывающий взаимодействие системы с внешними полями и силами.
- **∂Ψ/ ∂t** — производная волновой функции по времени

Физический смысл уравнения:

Уравнение Шрёдингера является аналогом второго закона Ньютона в классической механике, но вместо сил и траекторий описывает динамику квантовых систем через волновую функцию:

1. **Кинетическая энергия**:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi$$

Первый член уравнения, отражает пространственное распределение кинетической энергии частицы. Лапласиан (Δ) определяет изменение Ψ в различных направлениях пространства.

2. **Потенциальная энергия**:

$$U(x, y, z, t)\Psi$$

Второй член, зависит от положения и времени и определяет взаимодействие системы с внешним полем.

3. **Временная эволюция**:

$$i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta t}$$

Правая часть уравнения, описывает, как состояние системы изменяется со временем. Этот член связывает энергию системы с временной зависимостью волновой функции.

Иными словами, левая часть уравнения описывает энергию системы, а правая часть показывает, как она эволюционирует со временем.

Решением такого уравнения будет функция **Ψ(x,y,z)**

Стационарное уравнение Шрёдингера

Если система не зависит от времени U = U(x, y, z), уравнение упрощается до стационарной формы:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + (E-U)\Psi = 0$$

где **E** — полная энергия системы.

Эта форма уравнения позволяет анализировать собственные состояния системы, такие как энергетические уровни атомов.

Решением такого уравнения будет функция **Ψ(x,y,z)**

---

3) Релятивинские элементы:

Метрика Шварцшильда

Метрика Шварцшильда – это одно из первых решений уравнений Эйнштейна общей теории относительности (ОТО), найденное Карлом Шварцшильдом в 1916 году. Она описывает пространство-время вокруг статического сферически-симметричного и не вращающегося тела с массой MMM, находящегося в вакууме. Это решение стало основой для изучения таких явлений, как чёрные дыры, гравитационное линзирование и динамика вблизи массивных объектов.

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \cdot \sin^2\theta \cdot d\phi^2$$

,где

- **ds²** - Квадрат четырех мерного интервала, **где d** – дискретное значение.
- **s²** - время. **r** – радиальная координата (длина экватора изометрической сферы).
- **g** – ускорение свободного падения.
- **v** – скорость.
- **sin** – направление движения.
- **θ** и **ϕ** – угловые координаты (широта и долгота). В радианах/
- **t** – временная координата (время, измеряемое на бесконечно удаленных, неподвижных часах).

В данном уравнении:

1. Член $(1 - \frac{2GM}{c^2 r})$ показывает зависимость гравитационного потенциала от радиуса r. При приближении r к радиусу Шварцшильда $Rg = \frac{2GM}{c^2}$ метрика становится вырожденной, что соответствует горизонту событий черной дыры.
2. Для $r > Rg$ пространство-время искривлено, но конечные объекты (например, свет) могут покидать эту область.
3. Для $r < Rg$ происходит коллапс пространства-времени в точку, известную как сингулярность.

Уравнения Эйнштейна для кривизны пространства-времени

Уравнения Эйнштейна связывают распределение материи и энергии с геометрией пространства-времени. Общий вид уравнений записывается как:

1) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

где:

- $\mathbf{R_{\mu\nu}}$ — тензор Риччи, характеризующий кривизну пространства-времени.
- $\mathbf{g_{\mu\nu}}$ — метрический тензор, описывающий геометрическую структуру пространства-времени.
- **R** — скалярная кривизна (след тензора Риччи).
- **Λ** — космологическая постоянная, отвечающая за ускоренное расширение Вселенной.
- $\mathbf{T_{\mu\nu}}$ — тензор энергии-импульса, описывающий распределение материи и энергии.

Интерпретация уравнений:

1. Левая часть уравнений описывает геометрические свойства пространства-времени.
2. Правая часть представляет плотность материи и энергии, влияющих на кривизну пространства-времени.
3. Вакуумное решение (при $T_{\mu\nu}=0$) приводит к метрике Шварцшильда, описанной выше.

Физические эффекты, предсказываемые уравнениями Эйнштейна:

1. *Гравитационное замедление времени:*
В сильных гравитационных полях (например, рядом с чёрной дырой) время для внешнего наблюдателя течёт медленнее. Формула, вытекающая из метрики Шварцшильда:

$$\Delta t` = \Delta t\sqrt{1} - \frac{2GM}{c^2 r}$$

2. *Искривление света (гравитационное линзирование):*
Свет, проходящий мимо массивного объекта, отклоняется, следуя искривлённым траекториям пространства-времени. Формула для угла отклонения:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 r}$$

3. *Гравитационные волны:*
Уравнения Эйнштейна предсказывают существование гравитационных волн — возмущений пространства-времени, которые распространяются со скоростью света. Они были экспериментально подтверждены в 2015 году слиянием чёрных дыр, зарегистрированным детектором LIGO.

Квантово-механическая задача о движении частицы в обратно квадратичном потенциале.

Квантово-механическая задача о движении частицы в обратно квадратичном потенциале вблизи начала координат, описывается уравнением Шрёдингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - \frac{\tilde{a}}{x^2}\Psi(x) = E\Psi(x),$$ где:

- $\boldsymbol{\tilde{a} = \frac{\mathrm{a}}{m}}$
- $\boldsymbol{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}}$ - член, представляющий собой кинетическую энергию частицы, описываемую двумя производными, где m - масса частицы.
- Если в $\boldsymbol{-\frac{\tilde{a}}{x^2}\Psi(x)}$ подставить $\tilde{a}$, то получим $\frac{a}{x^2 m}$. Этот член представляет собой потенциальную энергию частицы, а параметр определяет силу потенциала.

- **x** – координата частицы.
- $E\Psi(x)$ – член, представляющий собой полную энергию частицы, умноженную на волновую функцию ψ(x).

Потенциал – это скалярная функция, которая описывает потенциальную энергию частицы или системы в зависимости от её положения в пространстве.

Какое решение черных дыр подходит для волновой функции?

Довольно хороший вопрос, т.к. для определенной метрики чд (черной дыры, в дальнейшем - сокращ.), в волновой функции придется вносить разные параметры, иногда не работающие в других решениях или вообще не сочетаемые с ней.

При более детальном изучении метрик черных дыр, можно выяснить, что волновая функция Шредингера будет сопоставима с сферически-симметричными чд, так как именно в решениях таких чд описываются движения частиц по изометрической сфере. Наш вопрос состоял в том, чтобы выяснить, какая именно метрика используется для этого.

Чтобы ответить на него, для начала, рассмотрим уравнения Эйнштейна, показанные ранее, и описывающие стационарные состояния произвольных механических систем, обладающих центральной симметрией, из которых доказано, что атомы и атомные ядра могут быть представлены как стоячие гравитационные волны.

Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (назовём его 1)) распадается на два независимых уравнения:

2) $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R = \kappa g_{\mu\nu}$$

$$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\kappa - \Lambda)$$

Здесь k– некоторая функция, зависящая от размерности пространства. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике.

Теперь введем метрику для многомерных пространствах размерностью D, описывающую описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц:

3)

$$ds^2 = \Psi(t,r)dt^2 - p(\Psi)dr^2 - d\phi_1^{\ 2} - \sin^2\phi_1 d\phi_2^{\ 2} - \sin^2\phi_2 d\phi_3^{\ 2} - \ldots - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 \ldots \phi_{N-1} d\phi_N^{\ 2}$$

,где: $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в D - 1 мерное пространство. Данная метрика хоть и не имеет прямого отношения к геометрии чд, но нужна будет в дальнейшем, для вывода волновой функции.

Уравнения поля в метрике (3) сводятся к одному уравнению второго порядка:

4)

$$-p^{'}\Psi_{tt} + \Psi_{\Gamma\Gamma} = -Kp\Psi - \frac{pp^{'} - 2p^{''}\Psi + p^{'2}\Psi}{2p\Psi}\Psi^2{}_t$$

Уравнение второго порядка — это уравнение, содержащее неизвестную (искомую) функцию y(x), независимую переменную x и первую и вторую производные y', y'' .

Важно подметить, что уравнение (4) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p′:

в области 0 < ′ p уравнение имеет эллиптический тип;

в области 0 > ′ p уравнение имеет гиперболический тип;

в области 0 = ′ p уравнение имеет параболический тип.

Для дальнейшего нахождения, применим уравнение Гамильтона-Якоби, которое для метрики (3) будет выглядеть следующим образом:

5)

$$\frac{1}{\Psi}\left(\frac{\delta S}{\delta t}\right)^2 - \frac{1}{p}\left(\frac{\delta S}{\delta r}\right)^2 - \left(\frac{\delta S}{\delta\phi_1}\right)^2 - \left(\frac{\delta S}{\delta\phi_2}\right)^2 - \sin^{-2}\phi_1 \sin^{-2}\phi_2\left(\frac{\delta S}{\delta\phi_3}\right)^2 - \ldots - \sin^{-2}\phi_1 \sin^{-2}\phi_2 \ldots \phi_{N-1}\left(\frac{\delta\Psi_S}{\delta\phi_N}\right)^2 = 0$$

Такой вид уравнения можно проинтегрировать и представить решение получившегося уравнения:

6)

$$\frac{1}{\Psi}\left(\frac{\delta S_{cl}}{\delta t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\delta S}{\delta r}\right)^2-\left(\frac{\delta S}{\delta \phi_1}\right)^2=M^2$$

$$\left(\frac{\delta \Psi_S}{\delta \phi_1}\right)^2+\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\delta \Psi_S}{\delta \phi_2}\right)^2+\ldots+\sin^{-2}\phi_1\sin^{-2}\phi_2\ldots\sin^{-2}\phi_{N-1}\left(\frac{\delta \Psi_S}{\delta \phi_N}\right)^2=\frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S{}^2$$

в другом виде, с помощью способа Шредингера. Тогда получиться уравнение:

7)

$$S=S_d+\hbar\ln\Psi_s$$

Здесь в явном виде вводится классическое действие - Sd, постоянная Планка (ħ) и волновая функция Ψs. Используя классическое действие, мы определяем те параметры задачи, которые могут считаться внешними для квантовой системы. В случае метрики (3) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичной сфере, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату.

Классическое действие — это величина, пропорциональная фазе квантовой волновой функции

<u>Предыдущие уравнения Эйнштейна (2) – вакуумные уравнения стационарного состояния, описывающие гравитацию в исследуемом масштабе длин волн, из которых мы взяли метрику (3)</u>. Для нее, из уравнения Гамильтона-Якоби (5), мы вывели формулу (7), параметрами задачи которой стали: 1) углы на единичной сфере; 2) время и радиальная координата.

Основываясь на этом, можно сопоставить параметры и используемые уравнения с параметрами и математическим выводом сферически-симметричными метриками черных дыр. <u>В итоге, мы получим, что это – метрика Шварцшильда.</u>

<u>Это так, потому что метрика Шварцшильда как раз выводилась из решения вакуумных уравнений Эйнштейна</u> и ее параметры полностью схожи с нашим уравнением(7), а именно:

1) симметричность.

2) переменные времени и угловые радиальные координаты в метрике.

3) движение частицы по единичной сфере.

Теперь можно ответить на изначальный вопрос: волновая функция может присутствовать в центрально-симметричной метрике Шварцшильда, и гравитационные волны его черной дыры будут описываться уравнением Шредингера.

4) Связь квантовой механики и релятивистских объектов:

1) Рассмотрим скалярное поле в 1 + 1 пространстве и времени с метрикой:

(1.1)
$$ds^2 = B(r)dt^2 - B^{-1}(r)dr^2$$

Это двумерная (2D) метрика, которая используется для описания пространства-времени. Она определяет интервал ds^2 между двумя событиями в зависимости от координат t (временная координата) и r (радиальная координата).

Функции B(r) и B^{-1} (r) зависят только от радиальной координаты r.

- **B(r)dt²:** Этот член описывает временной компонент интервала B(r),модифицирует временной масштаб в зависимости от расстояния r
- **- B^{-1} (r) dr²:** Этот член описывает пространственный (радиальный) компонент интервала. Отрицательный знак говорит о том, что пространственный компонент имеет другую сигнатуру (знак), чем временной компонент.
- **Функция B(r):** Это метрика, определяющая "гравитационный потенциал" или изменение масштаба времени в зависимости от расстояния rrr. Она может описывать, например, черную дыру или другое сферически симметричное распределение массы.
- **Обратная функция B^{-1} (r):** Используется для пространственного компонента. Она инверсно связана с временным масштабом.

Такую метрику можно встретить в статических сферически-симметричных пространствах-временах, например в внешнем решении Шварцшильда.

Теперь зададим параметр, что:

B(r) имеет нуль в точке $r=r_0$, что соответствует горизонту событий, и разлагается вблизи этой точки, а $B`(r) = \frac{dB}{dr}$ не равно нулю и конечно в точке r_0.

Тогда исчезновение B(r) в точке r_0 говорит о присутствии горизонта событий.

Это так, потому что это свойство напрямую связано с физическими характеристиками метрики в общей теории относительности.

Рассмотрим это подробнее, когда B(r)=0, при r=r:

- Метрика пространства-времени в заданной форме $ds^2 = B(r)dt^2 - B^{-1}(r)dr^2$ содержит функцию B(r), которая влияет на временной $B(r)dt^2$ и пространственный - $B^{-1}(r)\ dr^2$ компоненты метрики.
- Тогда если $B(r)\rightarrow 0$, то в какой-то точке $r=r_0$ временная компонента метрики $B(r)dt^2$ становится нулевой. Это означает, что время, как его воспринимает удалённый наблюдатель, перестаёт быть определённым.
- Одновременно пространственная компонента - $B^{-1}(r)\ dr^2$ становится бесконечной, что указывает на «растяжение» пространственного интервала. Это свидетельствует о том, что в точке $r=r_0$ невозможно двигаться в радиальном направлении так, чтобы покинуть эту область — она становится границей.

Теперь сравним это с физическими свойствами горизонта событий:

- Горизонт событий в физике чёрных дыр определяется как область, из которой никакая информация или материальные объекты не могут вырваться наружу, включая свет.
- На горизонте событий временной компонент обнуляется. Это отражает эффект гравитационного замедления времени: для удалённого наблюдателя любые процессы вблизи горизонта событий выглядят как замороженные.

Таким образом можно сделать вывод что B(r)=0,при $r=r_0$ означает присутствие горизонта событий.

Рядом с горизонтом событий разложим B(r) как:

2.2) $$B(r) = B'(r_0)(r - r_0) + O[(r - r_0)^2] \approx B'(r_0)(r - r_0)$$

где:

- **$B'(r_0)$**— первая производная функции в точке r_0, характеризует скорость изменения функции B(r) в окрестности горизонта событий.
- **Линейный член $B'(r_0)(r-r_0)$** - этот член описывает линейное приближение B(r) вблизи горизонта событий.
- Если мы находимся в непосредственной близости от r_0, то именно этот член определяет значение B(r), а старшипе члены ($O[(r-r_0)^2]$) становятся пренебрежимо малыми. Это говорит о том, что вблизи горизонта событий

поведение фйункции B(r) практически линейное, что упрощает анализ физических процессов.

- **Старшие члены разложения ($\mathbf{O}[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})^2]$)** описывают нелинейные эффекты или более сложное поведение B(r) на больших расстояниях от горизонта событий.
- Их можно игнорировать при анализе близко к горизонту событий ($r \approx r_0$), так как они оказывают малое влияние.
- **Приближерние $\mathbf{B(r) \approx B'(\boldsymbol{r_0})(r-\boldsymbol{r_0})}$:**

  Как было сказано ранее старшие члены разложения при анализе вблизи горизонта событий (при $r \approx r_0$) , что значительно упрощает формулу.

Заметим, что в случае метрики Шварцшильда: $B'(r_0) = r_0^{-1}$, где $r_0 = 2M$ – радиус Шварцшильда.

Теперь запишем уравнение поля для скалярного поля ф(t,r):

3.3) $$\left(\square + \frac{{m_0}^2 c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0$$

,где:

- $\square$ – *это оператор Д'Аламбера*, который в трехмерном пространстве определяется как:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}$$

Как видно из его формулы, оператор Д'Аламбера определяет изменения в пространстве и во времени (оператор Лапласа)

- $\frac{{m_0}^2 c^2}{\hbar^2}$ - **массовый член,** который добавляется к волновому оператору, чтобы учесть массу скалярного поля.

Разберем составляющие этого выражения:

- **$\mathbf{m_0}$ — масса покоя** частицы или поля(в данном случае поля)
- **$\hbar$ - редуцированная постоянная Планка**, которая связывает свойства квантовых объектов с их волновой природой.

В совокупности этот член связывает квантовые эффекты $\hbar$ с релятивистской энергией - $(m_0{}^2c^2)$

φ - обозначение скалярного поля которое тут определяется Ф(r,t) которое зависит от времени t и положения в пространстве r (радиус-вектор, который определяет точку в пространстве).

А по определению:

Скалярное поле — это физическая величина, которая в каждой точке пространства и времени характеризуется одним числовым значением.

Теперь подставим записанную нами ранее метрику (1.1) в оператор Д'Аламбера, получив:

$$\Box\varphi = \frac{1}{c^2\mathrm{B}(r)}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d}{dr}\left(B(r)\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

4)

Подставив данное выражение в формулу скалярного поля (3.3) получим:

5) $$\frac{1}{c^2\mathrm{B}(r)}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d}{dr}\left(B(r)\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{m_0{}^2c^2}{\hbar^2}\varphi$$

Или если интерпретировать в другой форме, то будет:

6) $$c^{-2}B(r)^{-1}\delta_t{}^2\Phi - \delta(B(r)\delta_r\Phi) = -m_0{}^2c^2\hbar^{-2}\Phi$$

Разберем физический смысл полученной формулы:

- Первый член $\frac{1}{c^2\mathrm{B}(r)}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ описывает временные изменения скалярного поля, взвешенные метрикой $B(r)$.
- Второй член $-\frac{d}{dr}\left(B(r)\frac{d\varphi}{dr}\right)$ описывает пространственные изменения, также модифицированные метрикой.
- Массовый член $-\frac{m_0{}^2c^2}{\hbar^2}\varphi$ связывает поле с его инерционными свойствами.

Теперь для дальнейшего преобразования и решения, что уравнение скалярного поля разложим на две функции, на временную и пространственную:

6) $$\Phi(r,t) = e^{-iwt}\Psi(r),$$ где:

$\mathbf{e^{-iwt}}$ – описывает временную зависимость с угловой частотой.

Ψ(r) – радиальная функция, описывающая поведение поля в пространстве.

Форма e^{-iwt} является решением уравнения Шредингера для времени:

7) $$i\hbar \frac{d\Psi(r,t)}{dt} = E\Psi(r,t)$$

,где:

Ψ(r, t) – волновая функция

ħ **-** редуцированная постоянная Планка

E - энегрия состояния

Метод разделения переменных предполагает, что волновую функцию можно разложить в виде:

8) $$\Psi(r, t) = \Psi(r)\, e^{-iwt}$$

,где:

Ψ(r) – описывает пространственную часть волновой функции

$\mathbf{e^{-iwt}}$ – временную зависимость

w связано с энергией E через уравнение:

$$w = \frac{E}{\hbar}$$

Смысл формулы:

Экспонента e^{-iwt} является комплексной функцией. Она может быть представлена в виде:

9) $$e^{-iwt} = \cos(wt) - i \sin(wt)$$

,где:

cos(wt) - реальная часть

i sin(wt) - мнимая часть

Это выражение описывает волновое движение с угловой частотой .Частота связана с энергией состояния, а такие колебания характеризуют вероятность нахождения частицы в конкретном состоянии.

Экспоненциальная зависимость e^{-iwt} является для решением линейного дифференциального уравнения первого порядка:

10) $$\frac{df(t)}{dt} = -iwf(t)$$

Это уравнение появляется из временной части уравнения Шредингера, если Ψ(r, t) разложить в виде произведения Ψ(r)T(t) , где T(t) – функция времени.

11) $$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} = -iw$$

Интегрируя уравнение (11), получаем:

12) $$T(t) = e^{-iwt}$$

К полученной формуле подставим разложенные части функции в полученное нами формулу скалярного поля:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -w^2 e^{-iwt}\Psi(r)$$

Функция $\Psi(r)$ зависит только от r, а временной множитель выносится как общий:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\Psi(r)}{dr^2}, \qquad \frac{d^2\varphi}{dr^2} = e^{-iwt}\,\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2}$$

Подстановка этих производных в уравнение (n) дает:

$$-\frac{w^2}{c^2B(r)}e^{-iwt}\Psi(r) - e^{-iwt}\frac{d}{dr}\left(B(r)\frac{d\Psi(r)}{dr}\right) = -\frac{{m_0}^2c^2}{\hbar^2}e^{-iwt}\Psi(r)$$

Фактор e^{-iwt} выносится за скобки:

$$-\frac{w^2}{c^2B(r)}\Psi(r) - \frac{d}{dr}\left(B(r)\frac{d\Psi(r)}{dr}\right) = -\frac{{m_0}^2c^2}{\hbar^2}\Psi(r)$$

16)

Уравнение (n):

$$c^{-2}B(r)^{-1}{d_t}^2\varphi - d_r(B(r)d_r\varphi) = -m^2c^2\hbar^{-2}\varphi$$

Физическое пояснение полученной формулы:

- Уравнение теперь зависит только от радиальной координаты r, что позволяет исследовать поведение поля в пространстве без учета временной зависимости.
- Временная часть представлена через частоту w, которая связана с энергией: E =ħw.

Для дальнейших действий нормируем функцию

Нормировка функции — это процесс приведения функции в такую форму, чтобы она удовлетворяла определённым условиям. Обычно нормировка используется для обеспечения определённого значения интеграла функции, например, равного единице**.**

Нормировав функцию получим:

$$\Phi(r,t) = e^{iwt}\,\frac{\Psi(r)}{\sqrt{B(r)}}$$

Подставим в левую часть полученной функции выраженное ранее упрощение из уравнения (16)

$$-\frac{{m_0}^2 c^2}{\hbar^2}\Psi(r)$$

и упрощая выражение, получим, что $\Psi(r)$ удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} - \frac{a}{(r-r_0)^2}\Psi(r) = 0$$

,где:

$$a = \frac{\hbar^2 w^2 r_0}{2c^2[B^{'}(r_0)]^2}$$

(Вблизи горизонта событий)

$$a = \frac{\hbar^2 w^2 r_0}{2c^2}$$

(Вблизи горизонта событий чд Шварцшильда)

2) Влияние законов черных дыр на волновую функцию

Запишем известное нам уравнение Шредингера для стационарного состояния:

22) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = E\Psi$$

Где в данных условиях потенциальная энергия U(r) описывает гравитационное взаимодействие между нейтронами:

$$U(r) = -\frac{Gm^2}{r}$$

,где **r** – расстояние между нейтронами.

Энергетические уровни:

Из уравнения Шредингера следует, что энергитические уровни дискретны и определяются формулой:

$$E_n = \frac{k^2 m_n e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

,где:

k = 1 – коэффициент пропорциональности

e – элементарный заряд

n = 1, 2, 3… - главное квантовое число.

5) Выведение эквивалентности задачи скалярного поля в фоне метрики Шварцшильда к квантово-механической задаче о движении частицы в обратном квадратичном потенциале.

Для этого применим метод разделения переменных.

Разделение переменных – стандартный метод в теории дифференциальных уравнений.

Его основная идея:

1. Если уравнение линейное и переменные независимы (например, время и пространство), решение можно искать в виде произведения функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.
2. После подстановки, каждую переменную выделяют в отдельное уравнение, что упрощает анализ.

С помощью него, рассмотрим динамику скалярного поля φ(r, t) в метрике вида:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B^{-1}(r)dr^2$$

Где B(r) описывает геометрию пространства-времени и имеет нули в r = r_0, что связано с горизонтом событий чд. Уравнение поля в такой метрике:

$$c^{-2}B(r)^{-1}\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d}{dr}\left(B(r)\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{{m_0}^2c^2}{\hbar^2}\varphi$$

Теперь наша задача – свести данное уравнение к кванто-механическому уравнению Шредингера для частицы, в потенциале –a/x². Для этого мы и будем использовать метод разделения переменных и упрощение формы уравнения.

Запишем ф(r, t) как T(t)Ψ(r) и подставим T(t)Ψ(r) в уравнение (16):

$$T(t)\left[c^{-2}B(r)^{-1}\frac{d^2T}{dt^2}\Psi(r)\right] - \Psi(r)\frac{d}{dr}\left(B(r)\frac{d\Psi}{dr}\right) = -\frac{{m_0}^2c^2}{\hbar^2}T(t)\Psi(r)$$

Применяем метод разделения переменных, разделяя переменные t и r. Вводим частотный параметр w^2:

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -w^2, \qquad \frac{1}{\Psi}\left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2\Psi}{dr^2} - V(r)\Psi\right] = w^2$$

,где:

V(r) – эффективный потенциал.

Для сокращения дополнительных членов, связанных с B(r), вводим замену:

29) $$\varphi(r, t) = e^{-iwt}\,\Psi(r)\sqrt{\mathrm{B}(r)}$$

Умножаем на $\sqrt{\mathrm{B(r)}}$, потому что:

2) Это компенсирует производные, связанные с $\mathrm{B}(r)$, при подстановке в пространственную часть уравнения.

3) e^{-iwt} описывает временную осцилляцию поля с частотой w, характерную для стационарных решений.

Подставляем уравнение (29) в исходное уравнение. Найдем временные и пространственные производные:

Временные:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = -w^2 e^{-iwt}\,\Psi(r)\sqrt{\mathrm{B}(r)}$$

Пространственные:

1. $$\frac{d\varphi}{dr} = e^{-iwt}\left[\frac{d\varphi}{dr}\sqrt{\mathrm{B}(r)} + \Psi\,\frac{d\sqrt{\mathrm{B}(r)}}{dr}\right]$$

2. $$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = e^{-iwt}\left[\frac{d^2\Psi}{dr^2}\sqrt{\mathrm{B}(r)} + 2\,\frac{d\Psi}{dr}\frac{d\sqrt{\mathrm{B}(r)}}{dr} + \,\Psi\,\frac{d^2\sqrt{\mathrm{B}(r)}}{dr^2}\right]$$

Подставляя эти производные, многие члены с $\frac{dB(r)}{dr}$ сокращаются благодаря введению $\sqrt{\mathrm{B(r)}}$.

После всех упрощений уравнение принимает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} - \frac{a}{(r-r_0)^2}\Psi(r) = 0$$

Пусть: $r - r_0 = x$.

Т.к. мы рассматриваем частицу вблизи горизонта событий, то:

35) $$r = r_0 = r - r_0 = x = 0$$

И

$$\tilde{a} = \frac{a}{m}$$

Тогда уравнение примет вид:

37) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} - \frac{\tilde{a}}{x^2}\Psi(r) = 0$$

Т.к. мы рассматриваем вблизи горизонта событий (35), то перепишем с условием этого уравнение (37):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}-\frac{\tilde{a}}{x^2}\Psi(x)=0$$

В итоге, мы получили уравнение Шредингера.

Сведем его к стандартной форме и получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}-\frac{\tilde{a}}{x^2}\Psi(x)=E\Psi(x)$$

Чтобы не нарушать равенство устремим E→0

Полученное нами уравнение полностью эквивалентно уравнению Шрёдингера, описывающему движение частицы в обратном квадратичном потенциале.

6) Уравнение Шредингера для частицы, находящейся в области черной дыры:

В этой главе, мы рассмотрим, как формируется волновая функция частицы (нейтрона) в черной дыре, какие параметры на нее влияют и как она может быть использована для описания физических процессов.

Как возникает волновая функция в черной дыре?

Для анализа поведения частицы в области черной дыры, мы будем использовать модифицированное уравнение Шредингера (22):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+U\Psi=E\Psi$$

Как будет модифицироваться уравнение Шредингера?

Для дальнейших преобразований, в черной дыре нужно учесть следующие параметры:

1. **Гравитационное поле.** Взаимодействие нейтронов в условиях черной дыры определяется сильной гравитацией. Потенциальная энергия U(r) задается законом всемирного тяготения:

$$U(r) = -\frac{Gm^2}{r}$$

2. **Сверхплотные состояния.** Нейтроны в черной дыре находятся на расстояниях порядка 10^{-31} м. Такое сжатие приводит к доминированию квантовой кинетической энергии:

$$E_{\text{кин}} \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

3. **Квантовое ограничение.** Нейтроны не могут находиться слишком близко друг к другу из-за соотношения неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta p \times \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

С учетом этих факторов, уравнение Шредингера в черной дыре принимает вид:

39) $$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi - \frac{Gm^2}{r}\Psi = E\Psi$$

Для стационарных состояний волновая функция нейтрона записывается как:

$$\Psi(r,t) = R(r)e^{-iwt/\hbar}$$

, где:

R(r) – радиальная часть волновой функции, зависящая от расстояния.

$e^{-iwt/\hbar}$ – временная зависимость, описывающая эволюцию состояния во времени.

Радиальная часть R(r) определяется из уравнения:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{Gm^2}{r}R = ER$$

Но, это уравнение решается с учетом граничных условий:

1. R(r) стремится к 0 при r стремится к бесконечности, так как вероятность нахождения нейтрона на больших расстояниях очень мала.
2. R(r) конечна при r стремится к 0, чтобы избежать физических противоречий.

Параметры, влияющие на волновую функцию:

Волновая функция частицы в чд зависит от нескольких ключевых параметров:

1. **Масса нейтрона(m_n):**
   - Определяет вклад как кинетической, так и гравитационной энергии.
   - Чем больше масса, тем сильнее гравитационное взаимодействие и тем меньше расстояние между нейтронами.
2. **Гравитационная постоянная(G):**
   - Увеличивает глубину потенциального «углубления» гравитационного притяжения.
3. **Квантовое число(n):**
   - Задает энергетический уровень:
   $$E_n = -\frac{k^2 m_n e^4}{2\hbar^2 n^2}$$
   - При увеличении n энергия становится меньшего значения, а радиальная часть функции R(r) описывает состояние с большей «шириной».
4. **Постоянная Планка(ħ):**
   - Указывает на роль квантовых эффектов. Чем меньше ħ, тем слабее квантовые ограничения на расстояние между нейтронами.

Примеры применения волновой функции:

1. **Распределение нейтронов в черной дыре:**

Волновая функция $\Psi(r,t)$ позволяет определить вероятностное распределение нейтронов. Например, квадрат радиальной части $[R(r)]^2$ дает плотность вероятности нахождения нейтрона на расстоянии r:

$$P(r) \sim [R(r)]^2$$

2. **Энергетический баланс гравитонов (при условии, что они существуют):**

Слияние чд сопровождается выделением энергии в виде гравитационных волн. Разность энергетических уровней нитронов дает оценку энергии одного гравитона:

$$e = E_{n=2} - E_{n=1}$$

Для первого и второго уровней энергия рассчитывается так:

$$E_n = -\frac{k^2 m_n e^4}{2\hbar^2 n^2}$$

Подставляя n = 1 и n = 2, находим e.

3. Плотность вещества:

С помощью волновой функции можно оценить плотность вещества в черной дыре. Зная минимальное расстояние r = 1, определяем объём, занимаемый одним нейтроном:

$$V \sim r^3{}_{n=1}$$

Тогда плотность равна:

$$p = \frac{m_n}{V}$$

Итоги:

В ходе работы было продемонстрировано, что проблема скалярного поля в фоне метрики Шварцшильда эквивалентна квантово-механической задаче о движении частицы в обратном квадратичном потенциале вблизи начала координат.

С помощью модифицированного уравнения Шрёдингера была выведена волновая функция элементарной частицы (нейтрона) в условиях чёрной дыры.

Полученные результаты убедительно демонстрируют, что законы физики элементарных частиц могут успешно применяться для описания релятивистских объектов, таких как чёрные дыры. Такой подход позволяет объединить квантовую механику и релятивистскую гравитацию, открывая новые перспективы в изучении природы самых экстремальных объектов Вселенной.

Источники:

Hawking, S. W.
Particle creation by black holes. — Communications in Mathematical Physics, 1975.

Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.

"Введение в теорию квантованных полей."

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.

"Теория поля" (Том 2 из серии "Теоретическая физика").

Чепуров Иван Иванович

Потенциал $1/x^2$ и температура чёрной дыры(Курсовая работа.)

Киселёв В.В.,

"Квантовая механика. Курс лекций".

Переломов А. М.,

"Обобщенные когерентные состояния и их приложения".

Андрей Чернов

Применение волнового уравнения Шрёдингера к условиям чёрной дыры. Результаты исследования.

В.Д. ГУНЬКО, Л.Ю. СУХОВЕЕВА, В.М. СМОЛЕНЦЕВ

Дифференциальные уравнения примеры и типовые задания.

С.Г. Рубин

Устройство нашей вселенной

Научный журнал КубГАУ, №97(03), 2014 года.
И.Ф.Гинзбург
Основы квантовой механики (нерелятивинская теория)